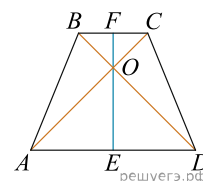


## Вариант 225

№ 1.

В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите ее среднюю линию.

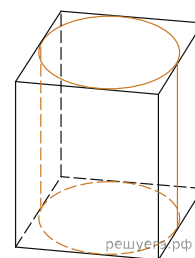


**№ 2.**

Даны векторы  $\vec{a} = (1; 2)$ ,  $\vec{b} = (-3; 6)$  и  $\vec{c} = (4; -2)$ . Найдите длину вектора  $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

**№ 3.**

Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Площадь боковой поверхности призмы равна 48. Найдите высоту цилиндра.



**№ 4.**

В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос о Великой Отечественной войне. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос о Великой Отечественной войне.

**№ 5.**

Агрофирма закупает куриные яйца только в двух домашних хозяйствах. Известно, что 5% яиц из первого хозяйства— яйца высшей категории, а из второго хозяйства— 30% яиц высшей категории. В этой агрофирме 15% яиц высшей категории. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

**№ 6.**

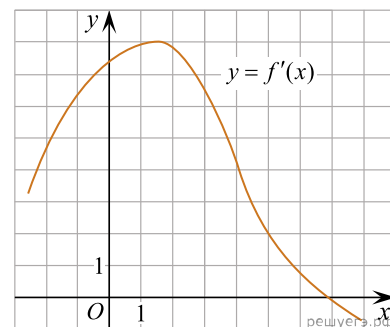
Найдите корень уравнения  $\frac{1}{7x+3} = 5$ .

**№ 7.**

Найдите  $9 \cos 2\alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .

**№ 8.**

На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 2x - 2$  или совпадает с ней.



**№ 9.**

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон  $pV^k = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$ , где  $p$  — давление газа в паскалях,  $V$  — объем газа в кубических метрах,  $k = \frac{5}{3}$ . Найдите, какой объем  $V$  (в куб. м) будет занимать газ при давлении  $p$ , равном  $3,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

**№ 10.**

Расстояние между городами  $A$  и  $B$  равно 470км. Из города  $A$  в город  $B$  выехал первый автомобиль, а через 3часа после этого навстречу ему из города  $B$  выехал со скоростью 60км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350км от города  $A$ . Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображен график функции вида  $f(x) = a^x$ . Найдите значение  $f(4)$ .

□

**№ 12.**

Найдите наименьшее значение функции  $y = 9\cos x + 14x + 7$  на отрезке  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

**№ 13.**

а) Решите уравнение  $4\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos 2x + 3\cos x = 2\sqrt{3}$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

**№ 14.**

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $K$  — середина ребра  $AB$ , точка  $E$  лежит на ребре  $CD$  и  $EC:ED = 1:2$ .

- а) Найдите угол между прямыми  $BC$  и  $KE$ .
- б) Найдите расстояние между прямыми  $BC$  и  $KE$ , если ребро тетраэдра равно  $\sqrt{6}$ .

**№ 15.**

Решите неравенство:  $\frac{4\log_2(x+0,5)}{5^{1-\sqrt{x}}-1} \leq 5^{\sqrt{x}}\log_2(x+0,5).$

**№ 16.**

Георгий взял кредит в банке на сумму 804000 рублей. Схема выплата кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10процентов оставшуюся сумму долга, а затем Георгий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Георгий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно вдвое меньше предыдущего. Какую сумму Георгий заплатил в третий раз? Ответ дайте в рублях.

**№ 17.**

Первая окружность проходит через вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  и пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Вторая окружность проходит через точки  $D$  и  $E$  и пересекает продолжения сторон  $BC$  и  $AC$  за вершину  $C$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.

а) Докажите, что прямая  $MN$  параллельна прямой  $AB$ .

б) Прямые  $MD$  и  $NE$  вторично пересекают первую окружность в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Найдите ее радиус, если  $AX = XY = 2$ , а  $AB = 4$ .

**№ 18.**

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множество значений функции  $y = \frac{\sqrt{a+1} - 2\cos 3x + 1}{\sin^2 3x + a + 2\sqrt{a+1} + 2}$  содержит отрезок  $[2; 3]$ .

**№ 19.**

Натуральные числа  $a, b, c$  и  $d$  удовлетворяют условию  $a > b > c > d$ .

а) Найдите числа  $a, b, c$  и  $d$ , если  $a + b + c + d = 15$  и  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 19$ .

б) Может ли быть  $a + b + c + d = 23$  и  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 23$ ?

в) Пусть  $a + b + c + d = 1200$  и  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1200$ . Найдите количество возможных значений числа  $a$ .

# Ответы

| Номер | Задание                | Ответ  |
|-------|------------------------|--------|
| 1     | <a href="#">27844</a>  | 12     |
| 2     | <a href="#">644850</a> | 10     |
| 3     | <a href="#">245354</a> | 3      |
| 4     | <a href="#">504230</a> | 0,26   |
| 5     | <a href="#">320751</a> | 0,6    |
| 6     | <a href="#">504427</a> | -0,4   |
| 7     | <a href="#">26794</a>  | -7     |
| 8     | <a href="#">40130</a>  | 5      |
| 9     | <a href="#">27990</a>  | 0,125  |
| 10    | <a href="#">99591</a>  | 70     |
| 11    | <a href="#">639480</a> | 0,0625 |
| 12    | <a href="#">26696</a>  | 16     |

## № 13.

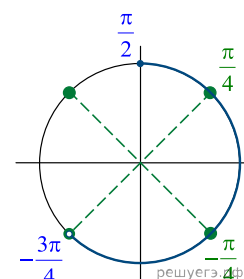
| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                | Баллы |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.                                                                                                                                                   | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а),<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б). | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                                  | 0     |
| <b>Максимальный балл</b>                                                                                                                                                                              | 2     |

**Решение.** а) Для квадратов синуса и косинуса применим в левой части формулу суммы кубов:

$$\begin{aligned}\cos^6 x + \sin^6 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = \\ &= 1 \cdot ((\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 3\cos^2 x \sin^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \sin^2 2x &\Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \quad 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \sin^2 2x \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \quad 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \sin^2 2x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$



б) Отберём корни при помощи единичной окружности. Подходят  $\pm \frac{\pi}{4}$ .

Ответ: а)  $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; б)  $\pm \frac{\pi}{4}$ .

# № 14.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                                            | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                                                                                                                                | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br><br>ИЛИ<br><br>имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                              | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а)<br><br>ИЛИ<br><br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br><br>ИЛИ<br><br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                                 | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3     |

**Решение.** а) Проведем через точку  $K$  прямую  $KL$ , параллельную  $BC$ , где точка  $L$  лежит на  $AC$ .  $KL$  — средняя линия треугольника  $ABC$ . Угол между прямыми  $KE$  и  $BC$  равен углу  $EKL$ , найдем его из треугольника  $KEL$ . Пусть  $O$  — проекция вершины  $D$ ,  $E$  — проекция точки  $E$  на прямую  $KC$  и пусть ребро тетраэдра равно  $a$ . Тогда  $KL = \frac{a}{2}$ ,

$$EL^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{9} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{36},$$

откуда  $EL = \frac{a\sqrt{7}}{6}$ .

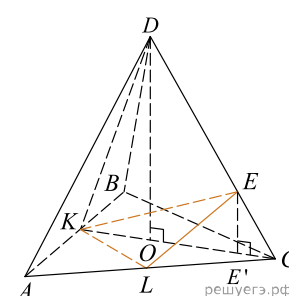
Вычислим высоту тетраэдра:  $DO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ ,  $EE' = \frac{1}{3}DO = \frac{a\sqrt{6}}{9}$ ,

$$KE' = KC - CE' = KC - \frac{2}{9}KC = \frac{7a\sqrt{3}}{18},$$

$$KE^2 = \frac{49 \cdot 3a^2}{324} + \frac{6a^2}{81} = \frac{19a^2}{36},$$

а значит,  $KE = \frac{a\sqrt{19}}{6}$ .

Косинус угла  $EKL$  найдем, применяя теорему косинусов:



$$\frac{7a^2}{36} = \frac{19a^2}{36} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{19}}{6} \cdot \frac{a}{2} \cos \angle EKL \Leftrightarrow \cos \angle EKL = \frac{7}{2\sqrt{19}}.$$

Таким образом,  $\angle EKL = \arccos \frac{7}{2\sqrt{19}} = \arccos \frac{7\sqrt{19}}{38}$ .

б) Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от одной из них до плоскости, параллельной ей и проходящей через другую прямую. Таким образом, искомое расстояние между прямыми  $BC$  и  $KE$  равно расстоянию между точкой  $C$  и плоскостью  $KEL$  (плоскость  $KEL$  — проходит через прямые  $KE$  и  $KL$ , где прямая  $KL$  параллельна  $BC$ ). То есть искомое расстояние — высота  $h_c$  тетраэдра  $CKEL$ , проведенная из вершины  $C$ .

Вычислим объем тетраэдра  $CKEL$ :

$$EE' = \frac{2}{3},$$

$$S_{CKL} = \frac{1}{2} S_{CAK} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

$$V_{CKEL} = \frac{1}{3} EE' \cdot S_{CKL} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

С другой стороны,  $V_{CKEL} = \frac{1}{3} h_c \cdot S_{KEL}$ , где

$$\sin \angle KEL = \sqrt{1 - \cos^2 \angle EKL} = \sqrt{1 - \frac{49}{4 \cdot 19}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}},$$

$$S_{KEL} = \frac{1}{2} KE \cdot KL \cdot \sin \angle EKL = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{19}}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Итак,

$$h_c = \frac{3V_{CKEL}}{S_{KEL}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{12}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: а)  $\arccos \frac{7\sqrt{19}}{38}$ ; б)  $\frac{2}{3}$ .

## № 15.

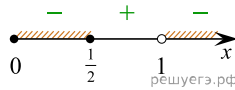
| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                       | Баллы |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                             | 2     |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек,<br><br>ИЛИ<br><br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                                         | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                            | 2     |

**Решение.** Разложим на множители разность левой и правой частей неравенства:

$$\begin{aligned}
& \frac{4 \log_2(x+0,5)}{5^{1-\sqrt{x}}-1} - 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) = \log_2(x+0,5) \left( \frac{4}{5^{1-\sqrt{x}}-1} - 5^{\sqrt{x}} \right) = \\
& = \log_2(x+0,5) \left( \frac{4 \cdot 5^{\sqrt{x}}}{5-5^{\sqrt{x}}} - 5^{\sqrt{x}} \right) = 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) \left( \frac{4}{5-5^{\sqrt{x}}} - 1 \right) = 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) \frac{5^{\sqrt{x}}-1}{5-5^{\sqrt{x}}} \cdot \frac{4 \log_2(x+0,5)}{5^{1-\sqrt{x}}-1} - 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) = \\
& = \log_2(x+0,5) \left( \frac{4}{5^{1-\sqrt{x}}-1} - 5^{\sqrt{x}} \right) = \log_2(x+0,5) \left( \frac{4 \cdot 5^{\sqrt{x}}}{5-5^{\sqrt{x}}} - 5^{\sqrt{x}} \right) = \\
& = 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) \left( \frac{4}{5-5^{\sqrt{x}}} - 1 \right) = 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) \frac{5^{\sqrt{x}}-1}{5-5^{\sqrt{x}}} \cdot \frac{4 \log_2(x+0,5)}{5^{1-\sqrt{x}}-1} - 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) = \\
& = \log_2(x+0,5) \left( \frac{4}{5^{1-\sqrt{x}}-1} - 5^{\sqrt{x}} \right) = \\
& = \log_2(x+0,5) \left( \frac{4 \cdot 5^{\sqrt{x}}}{5-5^{\sqrt{x}}} - 5^{\sqrt{x}} \right) = \\
& = 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) \left( \frac{4}{5-5^{\sqrt{x}}} - 1 \right) = 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) \frac{5^{\sqrt{x}}-1}{5-5^{\sqrt{x}}} \cdot \frac{4 \log_2(x+0,5)}{5^{1-\sqrt{x}}-1} - 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) = \\
& = \log_2(x+0,5) \left( \frac{4}{5^{1-\sqrt{x}}-1} - 5^{\sqrt{x}} \right) = \\
& = \log_2(x+0,5) \left( \frac{4 \cdot 5^{\sqrt{x}}}{5-5^{\sqrt{x}}} - 5^{\sqrt{x}} \right) = \\
& = 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) \left( \frac{4}{5-5^{\sqrt{x}}} - 1 \right) = \\
& = 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) \frac{5^{\sqrt{x}}-1}{5-5^{\sqrt{x}}}.
\end{aligned}$$

Областью определения выражения  $5^{\sqrt{x}}$  является множество неотрицательных чисел. На этом множестве определено и выражение  $\log_2(x+0,5)$ . На области определения выражение  $5^{\sqrt{x}}$  положительно, а потому на него можно разделить, не меняя знака неравенства. Применим метод рационализации:

$$\begin{aligned}
\log_2(x+0,5) \cdot \frac{5^{\sqrt{x}}-5^0}{5^{1-\sqrt{x}}-1} \leq 0 & \Leftrightarrow (2-1)(x+0,5-1) \frac{(5-1)(\sqrt{x}-0)}{(5-1)(1-\sqrt{x})} \leq 0 \Leftrightarrow (x-0,5) \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \leq 0. \log_2(x+0,5) \cdot \frac{5^{\sqrt{x}}-5^0}{5^{1-\sqrt{x}}-1} \leq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (2-1)(x+0,5-1) \frac{(5-1)(\sqrt{x}-0)}{(5-1)(1-\sqrt{x})} \leq 0 \Leftrightarrow (x-0,5) \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \leq 0. \log_2(x+0,5) \cdot \frac{5^{\sqrt{x}}-5^0}{5^{1-\sqrt{x}}-1} \leq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (2-1)(x+0,5-1) \frac{(5-1)(\sqrt{x}-0)}{(5-1)(1-\sqrt{x})} \leq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (x-0,5) \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \leq 0.
\end{aligned}$$



Методом интервалов (см. рис.), учитывая, что  $x \geq 0$ , находим ответ:  $0 \leq x \leq 0,5$  или  $x > 1$ .

Ответ:  $[0; 0,5] \cup (1; +\infty)$ .

**Приведем другое решение.**

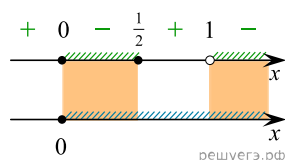
Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned}
\frac{4 \log_2(x+0,5)}{5^{1-\sqrt{x}}-1} \leq 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) & \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5)}{5-5^{\sqrt{x}}} \leq 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) \Leftrightarrow \frac{4 \log_2(x+0,5)}{5^{1-\sqrt{x}}-1} \leq 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5)}{5-5^{\sqrt{x}}} \leq 5^{\sqrt{x}} \log_2(x+0,5) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \frac{4 \log_2(x+0,5)}{5-5^{\sqrt{x}}} \leq \log_2(x+0,5) \Leftrightarrow \frac{\log_2(x+0,5) \cdot (5^{\sqrt{x}}-1)}{5-5^{\sqrt{x}}} \leq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \frac{\log_2(x+0,5) \cdot (5^{\sqrt{x}}-5^0)}{5^{1-\sqrt{x}}-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(x+0,5) \cdot (\sqrt{x}-0)}{1-\sqrt{x}} \leq 0 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \log_2(x+0,5)}{1-\sqrt{x}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(\log_2(x+0,5) - \log_2 1)}{\sqrt{1}-\sqrt{x}} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x+0,5-1)}{1-x} \leq 0, \\ x+0,5 > 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x-0,5)}{1-x} \leq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 0,5, \\ x > 1, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 0,5, \\ x > 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x+0,5-1)}{1-x} \leq 0, \\ x+0,5 > 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x-0,5)}{1-x} \leq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 0,5, \\ x > 1, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 0,5, \\ x > 1. \end{cases}$$



Ответ:  $[0; 0,5] \cup (1; +\infty)$ .

#### № 16.

| Критерии оценивания выполнения задания                              | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                    | 2     |
| Верно построена математическая модель                               | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0     |
| Максимальный балл                                                   | 2     |

**Решение.** Обозначим исходную сумму 804000 рублей через  $S$ , а третий платеж Георгия через  $x$  рублей. Тогда первые два платежа составляли  $4x$  и  $2x$  рублей соответственно.

В конце первого года долг Георгия после его платежа составлял  $(1,1S - 4x)$  рублей; в конце второго года —  $((1,1S - 4x) \cdot 1,1 - 2x)$  рублей, а в конце третьего —  $((1,1S - 4x) \cdot 1,1 - 2x) \cdot 1,1 - x$  рублей, что составило 0 рублей, поскольку за три года кредит был погашен полностью. Имеем уравнение:

$$\begin{aligned} ((1,1S - 4x) \cdot 1,1 - 2x) \cdot 1,1 - x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1,21S - 6,4x) \cdot 1,1 - x &= 0 \Leftrightarrow 1,331S = 8,04x \Leftrightarrow x = \frac{1331}{8040}S. \quad ((1,1S - 4x) \cdot 1,1 - 2x) \cdot 1,1 - x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1,21S - 6,4x) \cdot 1,1 - x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1,331S = 8,04x \Leftrightarrow x &= \frac{1331}{8040}S. \end{aligned}$$

Подставляя в это выражение  $S = 804\,000$ , получаем  $x = 133\,100$  рублей.

Ответ: 133 100 руб.

№ 17.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                                             | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                                                                                                                                | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br><br>ИЛИ<br><br>имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                              | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а),<br><br>ИЛИ<br><br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br><br>ИЛИ<br><br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                                  | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 3     |

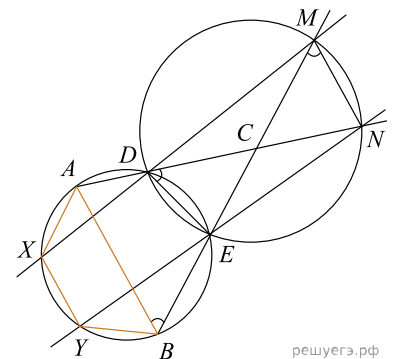
**Решение.** а) Заметим, что углы  $CDE$  и  $CMN$  равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу. По свойству смежных углов

$$\angle CDE = 180^\circ - \angle ADE = 180^\circ - (180^\circ - \angle ABE) = \angle ABE.$$

Отсюда получаем, что прямые  $MN$  и  $AB$  параллельны между собой. Что и требовалось доказать.

б) Заметим, что

$$\angle DMN = 180^\circ - \angle DEN = \angle DEY = 180^\circ - \angle DXY.$$



Значит, по признаку параллельности прямые  $MN$  и  $XY$  параллельны. Тогда четырехугольник  $AXYB$  трапеция, вписанная в окружность. Следовательно,  $AX = YB = 2$ .

В равнобокой трапеции  $AXYB$  проведем высоту  $XH$ , найдем  $AH = \frac{4-2}{2} = 1$ . Значит,  $\angle XAH = 60^\circ$ . По теореме Пифагора получаем, что  $XH = \sqrt{3}$  и  $XB = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$ . По теореме синусов

$$2R = \frac{XB}{\sin \angle A} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4,$$

отсюда  $R = 2$ .

Ответ: б) 2.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                            | Баллы |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ.                                                                                 | 4     |
| С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но решение недостаточно обосновано.         | 3     |
| С помощью верного рассуждения получен промежуток, содержащий верный ответ, либо содержащийся в верном промежутке. | 2     |
| Задача сведена к исследованию взаимного расположения частей двух парабол.                                         | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                              | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                 | 4     |

**Решение.** Пусть  $t = \cos 3x$ , тогда  $\sin^2 3x = 1 - t^2$ , причем  $-1 \leq t \leq 1$ . Пусть, далее,  $\sqrt{a+1} = b$ , тогда  $b \geq 0$  и  $a + 1 + 2\sqrt{a+1} + 1 = b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$ . Обозначим, наконец,  $c = b + 1$ , и заметим, что в силу неотрицательности  $b$  справедливо неравенство  $c \geq 1$ . Исходная задача свелась к следующей: необходимо найти все значения параметра  $c$ , при каждом из которых множество значений функции  $h(t) = \frac{-2t+c}{-t^2+1+c^2}$  при  $-1 \leq t \leq 1$  содержит отрезок  $[2; 3]$ .

Заметим, что разность  $1 - t^2$  неотрицательна при  $-1 \leq t \leq 1$ , а значит, знаменатель дроби не меньше 1. Следовательно, функция  $h(t)$  непрерывна, а тогда отрезок  $[2; 3]$  лежит во множестве ее значений тогда и только тогда, когда уравнения  $h(t) = 2$  и  $h(t) = 3$  имеют решения, удовлетворяющие условию  $-1 \leq t \leq 1$ .

Рассмотрим эти уравнения:

$$\frac{-2t+c}{-t^2+1+c^2} = 2 \Leftrightarrow 2t^2 - 2t - (2c^2 - c + 2) = 0,$$

$$\frac{-2t+c}{-t^2+1+c^2} = 3 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - (3c^2 - c + 3) = 0.$$

Поскольку  $c \geq 1$ , справедливы оценки:  $2c^2 - c + 2 = c(2c - 1) + 2 \geq 3$ ,  $3c^2 - c + 3 = c(3c - 1) + 3 \geq 5$ . Тем самым, свободные члены квадратных трехчленов  $p(t) = 2t^2 - 2t - (2c^2 - c + 2)$ , и  $q(t) = 3t^2 - 2t - (3c^2 - c + 3)$  отрицательны, а значит, их графики пересекают ось ординат в точках с отрицательной абсциссой. Ветви соответствующих парабол направлены вверх, их вершины лежат ниже оси абсцисс на прямых  $t = \frac{1}{2}$  и  $t = \frac{1}{3}$  соответственно. Из этого следует, что указанные параболы будут пересекать отрезок  $[-1; 1]$  оси абсцисс хотя бы в одной точке тогда и только тогда, когда  $p(-1) \geq 0$  и  $q(-1) \geq 0$  одновременно. Имеем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2+2-(2c^2-c+2) \geq 0, \\ 3+2-(3c^2-c+3) \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2-c-2 \leq 0, \\ 3c^2-c-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2-c-2 \leq 0, \\ -\frac{2}{3} \leq c \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2-c-2 \leq 0, \\ c \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2-(2c^2-c+2) \geq 0, \\ 3+2-(3c^2-c+3) \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2-c-2 \leq 0, \\ -\frac{2}{3} \leq c \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2-c-2 \leq 0, \\ c \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2-c-2 \leq 0, \\ c \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2-c-2 \leq 0, \\ c \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда  $b = 0$ , откуда  $a = -1$ .

Ответ:  $a = -1$ .

**№ 19.**

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                        | Баллы    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.                                                                                                                                         | 4        |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.                                                                                                                                     | 3        |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.                                                                                                                                     | 2        |
| Верно получен один из следующих результатов:<br><br>— обоснованное решение в п. а;<br><br>— пример в п. б;<br><br>— искомая оценка в п. в;<br><br>— пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки. | 1        |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                                          | 0        |
| <b>Максимальный балл</b>                                                                                                                                                                                      | <b>4</b> |

**Решение.** а) Из условия получаем:

$$\begin{aligned}
 a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - a - b - c - d = 4 &\Leftrightarrow (a-b)(a+b) + (c-d)(c+d) - a - b - c - d = 4 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - a - b - c - d = 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (a-b)(a+b) + (c-d)(c+d) - a - b - c - d = 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (a-b-1)(a+b) + (c-d-1)(c+d) = 4.
 \end{aligned}$$

Поскольку  $a+b+c+d = 15 > 4$ , получаем:  $a = b+1$  или  $c = d+1$ .

В первом случае из равенства  $(c-d-1)(c+d) = 4$  находим  $c+d=4$  и  $c-d-1=1$ , откуда получаем:  $a=6$ ,  $b=5$ ,  $c=3$  и  $d=1$ .

Второй случай не реализуется, поскольку  $a+b > \frac{15}{2}$ , а  $(a-b-1)(a+b) = 4$ .

б) Из условия получаем:

$$\begin{aligned}
 a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = a+b+c+d &\Leftrightarrow (a-b)(a+b) + (c-d)(c+d) = a+b+c+d \Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = a+b+c+d \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (a-b)(a+b) + (c-d)(c+d) = a+b+c+d \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (a-b-1)(a+b) + (c-d-1)(c+d) = 0.
 \end{aligned}$$

Поскольку  $a > b$ , получаем, что  $a \geq b+1$ , то есть  $a-b-1 \geq 0$ ,  $a+b > 0$ . Аналогично  $c-d-1 \geq 0$ ,  $c+d > 0$ , последнее равенство выполняется только при  $a=b+1$  и  $c=d+1$ . Значит,  $2b+2d+2=23$ , что невозможно.

в) Из равенства  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = a+b+c+d$  получаем:  $a = b+1$ ,  $c = d+1$ . Значит,  $2a+2d=1200$ ,  $d=600-a$ . Получаем четвёрку чисел  $(a, b, c, d) = (a, a-1, 601-a, 600-a)$ . Поскольку  $b > c$ , получаем:  $a > 301$ . Кроме того,  $d > 0$ , откуда  $a < 600$ .

Значит,  $a$  принадлежит промежутку  $(301; 600)$ . Более того, для любого целого  $a$  из этого промежутка найденная четвёрка чисел удовлетворяет условию задачи. Таким образом,  $a$  может принимать 298 значений.

Ответ: а)  $a = 6$ ,  $b = 5$ ,  $c = 3$ ,  $d = 1$ ; б) нет; в) 298.

---