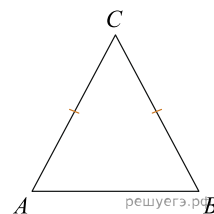


Вариант 222

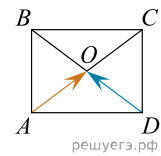
№ 1.

Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Боковая сторона треугольника равна 10. Найдите площадь этого треугольника.



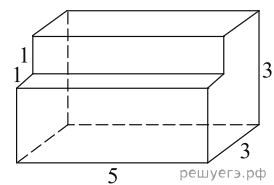
№ 2.

Две стороны изображенного на рисунке прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите длину суммы векторов $\vec{AO}$ и $\vec{DO}$.



№ 3.

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



№ 4.

В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные— жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

№ 5.

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

№ 6.

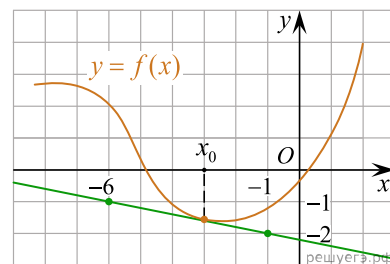
Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13} = 3$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{x^{-5} \cdot x^8}{x}$ при $x = 4$.

№ 8.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0 = -3$. Найдите значение производной функции $g(x) = x^3 + f(x)$ в точке x_0 .



№ 9.

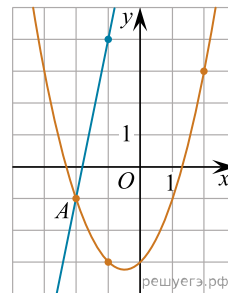
Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ – постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошла 21 с. Ответ дайте в киловольтах.

№ 10.

В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 2\operatorname{tg}x - 4x + \pi - 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{7}{\operatorname{tg} x} + 5 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.

№ 14.

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. На ребрах SA , SB , SC и SD отмечены точки L , K , N и M соответственно так, что четырехугольник $KLMN$ — трапеция с основаниями $KL = 3$ и $MN = 2$. Известно, что $SK : KB = 3 : 1$.

а) Докажите, что плоскость KLM пересекает ребра SC и SD в их серединах.

б) Найдите высоту SH пирамиды, если точка пересечения диагоналей основания пирамиды совпадает с точкой H , площадь основания равна 24, а площадь сечения $KLMN = 10$.

№ 15.

Решите неравенство: $\log_2 \frac{x^2 - x - 6}{x + 1} + \log_2 (x^2 + 1) \leq \log_2 \left(x^3 - x^2 - 5x + \frac{4}{x + 1} - 3 \right).$

№ 16.

В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 22% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2023	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026
Долг (в млн рублей)	S	$0,6S$	$0,3S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждый платеж будет меньше 6 млн рублей.

№ 17.

Дан угол величиной 120° с вершиной C . Вне угла на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC = \sqrt{3}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 3, пересекающая стороны угла в точках A и B .

- а) Докажите, что $OC = BC = CA$.
- б) Найдите площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

№ 18.

При каких значениях a системы уравнений $\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ равносильны?

№ 19.

На столе лежат вырезанные из бумаги квадраты и прямоугольники, размеры сторон которых— натуральные числа. Для каждого квадрата обязательно найдется прямоугольник, равный ему по площади, но шириной на 5 меньше, чем сторона квадрата. И наоборот, для каждого прямоугольника обязательно найдётся квадрат, равный ему по площади, со стороной на 5 больше, чем его ширина.

- а) Может ли лежать на столе прямоугольник шириной 15?
- б) Может ли лежать на столе прямоугольник длиной 36?
- в) Какое наибольшее количество различных фигур может лежать на столе?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27589	25
2	27711	6
3	25561	76
4	320193	0,46
5	320211	0,0296
6	26655	12,5
7	26901	16
8	525700	26,8
9	27994	2
10	99571	5
11	509158	39
12	26708	-1

№ 13.

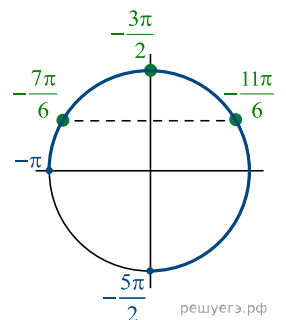
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), или получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Пусть $t = \frac{1}{\sin x}$, тогда имеем:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = 2, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin x} = 1, \\ \frac{1}{\sin x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности (см.рис.) найдём корни из отрезка $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$. Получим числа: $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.

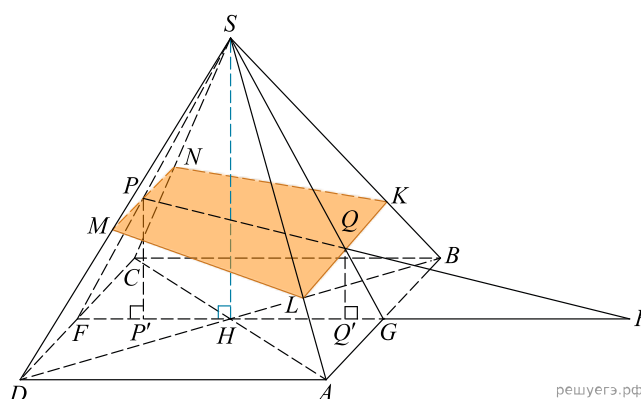
№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Прямая l пересечения плоскостей SAB и SCD параллельна прямым AB и CD . В противном случае эти три прямые бы имели общую точку. Аналогично параллельны прямые l , KL и MN , то есть все перечисленные пять прямых параллельны. Заметим, что треугольники SKL и SAB , а также SMN и SCD подобны. Следовательно,

$$\frac{SM}{SD} = \frac{SN}{SC} = \frac{MN}{CD} = \frac{MN}{KL} \cdot \frac{KL}{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, точки M и N — середины ребер SD и SC соответственно.



б) Пусть точки G и F — середины ребер AB и CD соответственно. Обозначим P — точку пересечения прямых SF и MN , пусть Q — точка пересечения прямых SG и KL , и пусть R —

точка пересечения прямых FG и PQ . Заметим, что точка H лежит на прямой FG , следовательно, плоскость SFG содержит высоту пирамиды SH и перпендикулярна основанию пирамиды $ABCD$. Таким образом, точки P и Q — проекции точек P и Q соответственно — лежат на отрезке FG .

Из п. а) следует, что

$$AB = CD = 2MN = 4, \quad FG = 6.$$

По теореме о трех перпендикулярах отрезок PQ перпендикулярен отрезку KL и является высотой трапеции $KLMN$. Следовательно,

$$PQ = \frac{2S_{KLMN}}{KL + MN} = 4.$$

Треугольники SHF , PPF и QQG подобны, тогда

$$\frac{FP'}{FH} = \frac{PP'}{SH} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{GQ'}{GH} = \frac{QQ'}{SH} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$FH = \frac{1}{2}FG = 3,$$

$$FP' = \frac{1}{2}FH = \frac{3}{4},$$

$$GQ' = \frac{1}{2}FP' = \frac{3}{4},$$

$$P'Q' = FG - FP' - GQ' = \frac{15}{4}.$$

Треугольники RQQ и RPP также подобны. Значит,

$$\frac{RQ'}{RP'} = \frac{RQ}{RP} = \frac{QQ'}{PP'} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$RQ' = P'Q' = \frac{15}{4}, \quad RQ = PQ = 4.$$

Следовательно,

$$QQ' = \sqrt{RQ^2 - RQ'^2} = \frac{\sqrt{31}}{4}, \quad SH = 4QQ' = \sqrt{31}.$$

Ответ: б) $\sqrt{31}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

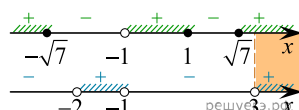
Решение. Преобразуем неравенство:

$$\log_2 \frac{x^2 - x - 6}{x + 1} + \log_2 (x^2 + 1) \leq \log_2 \left(x^3 - x^2 - 5x + \frac{4}{x + 1} - 3 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x + 1} > 0, \\ x^2 + 1 > 0, \\ \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 + 1)}{x + 1} \leq x^3 - x^2 - 5x + \frac{4}{x + 1} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x + 1} > 0, \\ \frac{x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6}{x + 1} \leq \frac{x^4 - 6x^2 - 8x + 1}{x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x + 1} > 0, \\ \frac{x^3 - x^2 - 7x + 7}{x + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x + 2)(x - 3)}{x + 1} > 0, \\ \frac{(x - 1)(x^2 - 7)}{x + 1} \geq 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему неравенств методом интервалов (см. рис.),



получим, что $x > 3$.

Ответ: $(3; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. В январе 2024 года долг будет составлять 1,22 Смн рублей, а в июле 2024 года — 0,6Смн рублей. Значит, платёж в 2024 году составит 0,62Смн рублей.

В январе 2025 года долг будет составлять $1,22 \cdot 0,6S = 0,732S$ млн рублей, а в июле 2025 года — 0,3Смн рублей. Значит, платёж в 2025 году составит 0,432Смн рублей.

В январе 2026 года долг перед банком составит $1,22 \cdot 0,3S = 0,366S$ млн рублей, а в июле — 0 рублей. Значит, платёж в 2026 году составит $0,366S$ млн рублей.

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 0,62S < 6, \\ 0,432S < 6, \Leftrightarrow S < \frac{300}{31} = 9\frac{21}{31}. \\ 0,366S < 6 \end{cases}$$

Наибольшее целое решение этой системы неравенств — 9.

Ответ: 9.

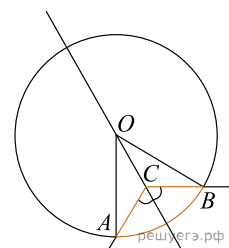
№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что

$$\angle ACO = \angle BCO = \frac{(360^\circ - 120^\circ)}{2} = 120^\circ.$$

Пусть $AC = x$. По теореме косинусов для треугольника ACO получим, что $9 = x^2 + 3 + x\sqrt{3}$. Положительный корень этого уравнения равен $\sqrt{3}$. Поэтому $AC = CO = \sqrt{3}$. Аналогично $CB = CO$. Что и требовалось доказать.



б) Заметим, что треугольники ACO и BCO равнобедренные, поэтому $\angle AOB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$. Радиус окружности равен 3, поэтому площадь сектора AOB равна

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Найдем площади треугольников ACO и BCO :

$$S_{ACO} = S_{BCO} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Тогда площадь криволинейной фигуры ABC равна

$$\frac{3\pi}{2} - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3(\pi - \sqrt{3})}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{3(\pi - \sqrt{3})}{2}$.

№ 18.

Критерии оценивания ответа на задание С5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Рассмотрены все возможные случаи. Получен верный ответ, но решение либо содержит пробелы, либо вычислительную ошибку или опisku.	3
Рассмотрены все возможные случаи. Получен ответ, но решение содержит ошибки.	2
Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.	1
Все прочие случаи.	0
Максимальное количество баллов	4

Решение. При $a < 0$ ни одна из систем не имеет решений и, следовательно, они равносильны. При $a = 0$ второе уравнение, общее для обеих систем, имеет единственное решение $x = 0, y = 0$, удовлетворяющее и первым уравнениям обеих систем. Поэтому системы равносильны и при $a = 0$.

При $a > 0$ второе уравнение задает окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в начале координат. Уравнение $\sin(x+y) = 0$ равносильно бесконечной совокупности уравнений $x+y = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Системы равносильны тогда и только тогда, когда окружность, определяемая вторым уравнением, имеет общие точки только с прямой $x+y=0$, соответствующей $n=0$ в первой системе. Для этого необходимо и достаточно, чтобы ее радиус был меньше, чем расстояние от начала координат до прямой $x+y=\pi$, т. е. чем число $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Итак, $0 < \sqrt{a} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ или $0 < a < \frac{\pi^2}{2}$. Добавляя полученные ранее значения $a \leq 0$, получаем ответ.

Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{\pi^2}{2}\right)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Вместе с таким прямоугольником должен быть квадрат со стороной $15+5=20$ и площадью 400. Значит, и площадь прямоугольника должна быть 400, поэтому его длина должна быть равна $\frac{400}{15}$, что нецелое.

б) Пусть ширина прямоугольника x , тогда на столе есть равновеликий с прямоугольником квадрат со стороной $x+5$, откуда $(x+5)^2 = 36x$, откуда $x^2 - 26x + 25 = 0$, $x = 1$, $x = 25$. Значению $x = 1$ соответствует прямоугольник длины 36 и квадрат со стороной 6.

в) Пусть ширина прямоугольника a , а длина b . Тогда на столе есть равновеликий с прямоугольником квадрат со стороной $a + 5$, откуда

$$(a+5)^2 = ab \Leftrightarrow a^2 + 10a + 25 = ab \Leftrightarrow 25 = a(b - 10 - a).$$

Значит, 25 кратно a , откуда получаем три варианта:

$$a = 1,$$

$$b - 10 - a = 25,$$

$$b = 36;$$

$$a = 5,$$

$$b - 10 - a = 5,$$

$$b = 20;$$

$$a = 25,$$

$$b - 10 - a = 1,$$

$$b = 36.$$

К каждому прямоугольнику есть парный квадрат, и все они разные, поэтому на столе могут лежать максимум 6 фигур.

Ответ: а) нет, б) да, в) 6.

