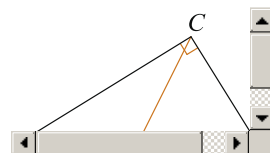


Вариант 226

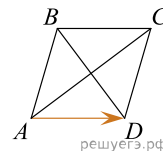
№ 1.

В треугольнике ABC угол ACB равен 90° , угол B равен 58° , CD — медиана. Найдите угол ACD . Ответ дайте в градусах.



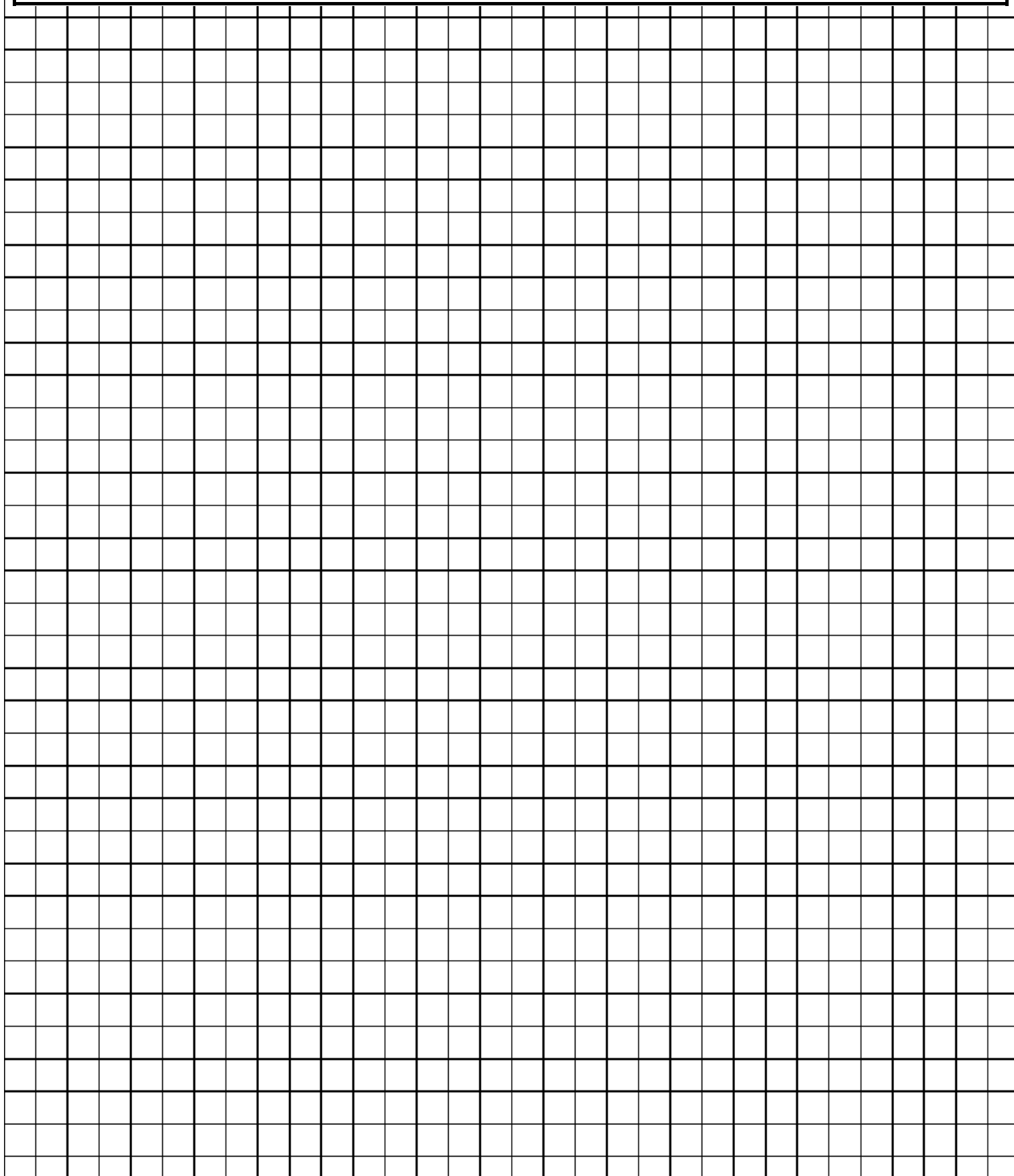
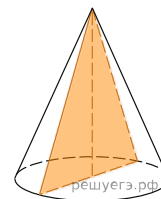
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AD}$.



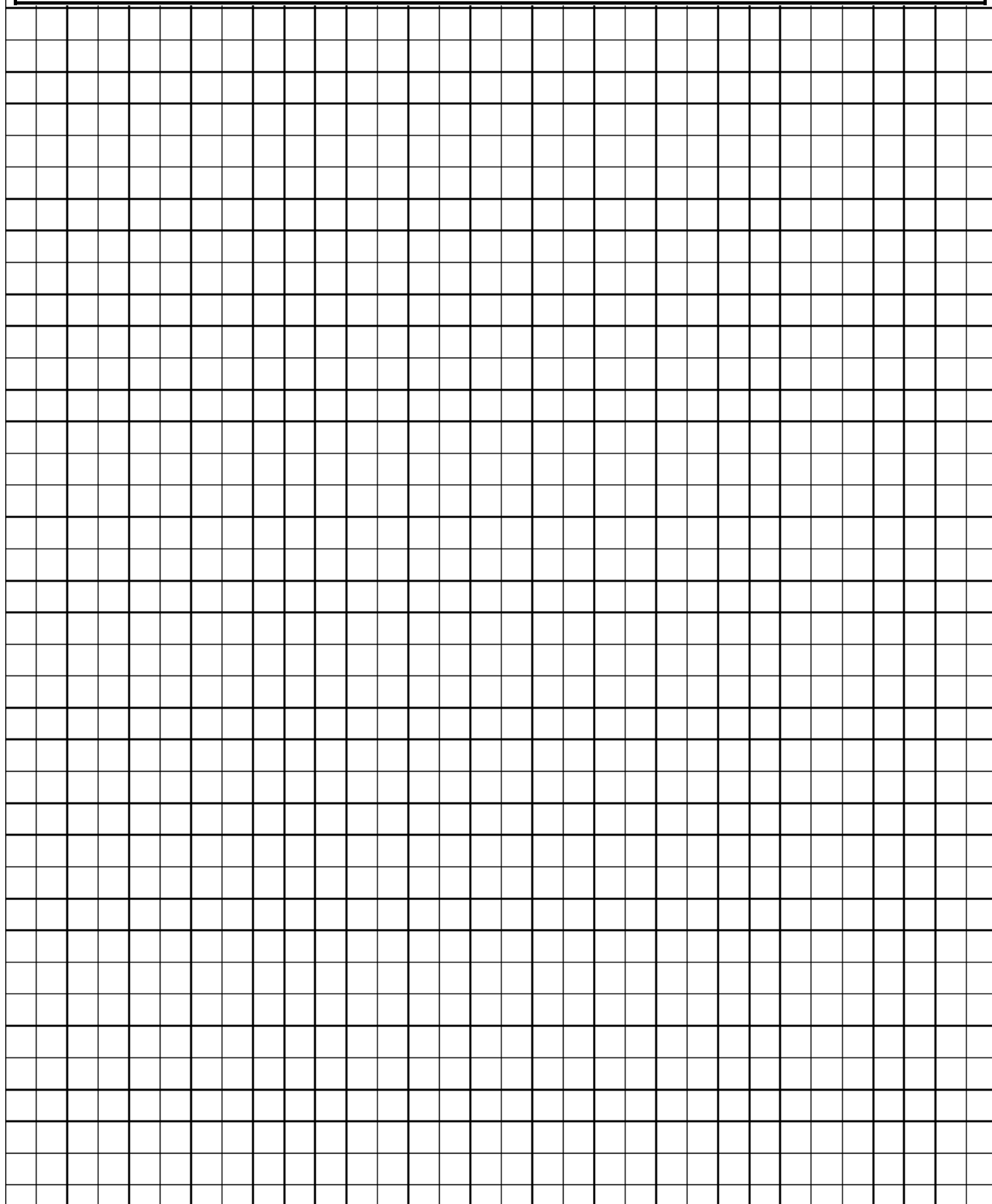
№ 3.

Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей— 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



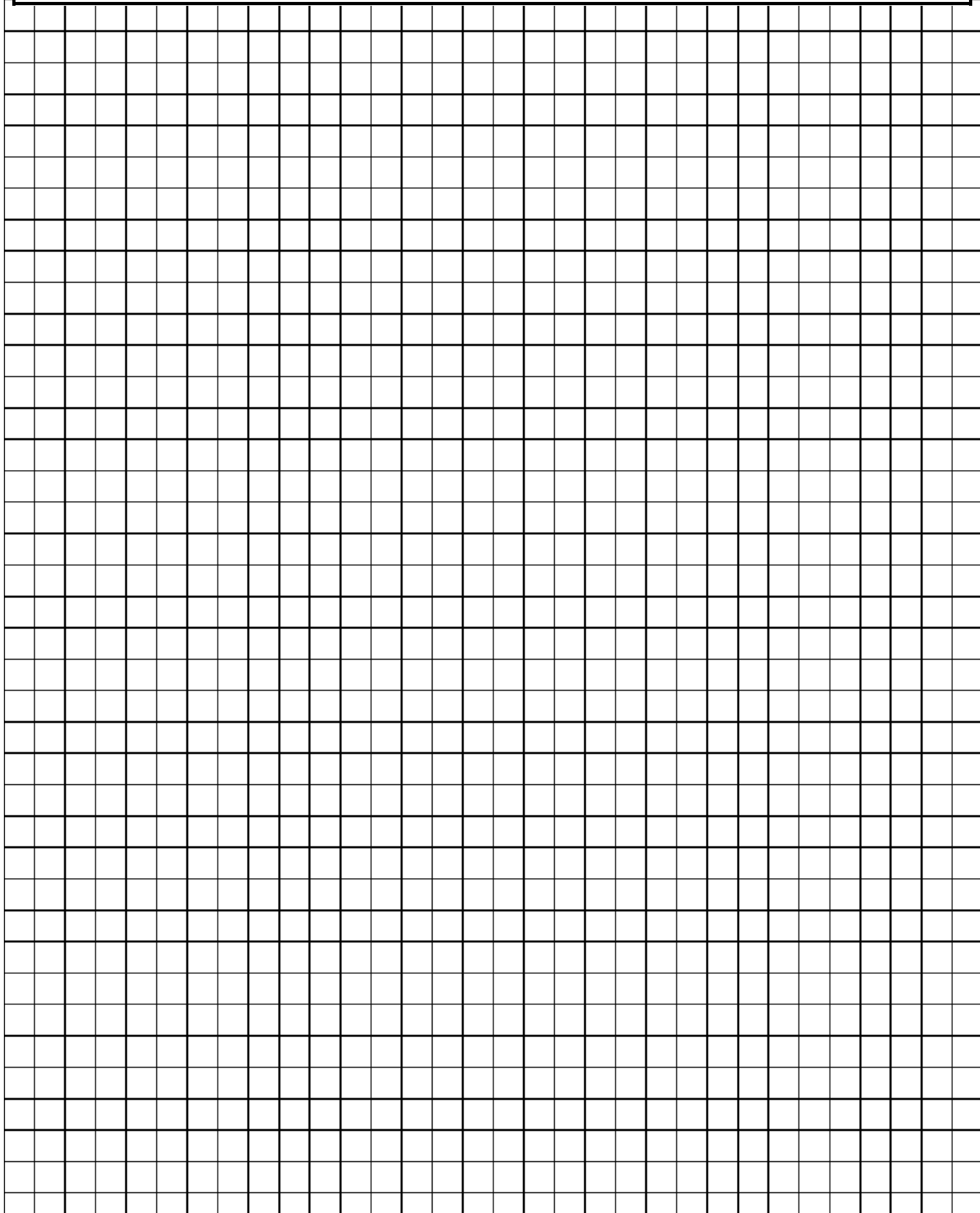
№ 4.

У Дины в копилке лежит 7 рублёвых, 5 двухрублёвых, 6 пятирублёвых и 2 десятирублёвых монеты. Дина наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит менее 60 рублей.



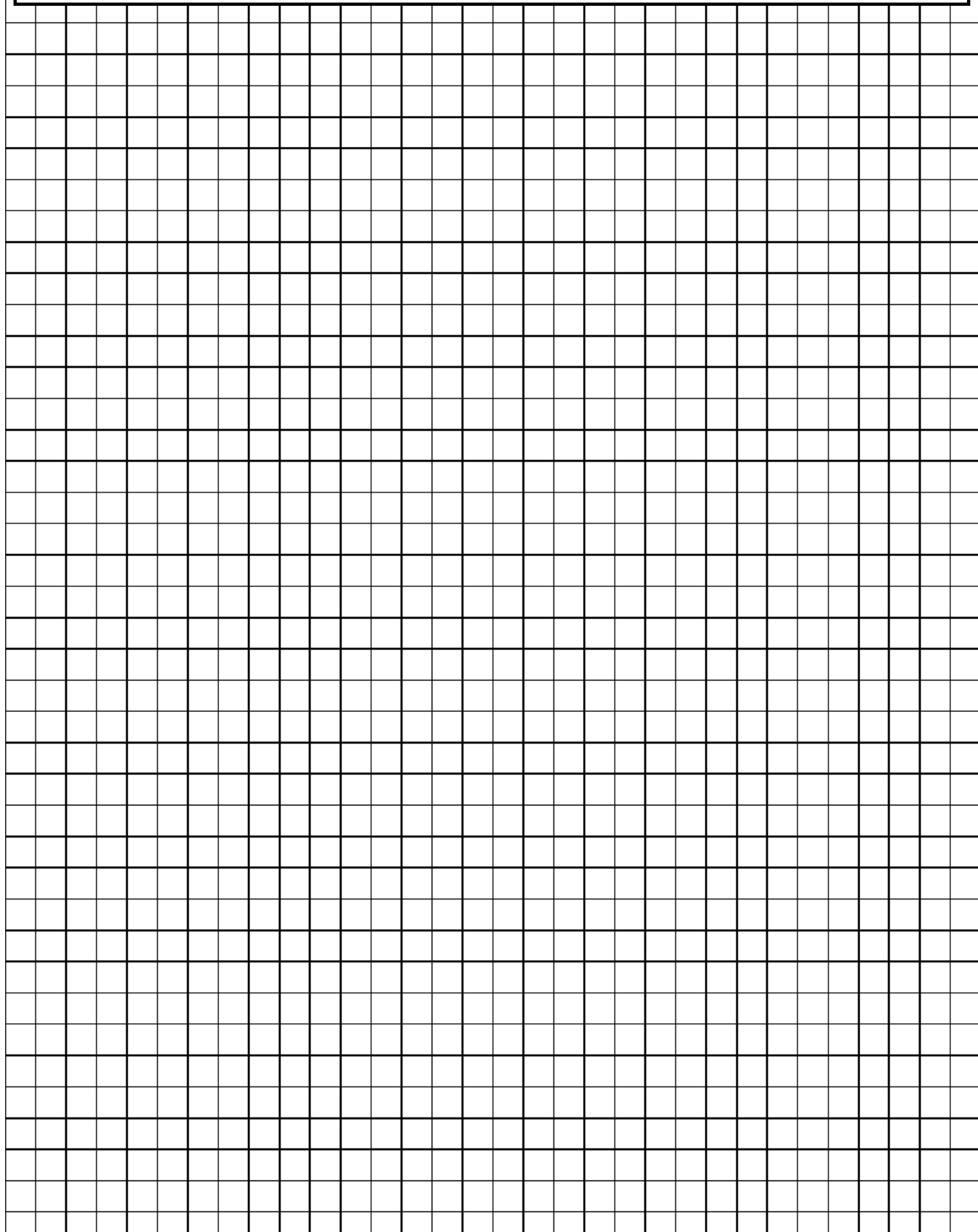
№ 5.

В коробке 7 красных и 3 синих шара. Случайным образом из коробки извлекают 5 шаров. Какова вероятность события «среди извлеченных не более 3 красных шаров»?



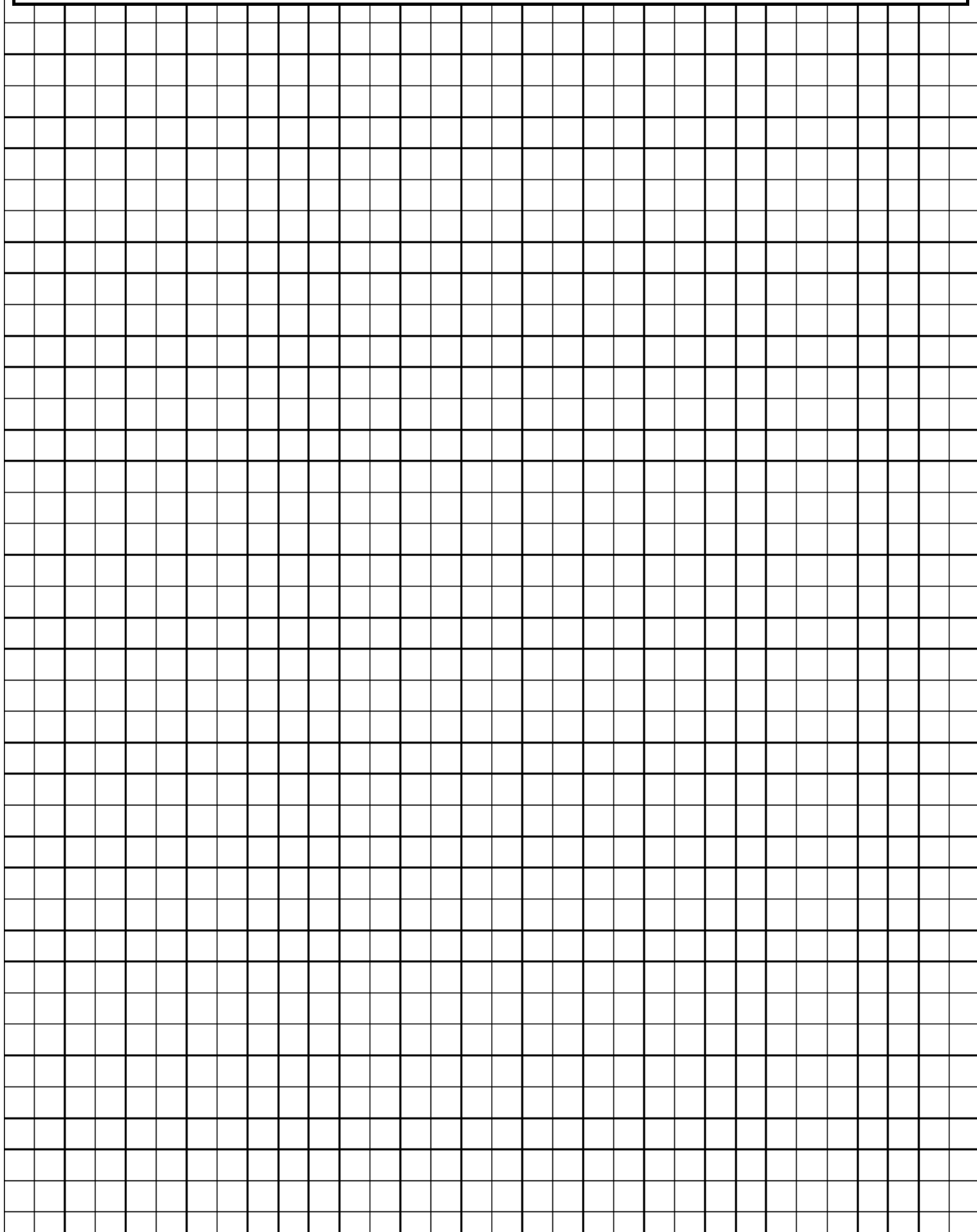
№ 6.

Решите уравнение $(x - 6)^2 = -24x$.



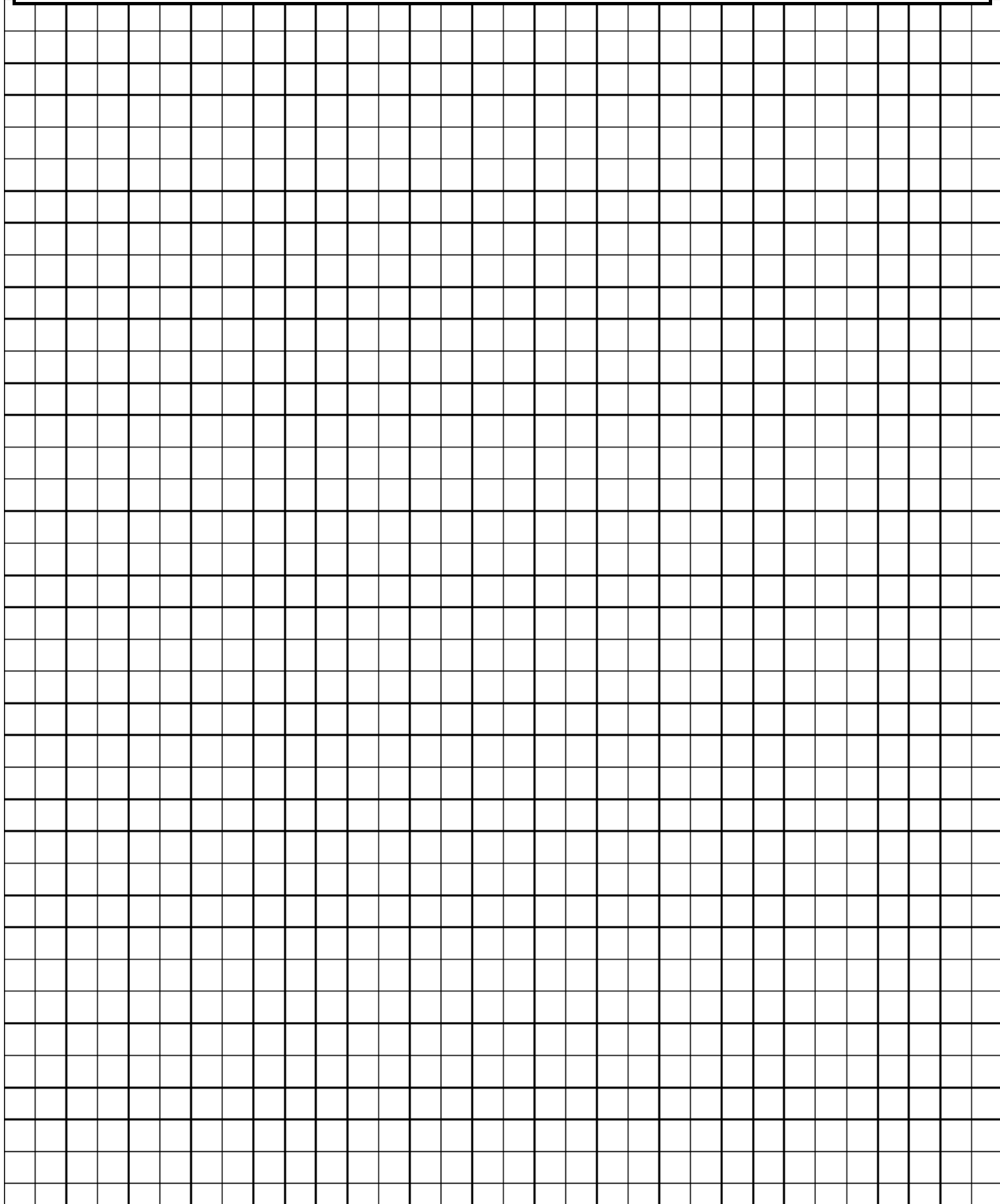
№ 7.

Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\operatorname{tg}(-300^\circ)$.



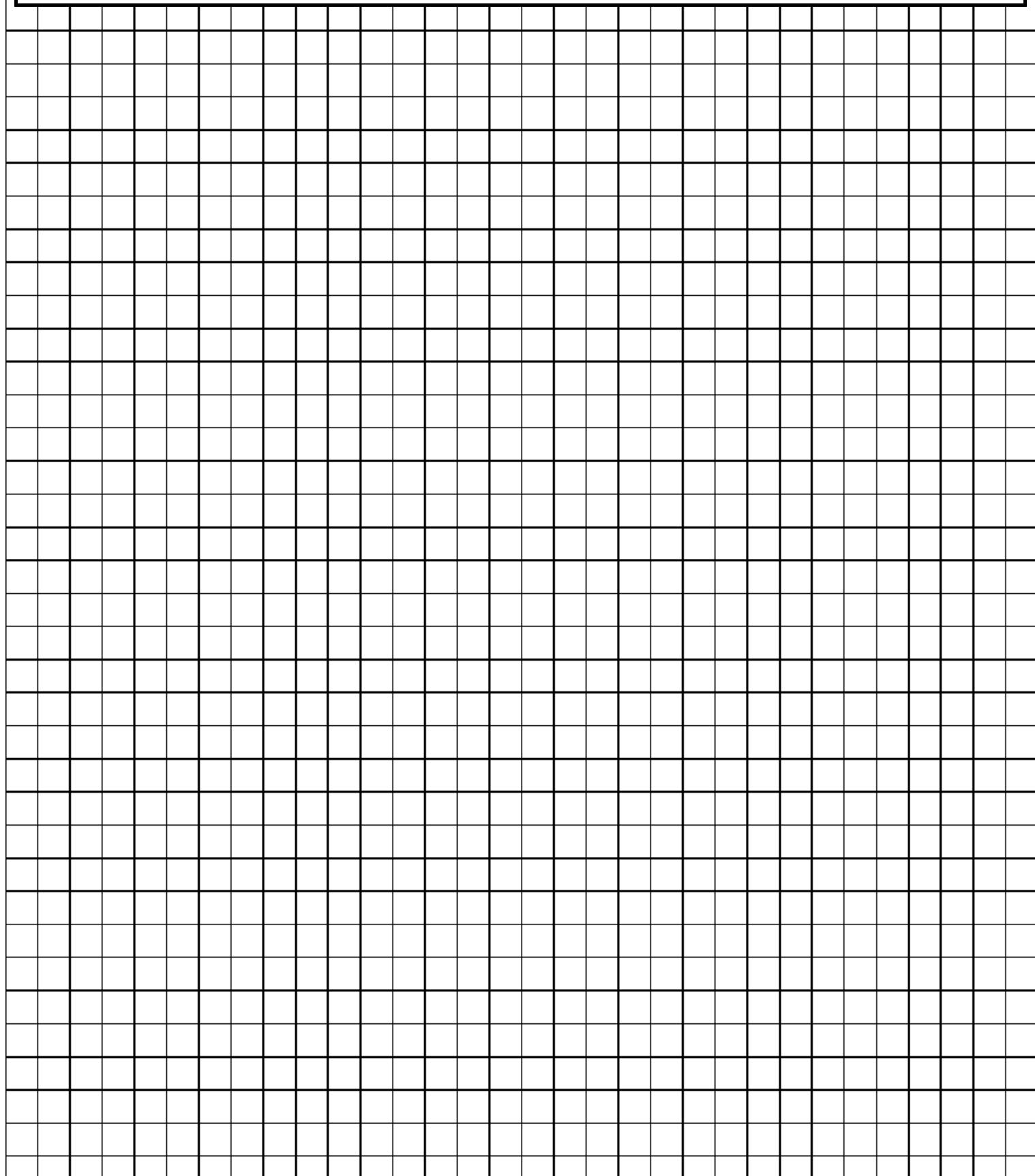
№ 8.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.



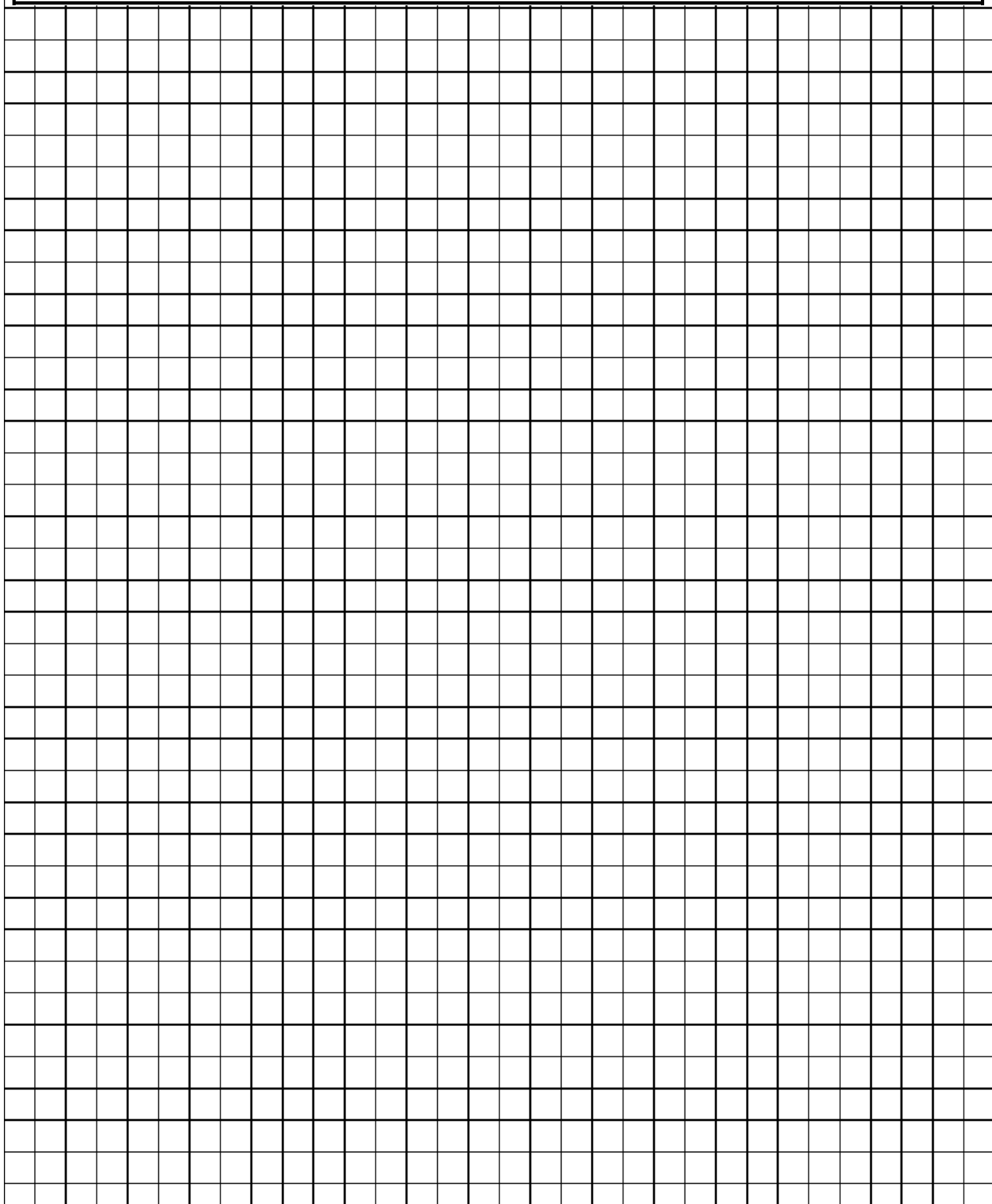
№ 9.

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объем и давление связаны соотношением $pV^{1,4} = const$, где p (атм.) — давление газа, V — объем газа в литрах. Изначально объем газа равен 1,6л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128атмосфер. Определите, до какого минимального объема можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.



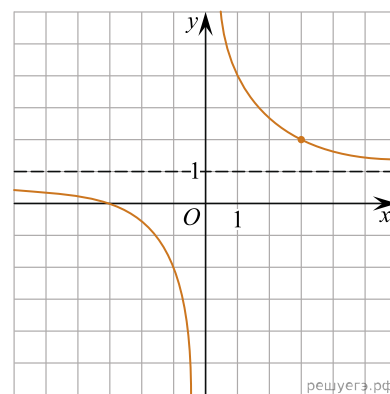
№ 10.

Из двух городов, расстояние между которыми равно 560 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 65 км/ч и 75 км/ч?



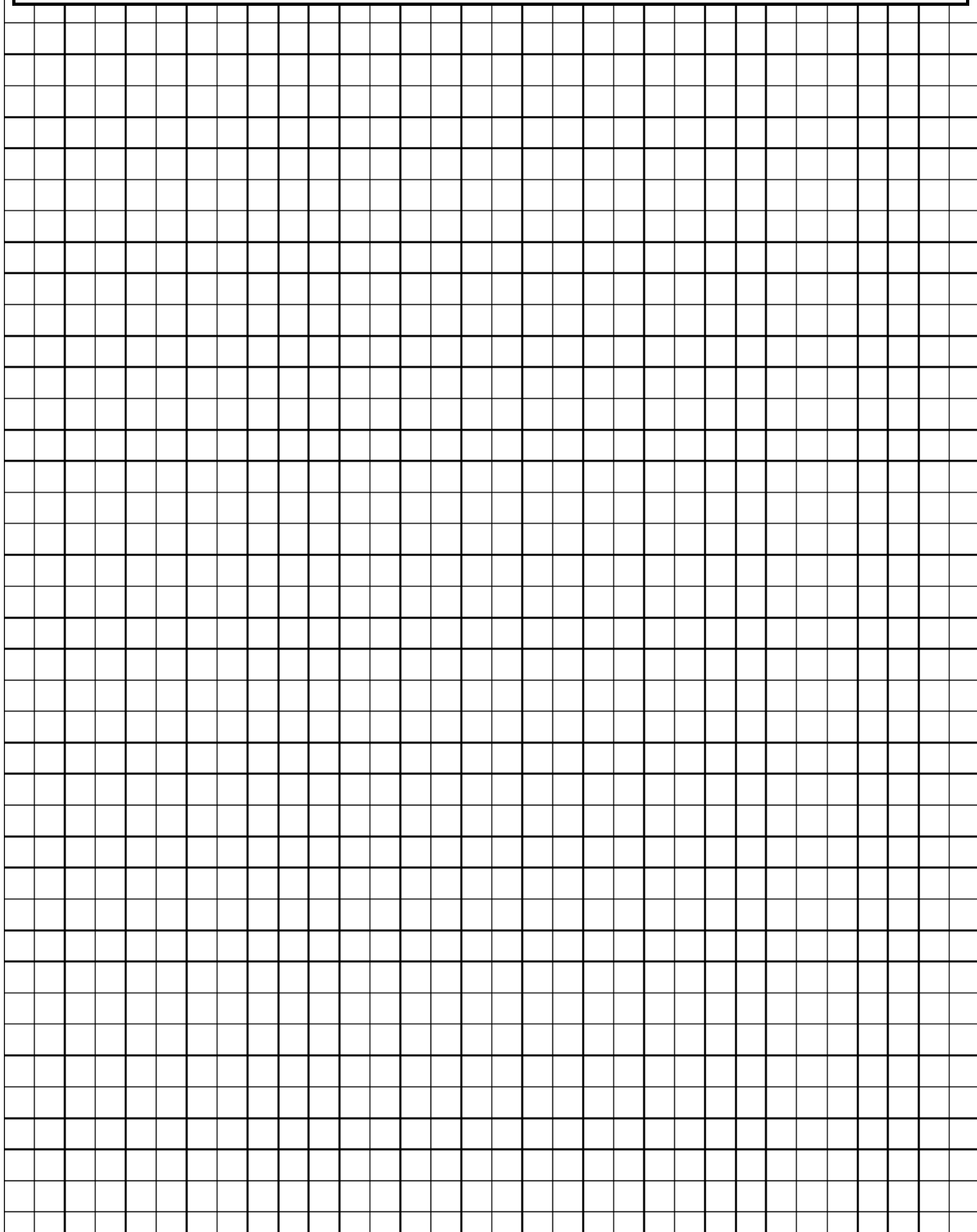
№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(-12)$.



№ 12.

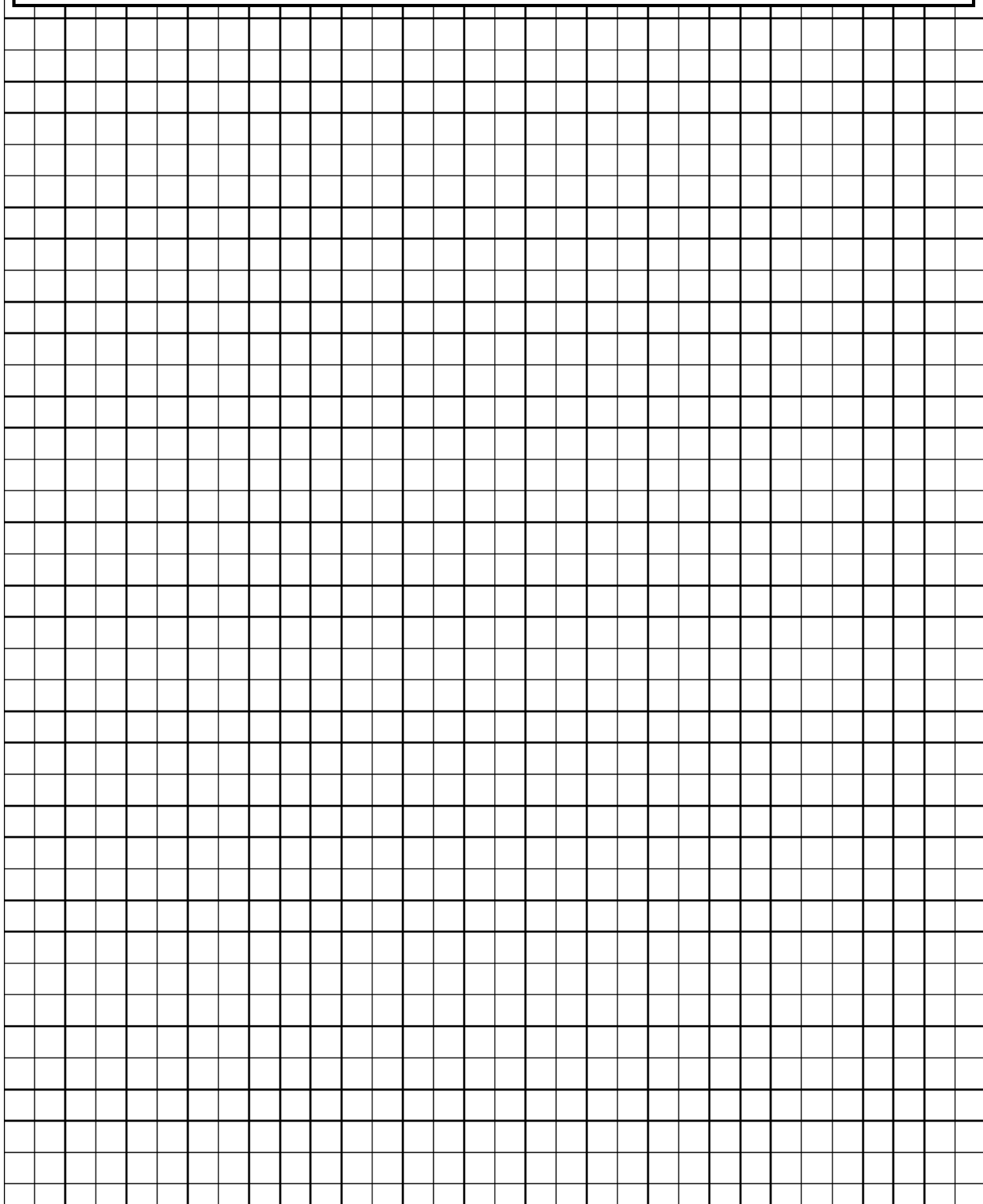
Найдите точку максимума функции $y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}$.



№ 13.

а) Решите уравнение $2\log_3^2(2\cos x) - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

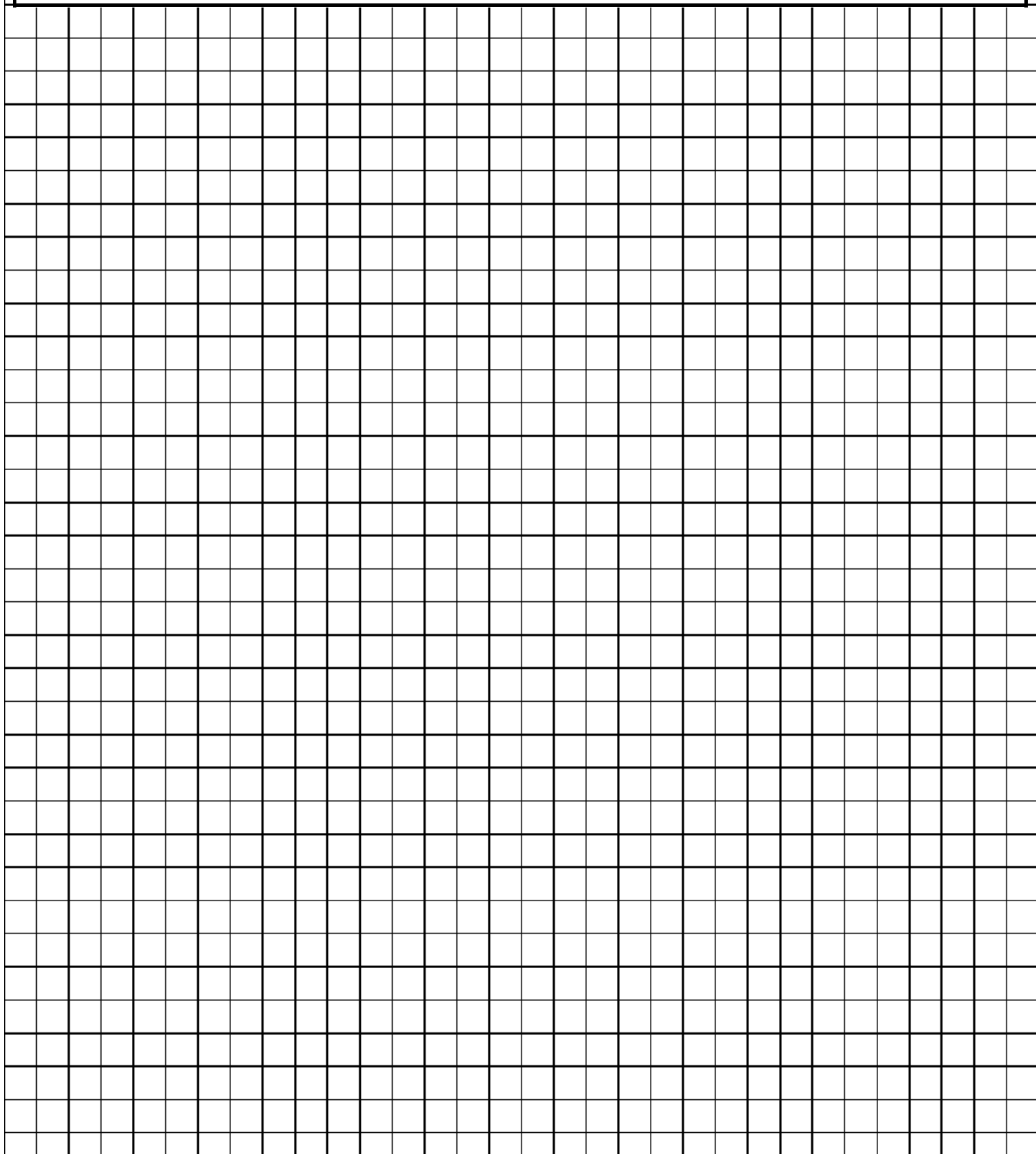


№ 14.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка M — середина ребра A_1C_1 , а точка O — точка пересечения диагоналей боковой грани ABB_1A_1 .

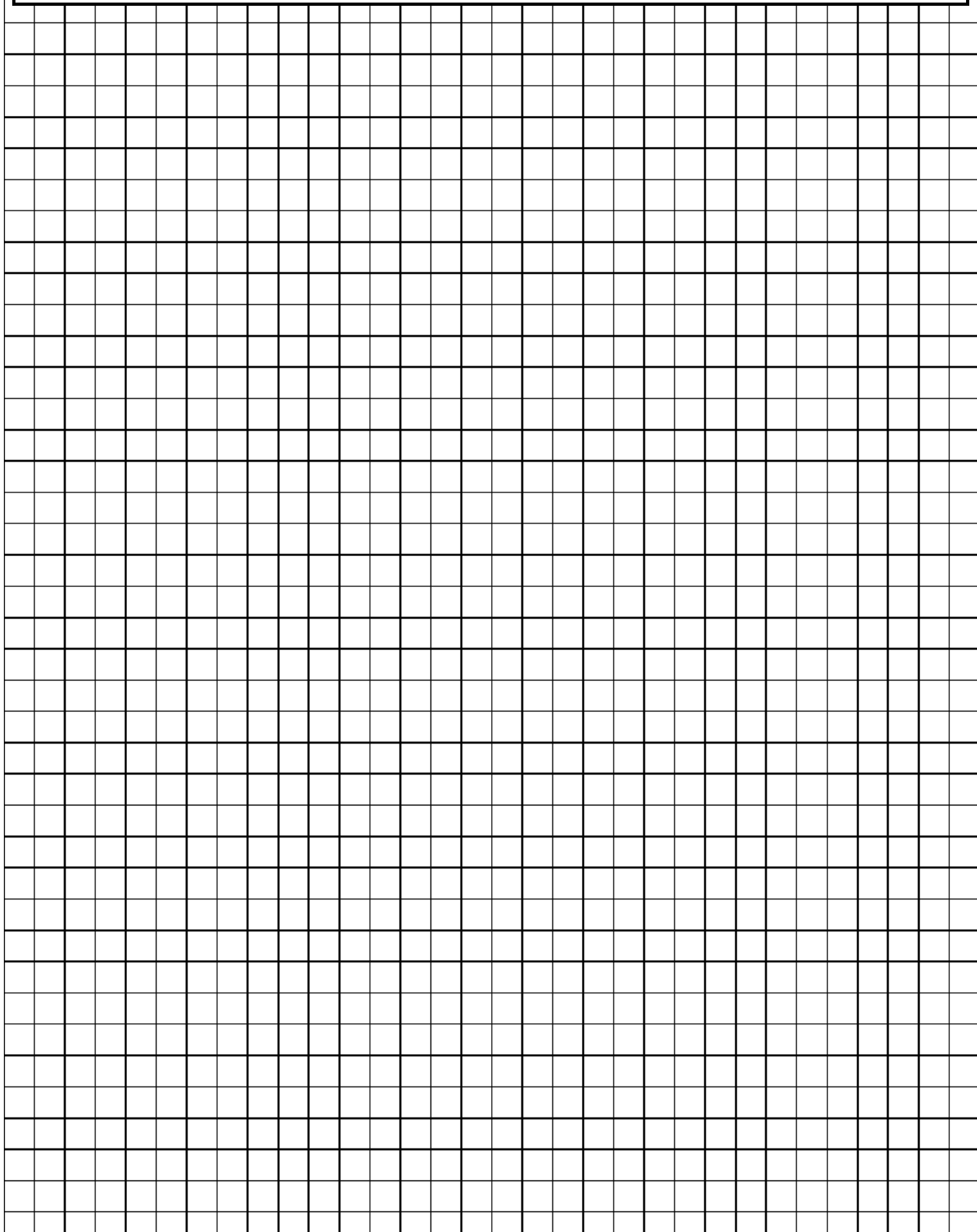
а) Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AMB , лежит на отрезке OC_1 .

б) Найдите угол между прямой OC_1 и плоскостью AMB .



№ 15.

Решите неравенство: $(9^x - 2 \cdot 3^x)^2 - 62(9^x - 2 \cdot 3^x) - 63 \geq 0$.



No 16.

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 300 тыс. руб.;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году будет равен 417,6 тыс. руб. Какую сумму (в тыс. руб.) планирует взять в кредит?

№ 17.

Окружность проходит через вершины B и C прямоугольного треугольника ABC и пересекает катет AC в точке K , а гипотенузу AB — в точке M .

а) Докажите, что треугольники AKM и ABC подобны.

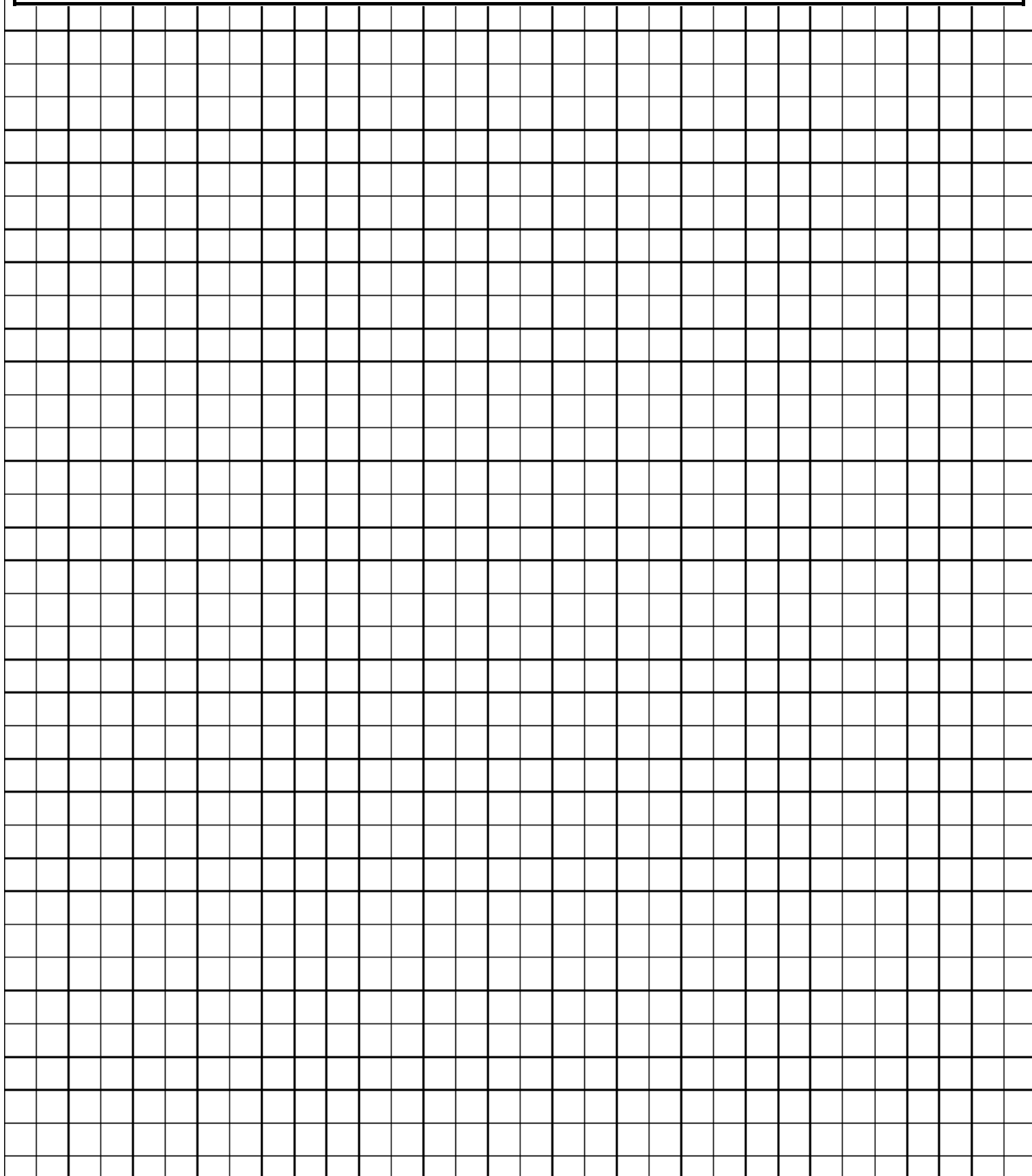
б) Найдите площадь четырехугольника $CKMB$, если радиус окружности равен $\sqrt{29}$, катеты AC и BC равны 12 и 4 соответственно.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| = ax + a - 2$$

на промежутке $(-1; +\infty)$ имеет больше двух корней.



№ 19.

Несколько экспертов оценивают несколько кинофильмов. Каждый из них выставляет оценку каждому кинофильму—целое число баллов от 1 до 10 включительно. Известно, что каждому кинофильму все эксперты выставили различные оценки. Рейтинг кинофильма— это среднее геометрическое оценок всех экспертов. Среднее геометрическое чисел $a_1, \dots, a_n$ равно $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$. Оказалось, что рейтинги всех кинофильмов — различные целые числа.

- а) Могло ли быть 2 эксперта и 5 кинофильмов?
б) Могло ли быть 3 эксперта и 4 кинофильма?
в) При каком наибольшем количестве экспертов описанная ситуация возможна для одного кинофильма?

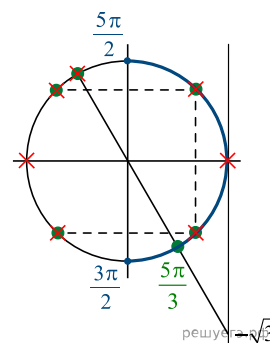
ОТВЕТЫ

Номер	Задание	Ответ
1	27761	32
2	27713	10
3	324456	48
4	509433	0,1
5	663473	0,5
6	77369	-6
7	26762	6
8	119975	60
9	27993	0,05
10	99588	4
11	508951	0,75
12	77455	4

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) $\frac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \log_{13}(2 \sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2} \cos x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0, \\ 2 \sin^2 x = 1, \\ \sqrt{2} \cos x \neq 1, \\ \cos x > 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \\ \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \\ \cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x > 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \\ \cos x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$



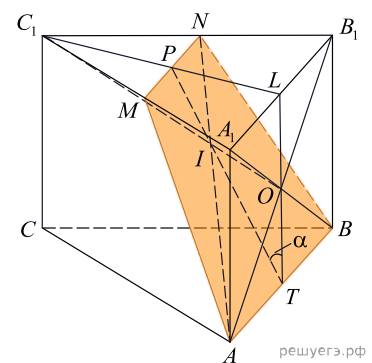
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число $\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{5\pi}{3}.$

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Проведем AM , MN параллельно AB и NB . Таким образом, равнобедренная трапеция $AMNB$ — искомое сечение. Введем обозначения, как показано на рисунке. Точка I — точка пересечения диагоналей трапеции, точки P и T — середины верхнего и нижнего основания трапеции соответственно, точка L — середина A_1B_1 , $\angle PTL = \alpha$. Проведем отрезок C_1O , он равен $\sqrt{12+1} = \sqrt{13}$. Если мы докажем, что сумма отрезков C_1I и IO равна длине отрезка C_1O , то точка пересечения диагоналей четырехугольника будет действительно лежать на этом отрезке.



$$PT = h_{\text{трап.}} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}, \quad AM = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \quad \text{диагональ трапеции } AN = 4, \quad NI = \frac{4}{3}, \quad TI = \frac{2\sqrt{7}}{3}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{PL}{LT} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{4}{7}, \quad \cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

В треугольнике TIO по теореме косинусов найдем IO .

$$IO = \sqrt{IT^2 + TO^2 - 2 \cdot IT \cdot TO \cdot \cos \alpha} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

В треугольнике INC_1 найдем гипотенузу IC_1 . Она равна

$$\sqrt{4 + \frac{16}{9}} = \frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

Сложим отрезки IC_1 и IO : $\frac{2\sqrt{13}}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3} = \sqrt{13}$.

б) Введем систему координат, как показано на рисунке. В этой системе координат имеем:

$$C_1(0; 0; 2), O(\sqrt{3}; 3; 1), A(2\sqrt{3}; 2; 0), M(\sqrt{3}; 1; 2), B(0; 4; 0).$$

$$\overrightarrow{C_1O} = (\sqrt{3}; 3; -1), |\overrightarrow{C_1O}| = \sqrt{13}.$$

Составим уравнение плоскости (MAB) по трем точкам, получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x + y + z - 4 = 0.$$

Тогда вектор нормали равен $\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1; 1\right)$, $|\vec{n}| = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Найдем искомый угол как $\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{C_1O}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{C_1O}|} \Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{1+3-1}{\frac{\sqrt{21}}{3} \cdot \sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}.$

Таким образом, искомый угол равен $\arcsin \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}.$

Ответ: б) $\arcsin \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}.$

Приведём решение Ирины Шраго.

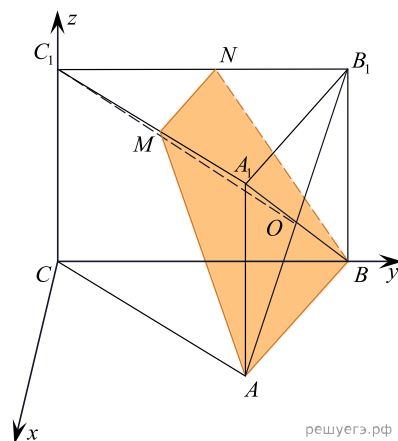
а) Из треугольников MIN и BIA с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ следует, что $\frac{PI}{IT} = \frac{1}{2}.$

Прямая PT является линией пересечения CC_1L и AMB , причём PT пересекает OC_1 именно в точке I , поскольку TP и C_1O — медианы треугольника C_1TL , а значит, точкой пересечения делятся так же. Что и требовалось доказать.

б) Плоскость CC_1L перпендикулярна сечению, поэтому из а) следует, что искомый угол C_1IP . Его легко найти по теореме косинусов из одноимённого треугольника. Зная $C_1P = \sqrt{3}$, $PI = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $C_1I = \frac{2\sqrt{13}}{3}$, вычислим:

$$\cos \angle C_1IP = \frac{(PI)^2 + (C_1I)^2 - (C_1P)^2}{2PI \cdot C_1I} = \frac{8}{\sqrt{91}} = \arccos \frac{8}{\sqrt{91}}.$$

Ответ: б) $\arccos \frac{8}{\sqrt{91}}.$



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Неравенство является квадратным относительно выражения в скобках:

$$(9^x - 2 \cdot 3^x)^2 - 62(9^x - 2 \cdot 3^x) - 63 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 2 \cdot 3^x \geq 63, \\ 9^x - 2 \cdot 3^x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 2 \cdot 3^x - 63 \geq 0, \\ (3^x - 1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (9^x - 2 \cdot 3^x)^2 - 62(9^x - 2 \cdot 3^x) - 63 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 2 \cdot 3^x \geq 63, \\ 9^x - 2 \cdot 3^x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 2 \cdot 3^x - 63 \geq 0, \\ (3^x - 1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 9, \\ 3^x \leq -7 \text{ (решений нет)}, \\ 3^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{0\} \cup [2; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть планируется взять в кредит S тыс. руб. Заполним таблицу:

Год	Долг в январе, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг в июле, тыс. руб.
2026			S
2027	$1,2S$	300	$1,2S - 300$
2028	$1,2^2S - 1,2 \cdot 300$	300	$1,2^2S - 1,2 \cdot 300 - 300$
2029	$1,2^3S - 1,2^2 \cdot 300 - 1,2 \cdot 300$	417,6	$1,2^3S - 1,2^2 \cdot 300 - 1,2 \cdot 300 - 417,6$

Долг в июле 2029 года будет выплачен полностью, получаем уравнение:

$$\begin{aligned}
& 1,2^3S - 1,2^2 \cdot 300 - 1,2 \cdot 300 - 417,6 = 0 \Leftrightarrow 1,2^3S - 300(1,44 + 1,2) = 417,6 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,2^3S = 792 + 417,6 \Leftrightarrow 1,728S = 1209,6 \Leftrightarrow S = 700. \quad 1,2^3S - 1,2^2 \cdot 300 - 1,2 \cdot 300 - 417,6 = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,2^3S - 300(1,44 + 1,2) = 417,6 \Leftrightarrow 1,2^3S = 792 + 417,6 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,728S = 1209,6 \Leftrightarrow S = 700. \quad 1,2^3S - 1,2^2 \cdot 300 - 1,2 \cdot 300 - 417,6 = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,2^3S - 300(1,44 + 1,2) = 417,6 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,2^3S = 792 + 417,6 \Leftrightarrow 1,728S = 1209,6 \Leftrightarrow S = 700. \quad 1,2^3S - 1,2^2 \cdot 300 - 1,2 \cdot 300 - 417,6 = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,2^3S - 300(1,44 + 1,2) = 417,6 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,2^3S = 792 + 417,6 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,728S = 1209,6 \Leftrightarrow S = 700.
\end{aligned}$$

Ответ: 700.

Приведем решение Игоря Эльмана (Москва).

Пусть планируется взять в кредит S тыс.руб. Выданный под проценты кредит можно рассматривать как размещение банком депозита на счете заемщика. При отсутствии операций величина этого депозита за три года достигнет $1,2^3S$ тыс.руб. Выплаты банку, в свою очередь, можно рассматривать как открытие заемщиком в банке депозитного счета. За три года с учетом пополнений на этом счете накопится $1,2^2 \cdot 300 + 1,2 \cdot 300 + 417,6$ тыс. руб. Поскольку долг был выплачен полностью, получаем уравнение:

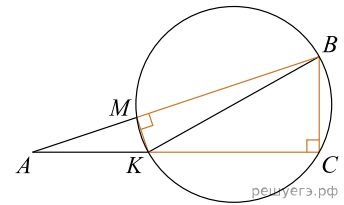
$$1,2^3S = 1,2^2 \cdot 300 + 1,2 \cdot 300 + 417,6,$$

откуда $S = 700$.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Отрезок KB — хорда, на которую опирается прямой угол, то есть диаметр окружности. Следовательно, вписанный угол KMB — прямой, потому что опирается на диаметр. Смежный с ним угол AMK также прямой, тогда треугольники AKM и ABC подобны по двум углам.



б) Найдем площадь четырехугольника $CKMB$ как сумму площадей прямоугольных треугольников CKB и BMK . Из прямоугольных треугольников KCB и ABC по теореме Пифагора соответственно получаем:

$$CK = \sqrt{KB^2 - BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{29})^2 - 4^2} = \sqrt{116 - 16} = 10,$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 16} = 4\sqrt{10}.$$

Из подобия треугольников AKM и ABC получаем $\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{KM}$, откуда

$$AM = \frac{AC \cdot (AC - CK)}{AB} = \frac{12 \cdot 2}{4\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5},$$

$$KM = \frac{BC \cdot (AC - CK)}{AB} = \frac{4 \cdot 2}{4\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$BM = AB - AM = 4\sqrt{10} - \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{17\sqrt{10}}{5}.$$

Таким образом, площадь четырехугольника $CKMB$ равна

$$\begin{aligned} S_{CKMB} &= S_{CKB} + S_{BMK} = \frac{1}{2} \cdot CK \cdot CB + \frac{1}{2} \cdot BM \cdot KM = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{17\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} = 20 + \frac{17}{5} = \frac{117}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{CKMB} &= S_{CKB} + S_{BMK} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot CK \cdot CB + \frac{1}{2} \cdot BM \cdot KM = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{17\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} = 20 + \frac{17}{5} = \frac{117}{5}. \end{aligned}$$

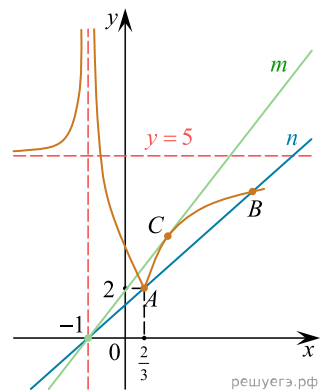
Ответ: б) $\frac{117}{5}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = \left| \frac{5}{x+1} - 3 \right| + 2$ и $y = ax + a$. Количество решений исходного уравнения равно количеству точек пересечения графиков данных функций. Определим, при каких a графики будут иметь более двух общих точек на открытом луче $(-1; +\infty)$.

Уравнение $y = a(x+1)$ задает семейство прямых, проходящих через точку $(-1; 0)$ с угловым коэффициентом, равным a . Изобразим эскиз графика функции f (см.рис.) и заметим, что при $a \leq 0$ графики не имеют общих точек на промежутке $(-1; +\infty)$.



Рассмотрим положительные значения параметра. Если угловой коэффициент прямой $y = a(x+1)$ меньше, чем у прямой n , или больше, чем у прямой m , то на промежутке $(-1; +\infty)$ графики будут иметь ровно одну общую точку. Если прямая $y = a(x+1)$ совпадает с прямой n или с прямой m , то графики будут иметь ровно две общие точки. Графики имеют три общие точки, а исходное уравнение имеет три положительных решения, если прямые $y = a(x+1)$ лежат внутри острого угла, образованного прямыми n и m . Найдем граничные значения параметров, соответствующие этим прямым.

Прямая n проходит через точку $A\left(\frac{2}{3}; 2\right)$, тогда $a\left(\frac{2}{3} + 1\right) = 2$, откуда находим $a = \frac{6}{5}$. Заметим, что на луче $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ функция f принимает вид $f(x) = 5 - \frac{5}{x+1}$ и что прямая n вторично пересекает график f в точке $B\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Прямая m касается ветви гиперболы $y = 5 - \frac{5}{x+1}$. Касательная к гиперболе имеет с ней единственную общую точку, поэтому уравнение $5 - \frac{5}{x+1} = a(x+1)$ или $a(x+1)^2 - 5(x+1) + 5 = 0$ имеет единственное решение. Чтобы квадратное относительно $x+1$ уравнение имело единственный корень, его дискриминант $25 - 20a$ должен быть равен нулю, отсюда $a = \frac{5}{4}$.

При найденном значении параметра точка касания C имеет координаты $\left(1; \frac{5}{2}\right)$, она действительно лежит между точками A и B , как показано на рисунке, иначе оказалось бы, что рисунок неверен, и потребовалось бы рассмотреть соответствующую конфигурацию.

Итак, при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$ исходное уравнение будет иметь более двух корней на $(-1; +\infty)$.

Ответ: $a \in \left(\frac{6}{5}; \frac{5}{4}\right)$.

Приведём авторское решение.

Рассмотрим функции $f(x) = ax + a - 2$ и $g(x) = \left| \frac{5}{x+1} - 3 \right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(-1, +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(-1, +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(-1, +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(-1, \frac{2}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(-1, \frac{2}{3}\right]$, причем решение будет

существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{2}{3}\right) \geq g\left(\frac{2}{3}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{5}{3} - 2 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax + a - 2 = 3 - \frac{5}{x+1}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 + (2a-5)x + a = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 20a$, поэтому при $a > \frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней, при $a = \frac{5}{4}$ уравнения имеет единственный корень, равный 1, при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{5}{4}$, то больший корень $x_2 = \frac{5-2a+\sqrt{D}}{2a} > \frac{5-2a}{2a} > 1 > \frac{2}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$f\left(\frac{2}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow a\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (2a-5) \cdot \frac{2}{3} + a = \frac{25a-30}{9} > 0 \Leftrightarrow a > \frac{6}{5}.$$

Таким образом, исходное уравнение $\left|\frac{5}{x+1} - 3\right| = ax + a - 2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(-1, +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. а) Заметим, что если рейтинг кинофильма — целое число, то произведение оценок двух экспертов — точный квадрат. Произведение двух чисел от 1 до 10 не превосходит 90. Под это условие попадают квадраты чисел от 1 до 9. Но числа 1, 25, 49, 64 и 81 не представляются в виде произведения двух различных целых чисел от 1 до 10. Значит, для двух экспертов может быть не более четырёх кинофильмов.

б) Допустим, кинофильмы получили такие наборы оценок: (1;2;4), (2;4;8), (1;3;9), (4;6;9). Тогда среднее геометрическое этих наборов — различные целые числа. Условие задачи выполняется.

в) Если кинофильм получил оценки (3;6;8;9), то условие задачи выполняется; экспертов могло быть четверо.

Если экспертов было больше четырёх, то произведение их оценок должно делиться на пятую степень рейтинга кинофильма. Но произведение всех возможных оценок $10!$ делится только на две пятые степени: 1^5 или 2^5 . Значит, если экспертов не меньше пяти, то целый рейтинг мог бы равняться только 1 и 2. Но если рейтинг равен 1, то все эксперты выставили 1, а по условию они поставили разные оценки. Если же рейтинг равен 2, то произведение оценок экспертов должно быть степенью двойки, то есть они могли выставить только оценки 1, 2, 4 и 8, а необходимо не менее пяти оценок. Следовательно, экспертов не могло быть более четырёх.

Таким образом, наибольшее возможное число экспертов — четыре.

Ответ: а) нет; б) да; в) 4.
