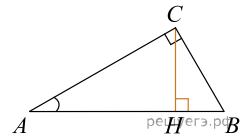


Вариант 224

№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 8, $BH = 4$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

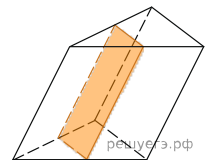


№ 2.

Даны векторы $\vec{a}(-10; 3)$, $\vec{b}(-1; -6)$ и $\vec{c}(-2; 6)$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}$.

№ 3.

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 8. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



№ 4.

Из множества натуральных чисел от 10 до 19 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

№ 5.

В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

№ 6.

Найдите корень уравнения $\sqrt{-4-5x} = 4$.

№ 7.

Найдите значение выражения $8 \sin \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12}$.

№ 8.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

№ 9.

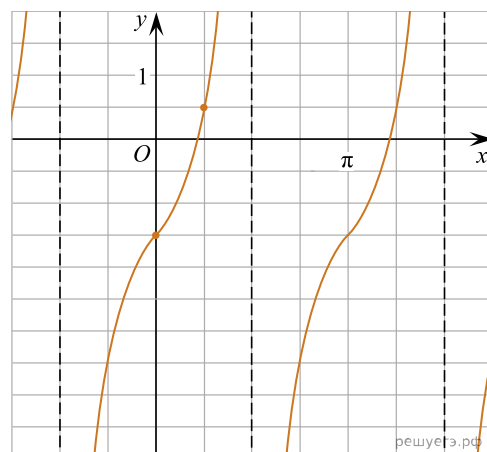
Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 6,4 километров?

№ 10.

Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \operatorname{tg} x + b$. Найдите b .



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 6 \cos x + \frac{24}{\pi}x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение: $\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{2} \sin^4 \frac{x}{2} - \sqrt{2} \cos^4 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 12, точки K и L — середины ребер AD и $C_1 D_1$ соответственно, а точка F расположена на ребре BC так, что $CF = 3BF$.

а) Докажите, что плоскость KLF делит диагональ AC основания $ABCD$ в отношении 2:3, считая от точки A .

б) Найдите расстояние от точки D_1 до плоскости KLF .

№ 15.

Решите неравенство: $x^2 \log_4^2 x + 10 \log_3^2 x \leq x \log_4 x \cdot \log_3 x^7$.

№ 16.

В банк был положен вклад под 10% годовых. Через год, после начисления процентов, вкладчик снял со счета 2000 рублей, а еще через год (опять после начисления процентов) снова внес 2000 рублей. Вследствие этих действий через три года со времени открытия вклада вкладчик получил сумму меньше запланированной (если бы не было промежуточных операций со вкладом). На сколько рублей меньше запланированной суммы он получил?

№ 17.

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 12$, $BC = 5$. Окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром O на стороне BC проходит через вершину C . Вторая окружность касается катета AC , гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC .

б) Найдите радиус второй окружности.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (x-1) \cdot \sqrt{2x-a} = x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

№ 19.

На доске написано n чисел a_i ($i=1, 2, \dots, n$). Каждое из них не меньше 50 и не больше 150. Каждое из этих чисел уменьшают на $r_i\%$. При этом либо $r_i=2\%$, либо число a_i уменьшается на 2, то есть становится равным $a_i - 2$ (какие-то числа уменьшились на число 2, а какие-то — на 2 процента).

а) Может ли среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, \dots, r_n$ быть равным 5?

б) Могло ли так получиться, что среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, \dots, r_n$ больше 2, при этом сумма чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ уменьшилась более чем на $2n$?

в) Пусть всего чисел 30, а после выполнения описанной операции их сумма уменьшилась на 40. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел $r_1, r_2, \dots, r_n$.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27344	0,5
2	670261	4
3	27153	16
4	320179	0,3
5	621772	0,16
6	501034	-4
7	245169	2
8	119979	7
9	27985	1,4
10	26599	10
11	509143	-1,5
12	26698	-14

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. а) Уравнение определено при $\sin x \neq \pm \frac{3}{5}$. При таких значениях переменной числитель должен быть равным нулю. Используя формулу $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, получаем:

$$5\cos 2x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 10\cos^2 x - 3\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4}{5}, \\ \cos x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Если $\cos x = \frac{4}{5}$, то в силу основного тригонометрического тождества $\sin x = \pm \frac{3}{5}$, поэтому соответствующие значения переменной являются посторонними корнями. Уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$ дает решения $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Чтобы отобрать корни, рассмотрим каждую из серий отдельно. Имеем:

$$\frac{7\pi}{2} \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 5\pi \Leftrightarrow \frac{7}{4} + \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2\frac{1}{12} \leq k \leq 2\frac{5}{6}.$$

Полученное двойное неравенство не имеет целых решений. Рассмотрим вторую серию:

$$\begin{aligned} \frac{7\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 5\pi &\Leftrightarrow \frac{7}{4} - \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{5}{2} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1\frac{5}{12} \leq k \leq 2\frac{1}{6} \Leftrightarrow k = 2. \\ &\Leftrightarrow 1\frac{5}{12} \leq k \leq 2\frac{1}{6} \Leftrightarrow k = 2. \end{aligned}$$

Найденному значению параметра соответствует решение $\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{14\pi}{3}$.

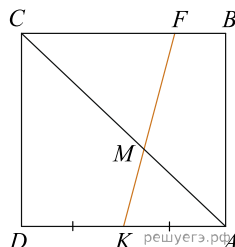
Ответ: а) $\left\{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{14\pi}{3}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Рассмотрим квадрат $ABCD$ (см.рис.слева). Пусть отрезки KF и AC пересекаются в точке M . Треугольники CFM и AKM подобны с коэффициентом подобия $k = CF:AK = 3:2$, следовательно, $AM:MC = 3:2$, диагональ AC делится плоскостью KLF в отношении $2:3$.



б) Пусть P — точка пересечения прямых FK и CD , а Q — точка пересечения прямой PL с прямыми CC_1 и DD_1 , соответственно, S — точка пересечения плоскости KLF с прямой A_1D_1 . Тогда расстояние от точки D_1 до плоскости KLF равно высоте пирамиды $SLQD_1$, опущенной из вершины D_1 . Треугольники PDK и PCF , LQD_1 и PQD , а также SQD_1 и KQD подобны. Следовательно,

$$\frac{PD}{PC} = \frac{DK}{CF} = \frac{2}{3},$$

откуда $PD = 2CD = 4LD_1$. Тогда

$$\frac{D_1Q}{QD} = \frac{LD_1}{PD} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{SD_1}{KD} = \frac{D_1Q}{QD} = \frac{1}{4},$$

откуда $LD_1 = KD = 6$. Находим:

$$SQ = \sqrt{QD_1^2 + SD_1^2} = \frac{3\sqrt{89}}{10}.$$

$$D_1Q = \frac{1}{5}DD_1 = \frac{12}{5},$$

$$SD_1 = \frac{1}{4}KD = \frac{3}{2}.$$

Объем четырехугольника $SLQD_1$ равен

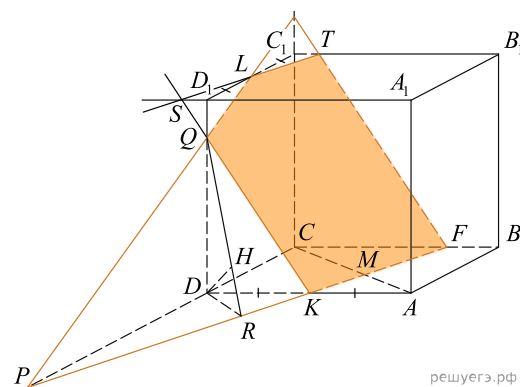
$$V_{SLQD_1} = \frac{1}{6}LD_1 \cdot D_1Q \cdot SD_1 = \frac{36}{10}.$$

Таким образом, находим:

$$SL = \sqrt{LD_1^2 + SD_1^2} = \frac{3\sqrt{17}}{2},$$

$$LQ = \sqrt{LD_1^2 + QD_1^2} = \frac{6\sqrt{29}}{5},$$

$$SQ = \sqrt{QD_1^2 + SD_1^2} = \frac{3\sqrt{89}}{10}.$$



Напишем теорему косинусов для треугольника SLQ :

$$\begin{aligned} SQ^2 &= SL^2 + LQ^2 - 2SL \cdot LQ \cos \angle SLQ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3^2 \cdot 89}{2^2 \cdot 5^2} &= \frac{6^2 \cdot 29}{5^2} + \frac{3^2 \cdot 17}{2^2} - 2 \cdot \frac{6\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{17}}{2} \cos \angle SLQ \Leftrightarrow \cos \angle SLQ = \frac{20}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{29}}. \quad SQ^2 = SL^2 + LQ^2 - 2SL \cdot LQ \cos \angle SLQ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3^2 \cdot 89}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{6^2 \cdot 29}{5^2} + \frac{3^2 \cdot 17}{2^2} - 2 \cdot \frac{6\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{17}}{2} \cos \angle SLQ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \angle SLQ = \frac{20}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{29}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sin \angle SLQ = \sqrt{1 - \cos^2 \angle SLQ} = \frac{\sqrt{93}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{29}}.$$

Находим площадь треугольника SLQ :

$$S_{SLQ} = \frac{1}{2} SL \cdot LQ \sin \angle SLQ = \frac{9\sqrt{93}}{10}.$$

Таким образом, расстояние от точки D_1 до плоскости KLF равно

$$d(D_1, KLF) = H_{D_1} = \frac{3V_{SLQD_1}}{S_{SLQ}} = \frac{12}{\sqrt{93}} = \frac{4\sqrt{93}}{31}.$$

Приведем немного другое решение пункта б).

В предыдущем решении получено, что:

$$PD = 4LD_1, \quad QD = 4QD_1, \quad KD = 4SD_1.$$

При этом DP , DK и DQ три взаимно перпендикулярных ребра также, как и ребра D_1L , D_1S , D_1Q , следовательно, пирамиды $DPKQ$ и D_1LSQ — подобны с коэффициентом подобия $k = 4$.

Из точек D и Q на прямую PK опустим перпендикуляры. По теореме о трех перпендикулярах из основаниями будет одна и та же точка — R . В плоскости QDR из точки D опустим перпендикуляр на прямую QR . Заметим, что прямая PK перпендикулярна плоскости QDR и, следовательно, DH . Таким образом, прямая DH перпендикулярна плоскости KLF , а длина отрезка DH равна расстоянию от точки D до плоскости KLF и в четыре раза больше расстояния до этой же плоскости от точки D_1 .

$$PD = 24,$$

$$DK = 6,$$

$$RC_1 = \frac{48}{5}, \quad PK = \sqrt{DP^2 + DF^2} = 6\sqrt{17}.$$

$$DR = \frac{DP \cdot DK}{PK} = \frac{6 \cdot 24}{6\sqrt{17}} = \frac{24}{\sqrt{17}}, \quad QR = \sqrt{DR^2 + DQ^2} = \sqrt{\frac{24^2}{17} + \frac{48^2}{25}} = \frac{24\sqrt{93}}{5\sqrt{17}}.$$

$$DH = \frac{QD \cdot DR}{QR} = \frac{\frac{48}{5} \cdot \frac{24}{\sqrt{17}}}{\frac{24\sqrt{93}}{5\sqrt{17}}} = \frac{48}{\sqrt{93}}, \quad d(D_1, KLF) = \frac{DH}{4} = \frac{12}{\sqrt{93}} = \frac{4\sqrt{93}}{31}.$$

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{93}}{31}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $x \log_4 x = a$, $\log_3 x = b$, тогда имеем:

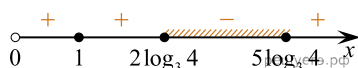
$$a^2 + 10b^2 \leq 7ab \Leftrightarrow (a^2 - 2ab) - (5ab - 10b^2) \leq 0 \Leftrightarrow (a - 2b)(a - 5b) \leq 0. \quad a^2 + 10b^2 \leq 7ab \Leftrightarrow (a^2 - 2ab) - (5ab - 10b^2) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a - 2b)(a - 5b) \leq 0.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$(x \log_4 x - 2 \log_3 x)(x \log_4 x - 5 \log_3 x) \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x \log_3 x}{\log_3 4} - 2 \log_3 x \right) \left(\frac{x \log_3 x}{\log_3 4} - 5 \log_3 x \right) \leq 0 \Leftrightarrow (x \log_4 x - 2 \log_3 x)(x \log_4 x - 5 \log_3 x) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x \log_3 x}{\log_3 4} - 2 \log_3 x \right) \left(\frac{x \log_3 x}{\log_3 4} - 5 \log_3 x \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x \left(\frac{x}{\log_3 4} - 2 \right) \left(\frac{x}{\log_3 4} - 5 \right) \leq 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x (x - 2 \log_3 4) (x - 5 \log_3 4) \leq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log_3^2 x \left(\frac{x}{\log_3 4} - 2 \right) \left(\frac{x}{\log_3 4} - 5 \right) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3^2 x (x - 2 \log_3 4) (x - 5 \log_3 4) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 (x - 2 \log_3 4) (x - 5 \log_3 4) \leq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 2 \log_3 4 \leq x \leq 5 \log_3 4. \end{cases}$$



Ответ: $\{1\} \cup [2 \log_3 4; 5 \log_3 4]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть вкладчик в банк первоначально положил x рублей. Тогда за 3 года хранения этих денег вклад вырос бы до $1,1^3x$ рублей.

За первый год хранения вклада он вырос до $1,1x$ рублей. Когда через год вкладчик снял 2000 рублей, на счете осталось $1,1x - 2000$ рублей. В конце второго года хранения вклада на эту сумму были начислены проценты, вклад стал $(1,1x - 2000) \cdot 1,1$ рублей. Когда вкладчик снова внес 2000 рублей, сумма вклада стала равна

$$(1,1x - 2000) \cdot 1,1 + 2000 \text{ рублей.}$$

К концу третьего года хранения вклада сумма увеличилась до

$$((1,1x - 2000) \cdot 1,1 + 2000) \cdot 1,1 = 1,1^3x - 2000 \cdot 1,1^2 + 2000 \cdot 1,1 \text{ рублей.}$$

Эту сумму снял вкладчик в итоге вместо первоначально запланированной $1,1^3x$ рублей.

Найдем искомую разность.

$$1,1^3x - 1,1^3x + 2000 \cdot 1,1^2 - 2000 \cdot 1,1 = 2000 \cdot 1,1 \cdot (1,1 - 1) = 2000 \cdot 1,1 \cdot 0,1 = 220 \text{ рублей.}$$

Ответ: на 220 рублей.

Примечание.

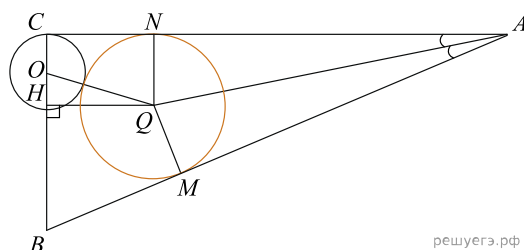
Решение можно несколько упростить, заметив, что запланированный и фактический проценты за первый год не отличаются. Пусть к началу второго года после начисления процентов на счете было x руб. Тогда запланированный процент равен $1,1^2x$ руб., а фактический процент равен $1,1^2(x - 2000) + 1,1 \cdot 2000 = 1,1^2x - 220$ руб. Искомая разность — 220 руб.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть Q — центр второй окружности, M и N — её точки касания со сторонами AB и AC соответственно, а точка H — проекция точки Q на BC . Имеем: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$, следовательно, $\cos \angle A = \frac{12}{13}$, $\sin \angle A = \frac{5}{13}$. Тогда $\operatorname{tg} \angle NAQ = \operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} = \frac{\sin \angle A}{1 + \cos \angle A} = \frac{1}{5}$. Поэтому $AC > AN = 5NQ$, что и требовалось доказать.



б) Пусть x — радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHQ :

$$QH = CN = 12 - 5x > 0, OQ = x + \frac{1}{2}, OH = |OC - CH| = \left| \frac{1}{2} - x \right|.$$

По теореме Пифагора $OH^2 + QH^2 = OQ^2$, откуда

$$(12 - 5x)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 122x + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 2,88. \end{cases} \quad (12 - 5x)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \Leftrightarrow$$

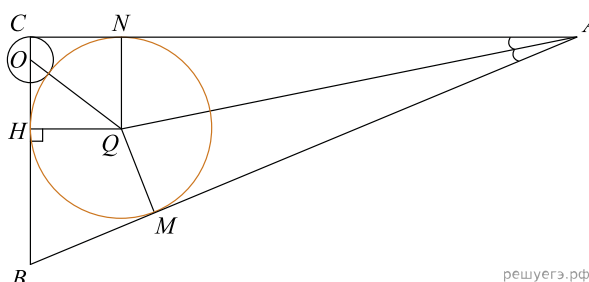
$$\Leftrightarrow 25x^2 - 122x + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 2,88. \end{cases}$$

Условию $12 - 5x > 0$ удовлетворяет только $x = 2$.

Ответ: 2.

Примечание.

Заметим, что радиус окружности, вписанной в данный треугольник также равен 2. Это означает, что большая окружность в действительности является вписанной в треугольник и касается катета BC . Это не влияет на правильность проведенных вычислений.



Приведем решение пункта а) Ивана Иванова (Владивосток).

По теореме Пифагора находим $AB=13$. Далее $OQ = \frac{1}{2} + x$, $OH = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. По теореме Пифагора в треугольнике QOH :

$$QH = \sqrt{OQ^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2x}.$$

Пусть $QH = y$, тогда $x = \frac{y^2}{2}$. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников BQC , AQC и AQB . Выразим площадь:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot QH + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot QN + \frac{1}{2} \cdot AB \cdot QM = \frac{5}{2} \cdot y + \frac{25}{2} \cdot x.$$

Приравнявая эти выражения, получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \cdot y + \frac{25}{2} \cdot x = 30 &\Leftrightarrow \frac{5}{2} \cdot y + \frac{25}{4} \cdot y^2 - 30 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow_{y>0} y = 2, \quad \frac{5}{2} \cdot y + \frac{25}{2} \cdot x = 30 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \cdot y + \frac{25}{4} \cdot y^2 - 30 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5y^2 + 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow_{y>0} y = 2, \end{aligned}$$

следовательно, $x = \frac{4}{2} = 2$. Найденное значение радиуса второй окружности удовлетворяет условию пункта а) задачи, тем самым доказывая утверждение «радиус второй окружности меньше чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC ».

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точки $a = 0$	3
В решении верно найдены корни $x = 1$ при $a \leq 2$ и $x = 1 - \sqrt{1-a}$ при $a \leq 0$, возможно с учётом принадлежности корня указанному отрезку: $x = 0$ при $a = 0$ ИЛИ верно пройдены все этапы решения, но неверно найдены граничные точки множества значений a из-за вычислительной ошибки	2
В решении верно найден один из корней $x = 1$ при $a \leq 2$ или $x = 1 - \sqrt{1-a}$ при $a \leq 0$, возможно с учётом принадлежности корня указанному отрезку: $x = 0$ при $a = 0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $(x-1)(x+\sqrt{2x-a}) = 0$. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x-1=0$ при условии $2x \geq a$, тогда $x=1$.

Условие принимает вид $2 \geq a$, откуда $a \leq 2$. То есть в этом случае $x=1$ при $a \leq 2$.

Второй случай: $x+\sqrt{2x-a}=0$. Получаем $x=-\sqrt{2x-a} \leq 0$; $x \leq 0$.

Значит, это уравнение может иметь корень на отрезке $[0; 1]$, только если $x = 0$ при $a = 0$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$ при $a < 0$ и $0 < a \leq 2$.

Ответ: $a < 0$; $0 < a \leq 2$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть число a_i уменьшили на 2. Тогда его уменьшили на $\frac{2}{a_i} \cdot 100 = \frac{200}{a_i} \%$. Следовательно, $r_i = \frac{200}{a_i}$. Поскольку $a_i \geq 50$ для всех i , то $r_i \leq 4$ и их среднее арифметическое также не превосходит 4. Поэтому оно не может равняться 5.

б) Рассмотрим два числа: 50 и 150. Если число 50 уменьшить на 2 (то есть на 4%), а число 150 уменьшить на 2% (то есть на 3), то $r_1 = 4$ и $r_2 = 2$. Их среднее арифметическое равно 3, что больше 2. При этом сумма чисел уменьшилась на 5, что больше, чем $2n = 4$.

в) Пусть k чисел из 30 уменьшили на 2, а остальные $30 - k$ уменьшили на 2%. Поскольку каждое число не меньше 50, каждое из чисел уменьшили по крайней мере на 1 (2% от 50 равно 1). Таким образом, сумму всех тридцати чисел уменьшили по крайней мере на $2k + 30 - k = k + 30$. По условию, сумму уменьшили ровно на 40. Следовательно, $k + 30 \leq 40$, откуда $k \leq 10$.

Напомним, что если число a_i уменьшили на 2, то его уменьшили на $r_i = \frac{200}{a_i} \%$; и поскольку $a_i \geq 50$, то $r_i \leq 4$. Значит,

$$\frac{r_1 + \dots + r_{30}}{30} \leq \frac{4k + 2(30 - k)}{30} = \frac{2k + 60}{30} \leq \frac{2 \cdot 10 + 60}{30} = \frac{8}{3}.$$

Приведём пример набора из 30 чисел, для которого среднее арифметическое чисел $r_1, \dots, r_{30}$ равно $\frac{8}{3}$. Пусть все числа равны 50, и пусть 10 из этих чисел уменьшили на 2 (то есть на 4%), а

каждое из оставшихся двадцати чисел уменьшили на 2%. Тогда

$$\frac{r_1 + \dots + r_{30}}{30} = \frac{10 \cdot 4 + 20 \cdot 2}{30} = \frac{8}{3}.$$

Ответ: а) нет; б) да; в) $\frac{8}{3}$.
