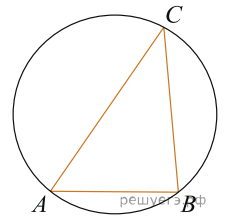


Вариант 223

№ 1.

Одна сторона треугольника равна $\sqrt{2}$, радиус описанной окружности равен 1. Найдите острый угол треугольника, противолежащий этой стороне. Ответ дайте в градусах.

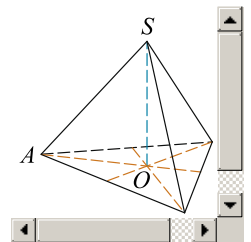


№ 2.

Найдите длину вектора $\vec{a}(6; 8)$.

№ 3.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 5. Найдите длину отрезка OS .



№ 4.

У Дины в копилке лежит 7 рублёвых, 5 двухрублёвых, 6 пятирублёвых и 2 десятирублёвых монеты. Дина наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит менее 60 рублей.

№ 5.

Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

№ 6.

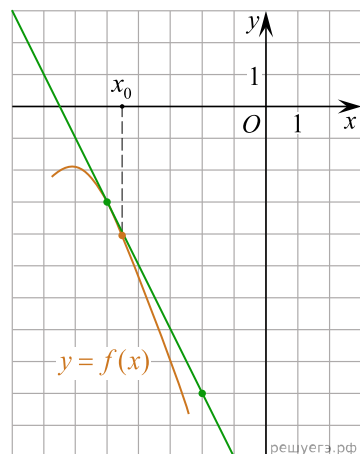
Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{5-2x}} = \frac{1}{3}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\log_{0,25} 2$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

**№ 9.**

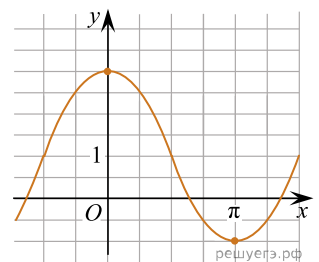
Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 256л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128атмосфер? Ответ дайте в литрах.

№ 10.

Имеются два сосуда. Первый содержит 30кг, а второй— 20кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cos x + b$, где a и b — целые числа. Найдите $y\left(\frac{13\pi}{3}\right)$.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 6 \cos x + \frac{24}{\pi}x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\sqrt{2 \sin x + \sqrt{2}} \cdot \log_4(2 \cos x) = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

№ 14.

В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC , ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро $MA=6$. На ребре AC находится точка D , на ребре AB — точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AL = 2$, и $BE = 1$.

- а) Докажите, что ADE — равносторонний треугольник.
- б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E , D и L .
-

№ 15.

Решите неравенство $5 \frac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 1$.

№ 16.

Фирма планирует взять в январе кредит на целое число миллионов рублей на 4 года на следующих условиях:

- в июле каждого года долг фирмы возрастает на 10% по сравнению с началом года;
- в конце 1-го и 3-го годов фирма выплачивает только проценты по кредиту, начисленные за соответствующий текущий год;
- в конце 2-го и 4-го годов фирма выплачивает одинаковые суммы, погашая к концу 4-го года весь долг полностью.

Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат превысит 100 миллионов рублей.

№ 17.

В трапеции $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$.

а) Докажите, что $AB = CD$.

б) Найдите AD , если $AB = 2\sqrt{6}$, $BC = 8$.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

№ 19.

Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа — n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за все время сделала суммарно на 1615 фотографий больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

а) Могли ли они фотографировать в течение 5 дней?

б) Могли ли они фотографировать в течение 6 дней?

в) Какое наибольшее суммарное количество фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 30 фотографий?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	522916	45
2	27663	10
3	903	7,5

4	509433	0,1
5	689089	0,06
6	77374	-2
7	26846	-0,5
8	27505	-2
9	525114	8
10	99578	18
11	676854	2
12	26698	-14

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

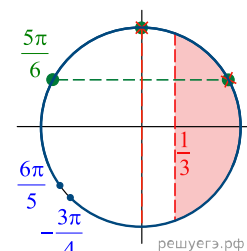
Решение. а) При условии $\cos x < \frac{1}{3}$ и $\cos x \neq 0$ исходное уравнение сводится к квадратному относительно показательной функции:

$$16^{\sin x} - 3 \cdot 4^{\frac{1}{2} + \sin x} + 8 = 0 \Leftrightarrow (4^{\sin x})^2 - 6 \cdot 4^{\sin x} + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{\sin x} = 2, \\ 4^{\sin x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

Условию равносильности удовлетворяет только серия $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни при помощи единичной окружности (см. рис.). Подходит только $\frac{5\pi}{6}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{5\pi}{6}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Рассмотрим треугольники AMB и CMB , они прямоугольные, имеют общую сторону MB и равные стороны AB и BC , следовательно, эти треугольники равны по двум катетам, значит, $AM = MC = 6$. Рассмотрим треугольник AMC , воспользовавшись теоремой косинусов найдём косинус угла CAM :

$$\cos \angle CAM = \frac{AM^2 + AC^2 - MC^2}{2 \cdot AC \cdot AM} = \frac{36 + 9 - 36}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{1}{4}.$$

Из треугольника ADL найдём сторону LD :

$$LD = \sqrt{AD^2 + AL^2 - 2AL \cdot AD \cos \angle CAM} = \sqrt{4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{6}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABM . Найдём косинус угла MAB : $\cos \angle MAB = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Из треугольника ALE найдём сторону LE :

$$LE = \sqrt{AL^2 + AE^2 - 2 \cdot AL \cdot AE} = \sqrt{4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} = 2.$$

В треугольнике ADE $AE = ED$, следовательно, он равнобедренный, углы при основании равны. Угол CAB равен 60° , значит, $\angle AED = \angle ADE = 60^\circ$. Следовательно, треугольник ADE равносторонний, $AD = AE = DE = 2$.

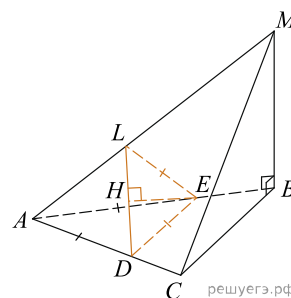
б) Опустим высоту EH в равнобедренном треугольнике LDE на основание LD . Найдём EH :

$$EH = \sqrt{LE^2 - \left(\frac{LD}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Треугольник DLE — искомое сечение, найдём его площадь:

$$S_{DLE} = \frac{1}{2} EH \cdot LD = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.



Примечание.

Площадь треугольника DLE можно было найти по формуле Герона:

$$\begin{aligned}
 S_{DLE} &= \sqrt{\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - 2\right) \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - 2\right) \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}\right)} = S_{DLE} = \\
 &= \sqrt{\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - 2\right) \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - 2\right) \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}\right)} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \left(2 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{6}{4} \left(4 - \frac{6}{4}\right)} = \frac{\sqrt{15}}{2}.
 \end{aligned}$$

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Запишем исходное неравенство в виде

$$5 \frac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 5^0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0.$$

Случай $x \geq 0$:

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-5)}{(x-3)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3, \\ 3 < x < 5. \end{cases}$$

Случай $x < 0$:

$$\frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+5)}{(x-3)^2} < 0 \Leftrightarrow -5 < x < -2.$$

Ответ: $(-5; -2) \cup (2; 3) \cup (3; 5).$

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть сумма кредита равна S млн руб., а выплаты в конце 2-го и 4-го годов равны x млн руб. Составим таблицу по данным задачи.

Номер года	Долг в январе, млн руб.	Долг в январе (с начисленными процентами), млн руб.	Выплата, млн руб.
1	S	$1,1S$	$0,1S$
2	S	$1,1S$	x
3	$1,1S - x$	$1,1(1,1S - x)$	$0,1(1,1S - x)$
4	$1,1S - x$	$1,1(1,1S - x)$	x

В конце четвёртого года долг будет погашен полностью, значит,

$$1,1(1,1S - x) - x = 0 \Leftrightarrow 1,21S - 2,1x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1,21S}{2,1}.$$

Сумма всех выплат превысит 100 млн руб., тогда

$$0,1S + x + 0,1(1,1S - x) + x > 100 \Leftrightarrow 0,21S + 1,9x > 100.$$

Подставим значение x , найденное выше, получим:

$$0,21S + 1,9 \cdot \frac{1,21S}{2,1} > 100 \Leftrightarrow 2,74S > 210 \Leftrightarrow S > \frac{210}{2,74} \Leftrightarrow S > 76\frac{176}{274}.$$

Сумма кредита должна быть целым числом миллионов рублей, поэтому наименьшая сумма равна 77 млн руб.

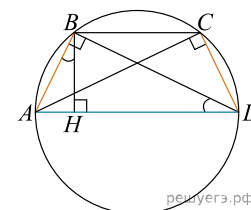
Ответ: 77 млн руб.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Из условия следует, что точки B и C лежат на окружности с диаметром AD . Тогда трапеция вписана в окружность, значит, она равнобокая по теореме о вписанной трапеции, откуда $AB = CD$.



б) Проведем высоту BH . Пусть $AH = x$, тогда $AD = 8 + 2x$. Треугольники ABH и ADB подобны по двум углам, поэтому $\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AB}$, то есть

$$\frac{2\sqrt{6}}{8+2x} = \frac{x}{2\sqrt{6}} \Leftrightarrow 2x^2 + 8x = 24 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2, \quad x > 0.$$

Тогда $AD = 8 + 2 \cdot 2 = 12$.

Ответ: б) 12.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены оба значения a , но ответ содержит лишнее значение.	3
С помощью верного рассуждения получено одно из значений a .	2
Задача верно сведена к исследованию системы уравнений.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Решение системы может быть единственным в двух случаях.

1 случай. Единственное решение является граничной точкой для множества решений каждого из двух неравенств. В этом случае это единственное решение должно удовлетворять системе

уравнений

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -3. \end{cases}$$

Если $x = 1$, то $a + 2(a+1) + a + 1 = 0$, а значит, $a = -\frac{3}{4}$. При этом значении a система принимает вид:

$$\begin{cases} -7x^2 - 6x + 13 \leq 0, \\ -3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{13}{7}, \\ x \geq 1, \\ -\frac{1}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Единственное решение $x = 1$.

Если $x = -3$, то $9a - 6(a+1) + a + 1 = 0$ и $a = \frac{5}{4}$. Система принимает вид:

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 21 \leq 0, \\ 5x^2 + 18x + 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq x \leq -3, \\ \begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq -\frac{3}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leq x \leq -3.$$

При этом значении a система имеет бесконечно много решений.

2 случай. Одно из неравенств имеет единственное решение, удовлетворяющее другому неравенству.

Первое неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases} a^2 - (a-1)(a+4) = 0, \\ a-1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}.$$

При этом первое неравенство имеет единственное решение $x = -4$, которое удовлетворяет второму неравенству.

Второе неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases} (a+1)^2 - a(a+1) = 0, \\ a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow a = -1.$$

При этом второе неравенство имеет единственное решение $x = 0$, которое не удовлетворяет первому неравенству.

Ответ: $-\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснование в п. в того, что S может принимать все целые значения (отличные от -1 и 1); — обоснование в п. в того, что равенства $S = -1$ и $S = 1$ невозможны	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Допустим, они фотографировали k дней, тогда разница между сделанными фотографиями составляет $k(n - m) = 1615$.

а) Да, например при $m = 1$, $n = 324$.

б) Нет, 1615 не делится на 6 .

в) Чтобы у Наташи получилось как можно больше фотографий, надо чтобы у Маши получилось как можно больше фотографий. Если у нее в последний день не 29 — добавим ей поровну фотографий в каждый день так, чтобы стало 29 . Заметим далее, что k — делитель числа 1615 , не больший 30 , то есть $1, 5, 17, 19$. Если они фотографировали меньше 19 дней— добавим Маше недостающие дни в начало. Итак, оптимальный вариант для Маши— начать с 11 и фотографировать 19 дней. Поэтому у Наташи будет $\frac{11+29}{2} \cdot 19 + 1615 = 1995$ фотографий.

Ответ: а) да; б) нет; в) 1995 .
