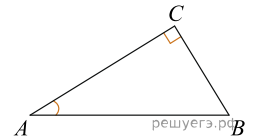


Вариант 227

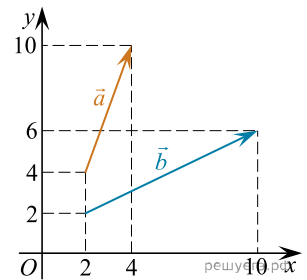
№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 4$, $\cos A = 0,5$. Найдите AB .



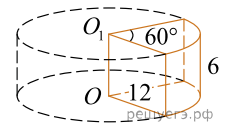
№ 2.

Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 3.

Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



№ 4.

В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по теме «Ботаника». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Ботаника».

№ 5.

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

№ 6.

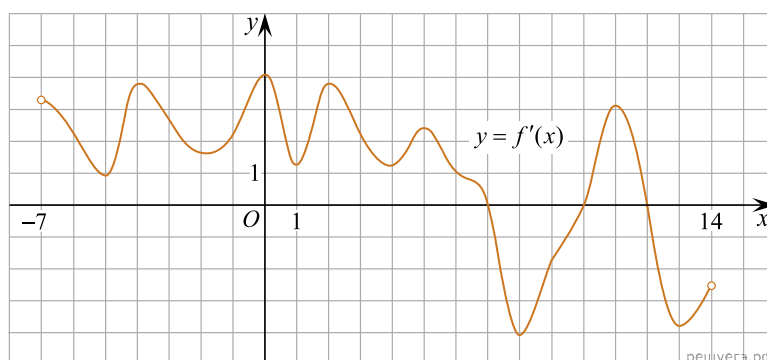
Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{6}{4x-54}} = \frac{1}{7}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $(49^6)^3 : (7^7)^5$.

№ 8.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 9]$.



№ 9.

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1) \frac{0,02K}{r_{\text{пок}}+0,1}},$$

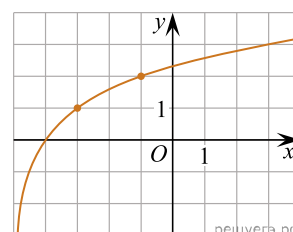
где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Бета», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,65, а оценка экспертов равна 0,37.

№ 10.

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 255км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 1км/ч, стоянка длится 2часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 34 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 4$.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 7^{x^2-2x+3}$.

№ 13.

а) Решите уравнение: $\sin x + 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1$

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

№ 14.

Дана прямая призма, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями $AD=5$ и $BC=4$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M:MD_1 = 1:4$, точка K — середина ребра DD_1 .

а) Доказать, что плоскость MCK параллельна прямой BD .

б) Найти тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания, если $\angle BAD = 60^\circ$, а $\angle CKM = 90^\circ$.

№ 15.

Решите неравенство: $\log_{x+6} \left(\frac{x-4}{x} \right)^2 + \log_{x+6} \frac{x}{x-4} \leq 1$.

№ 16.

Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	Себестоимость (за 1 тонну)	Отпускная цена (за 1 тонну)	Производственные возможности
ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 (тонн в мес.)
творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 (тонн в мес.)

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц.

№ 17.

Две окружности касаются внутренним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на большей и меньшей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает меньшую окружность в точке D . Прямая BC вторично пересекает большую окружность в точке E .

а) Докажите, что AE параллельно BD .

б) Найдите AC , если радиусы окружностей равны 8 и 15.

№ 18.

Найдите все значения k , при каждом из которых уравнение

$$\frac{6k - (2 - 3k) \cos t}{\sin t - \cos t} = 2$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

№ 19.

Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

а) В мешке находятся 1 желтый, 1 зеленый и 2 красных шара. Из мешка случайным образом вынимают 2 шара разного цвета и заменяют одним шаром третьего цвета. Этот процесс продолжают до тех пор, пока все оставшиеся шары в мешке не окажутся одного цвета (возможно, что при этом в мешке останется один шар). Какого цвета шары (или шар) могут остаться в мешке?

б) В мешке 3 желтых, 4 зеленых и 5 красных шаров. Какого цвета шары (или шар) могут остаться в мешке в конце после применения описанной в предыдущем пункте процедуры?

в) В мешке находятся 3 желтых, 4 зеленых и 5 красных шаров. Из мешка случайным образом вынимают 2 шара разного цвета и заменяют двумя шарами третьего цвета. Можно ли, применяя эту процедуру многократно, добиться того, чтобы в мешке оказались шары одного цвета? Если можно, то какого цвета эти шары?

Ответы

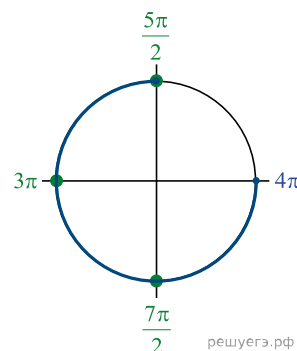
Номер	Задание	Ответ
1	27240	8
2	27737	200
3	27198	144
4	285926	0,2
5	320173	0,02
6	26660	87
7	77398	7
8	27494	1
9	317098	0,625
10	26589	16
11	509060	11
12	507908	49

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Используя формулы приведения, получим уравнение, квадратное относительно косинуса:

$$\begin{aligned}
 \cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) &= 0 \Leftrightarrow (-\cos x)^2 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (-\cos x)^2 + \cos x &= 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}
 \end{aligned}$$



б) Отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ принадлежат корни $\frac{5\pi}{2}$, 3π и $\frac{7\pi}{2}$ (см. рис.).

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{2}; 3\pi; \frac{7\pi}{2}$.

№ 14.

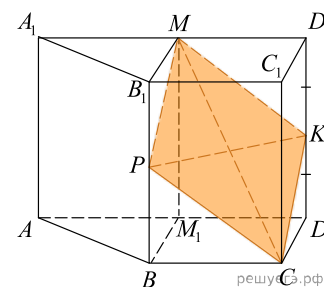
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а), или при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, или обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка M_1 делит ребро AD в отношении $AM_1 : M_1D = 1 : 4$, тогда

$$BC = M_1D = MD_1 = B_1C_1 = 4$$

и многогранник $M_1BCDMB_1C_1D_1$ — параллелепипед. Пусть плоскость MCK пересекает ребро BB_1 в некоторой точке P . Противоположные грани параллелепипеда параллельны, поэтому параллельны прямые KM и CP , по которым эти грани пересечены плоскостью сечения. Отрезки KM и CP равны как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, и $MKCP$ — параллелограмм. Следовательно, прямоугольные треугольники CPB и MKD_1 равны по катету и гипотенузе: $BC = MD_1$ и $CP = MK$. Тогда



$$BP = KD_1 = \frac{DD_1}{2} = \frac{BB_1}{2},$$

а значит, точка P — середина ребра BB_1 . Отрезки BP и KD равны и параллельны, тогда $BPKD$ — параллелограмм, и, значит, прямая PK параллельна прямой BD . Прямая PK лежит в плоскости MKC , а прямая BD не лежит в этой плоскости, тогда по признаку параллельности прямой и плоскости плоскость MKC параллельна прямой BD — что и требовалось доказать.

б) Заметим, что $MKCP$ — параллелограмм с прямым углом, следовательно, $MKCP$ — прямоугольник. Угол между плоскостью MKC и плоскостью $ABCD$ будем искать с помощью площади проекции. Проекция прямоугольника $MKCP$ на плоскость $A_1B_1C_1D_1$ — это параллелограмм $B_1MD_1C_1$. Пусть $D_1K = x$, $KD = x$. По теореме Пифагора:

$$MK^2 = MD_1^2 + D_1K^2 \Leftrightarrow MK^2 = 16 + x^2,$$

тогда

$$MC^2 = 16 + 2x^2 + CD^2 = PK^2 = BD^2.$$

Если $\angle BAD = 60^\circ$, то треугольник B_1A_1M — равносторонний, $A_1B_1 = C_1D_1 = CD = A_1M = 1$. Найдем длину BD :

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \widehat{BCD}} = \sqrt{16 + 1 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{21}. \quad BD = \sqrt{BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \widehat{BCD}} = \\ &= \sqrt{16 + 1 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{21}. \end{aligned}$$

Найдем значение x :

$$21 = 16 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Тогда $MK = \sqrt{4^2 + 2} = 3\sqrt{2}$, $CK = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$. Площадь $MKCP$ равна, таким образом, $3\sqrt{6}$. Площадь $B_1MD_1C_1$ равна $1 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$. Найдем косинус угла между плоскостью MKC и плоскостью основания:

$$\cos \alpha = \frac{S_{B_1MD_1C_1}}{S_{MKCP}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Тогда $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$, а $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3} : \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Приведем решение Александра Турбанова (Липецк).

а) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке B , как показано на рисунке. Опустим перпендикуляры MM' , BH_1 и CH на сторону AD . Пусть $BH_1 = h$ и $CC_1 = a$. Во введенной системе координат имеем:

$$A(0; 0; 0),$$

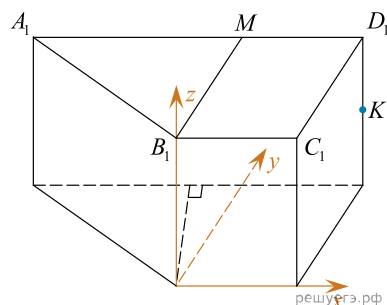
$$C(4; 0; 0),$$

$$M\left(\frac{1}{2}; h; a\right),$$

$$K\left(\frac{9}{2}; h; \frac{a}{2}\right),$$

$$D\left(\frac{9}{2}; h; 0\right),$$

$$\overrightarrow{BD}\left(\frac{9}{2}; h; 0\right).$$

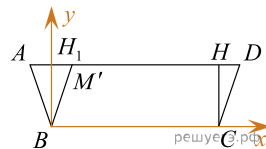


Подставим координаты точек плоскости MCK в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, получим:

$$\begin{cases} 4A + D = 0, \\ \frac{1}{2}A + hB + aC + D = 0, \\ \frac{9}{2}A + hB + \frac{a}{2}C + D = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим $A = -\frac{D}{4}$. Вычтем из третьего уравнения системы второе и выразим C :

$$4A - \frac{a}{2}C = 0 \Leftrightarrow -D = \frac{a}{2}C \Leftrightarrow C = -\frac{2D}{a}.$$



Находим B :

$$-\frac{D}{8} + hB - \frac{2D}{a} \cdot a + D = 0 \Leftrightarrow hB = \frac{9}{8}D \Leftrightarrow B = \frac{9D}{8h}.$$

Получаем уравнение плоскости MCK :

$$-\frac{D}{4}x + \frac{9D}{8h}y - \frac{2D}{a}z + D = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x - \frac{9}{8h}y + \frac{2}{a}z - 1 = 0,$$

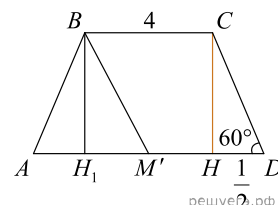
следовательно, вектор нормали к плоскости MCK имеет координаты $\vec{n} = \left(\frac{1}{4}; -\frac{9}{8h}; \frac{2}{a}\right)$.

Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\vec{n}$ равно

$$\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{9}{8h} \cdot h + 0 = 0.$$

Таким образом, векторы $\vec{BD}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, значит, прямая BD параллельна плоскости MCK .

б) В уравнении плоскости ABC координата z равна нулю. Следовательно, нормаль к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}_2(0; 0; 1)$. Далее находим:



$$CD = \frac{\frac{1}{2}}{\cos 60^\circ} = 1,$$

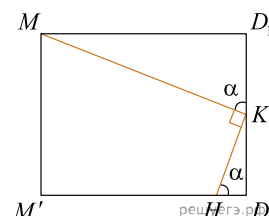
$$CH = \frac{3}{2} = h.$$

Пусть $DK = x$, $KD_1 = x$. Отрезки CK и MK перпендикулярны. Отрезок HK — проекция CH на плоскость AMD , следовательно, по теореме о трех перпендикулярах отрезок HK перпендикулярен отрезку MK .

Пусть $\angle MKD_1 = \alpha$, тогда $\angle D_1KH = 90^\circ + \alpha$. Выразим угол HKD :

$$\angle HKD = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha.$$

Поскольку $\angle D_1MK = 90^\circ - \alpha$, треугольники MD_1K и HDK подобны по двум углам. Имеем:



$$\frac{KD}{MD_1} = \frac{HD}{KD_1} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{2},$$

откуда $a = 2x = 2\sqrt{2}$.

Находим уравнение плоскости MCK :

$$\frac{1}{4}x - \frac{9}{8h}y + \frac{2}{a}z - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x - \frac{9 \cdot 2}{8\sqrt{3}}y + \frac{2}{2\sqrt{2}}z - 1 = 0.$$

Домножим уравнение на $8\sqrt{6}$, получим:

$$2\sqrt{6}x - 18\sqrt{2}y + 8\sqrt{3} - 8\sqrt{6} = 0.$$

Следовательно, вектор нормали к плоскости MCK равен $\vec{n}_2 = (2\sqrt{6}; -18\sqrt{2}; 8\sqrt{3})$.

Пусть α — угол между плоскостью MKS и плоскостью основания. Угол между плоскостями равен углу между нормальными этих плоскостей. Имеем:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\left|0 \cdot 2\sqrt{6} + 0 \cdot (-18\sqrt{2}) + 1 \cdot 8\sqrt{3}\right|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (-18\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{3})^2}} = \frac{8\sqrt{3}}{12\sqrt{6}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad \cos \alpha = \frac{\left|0 \cdot 2\sqrt{6} + 0 \cdot (-18\sqrt{2}) + 1 \cdot 8\sqrt{3}\right|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (-18\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{3})^2}} = \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{12\sqrt{6}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad \cos \alpha = \\ &= \frac{\left|0 \cdot 2\sqrt{6} + 0 \cdot (-18\sqrt{2}) + 1 \cdot 8\sqrt{3}\right|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (-18\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{3})^2}} = \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{12\sqrt{6}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Воспользуемся следствием из основного тригонометрического тождества и выразим тангенс угла α , получим:

$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$, откуда $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{7}{2}$, то есть $\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$. Поскольку угол острый, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство:

$$2 \log_{x+6} \frac{x-4}{x} - \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1.$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x+6 > 1 \Leftrightarrow x > -5$.

$$\log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{x-4}{x} \leq x+6 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+5x+4}{x} \geq 0, \\ \frac{x-4}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(x+4)}{x} \geq 0, \\ \frac{x-4}{x} > 0, \end{cases}$$

откуда находим: $[-4, -1] \cup (4, +\infty)$. Полученные значения переменной удовлетворяют условию $x > -5$.

Второй случай: $0 < x+6 < 1 \Leftrightarrow -6 < x < -5$. Имеем:

$$\begin{aligned} \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{x-4}{x} \geq x+6 \Leftrightarrow \frac{x^2+5x+4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+4)}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4, \\ -1 \leq x < 0. \end{cases} \\ \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{x-4}{x} \geq x+6 \Leftrightarrow \frac{x^2+5x+4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+4)}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4, \\ -1 \leq x < 0. \end{cases} \\ \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{x-4}{x} \geq x+6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+5x+4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+4)}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4, \\ -1 \leq x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая условие $0 < x+6 < 1$, получаем: $-6 < x < -5$. Решение неравенства: $(-6, -5) \cup [-4, -1] \cup (4, +\infty)$.

Ответ: $(-6, -5) \cup [-4, -1] \cup (4, +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть x — доля мощностей завода, занятых под производство блинчиков с ягодной начинкой, а y — доля мощностей, занятых под производство блинчиков с творожной начинкой. Тогда $x + y = 1$, при этом блинчиков с ягодной начинкой производится $90x$ тонн, а с творожной начинкой— $75y$ тонн. Кроме того, из условия ассортимента следует, что $90x \geq 15$ откуда $x \geq \frac{1}{6}$, а $75y \geq 15$, откуда $y \geq \frac{1}{5}$. Прибыль завода с одной тонны продукции с ягодной начинкой равна $100 - 70 = 30$ тыс.руб., прибыль с одной тонны продукции с творожной начинкой равна $135 - 100 = 35$ тыс.руб., общая прибыль с произведённой за месяц продукции равна $S(x, y) = 30 \cdot 90x + 35 \cdot 75y = 2700x + 2625y = 75 \cdot (36x + 35y)$. Таким образом, нам необходимо найти наибольшее значение функции $S(x, y) = 75 \cdot (36x + 35y)$ при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x \geq \frac{1}{6}, y \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Подставляя $y = 1 - x$ в выражение $36x + 35y$, получаем: $36x + 35(1 - x) = x + 35$. Наибольшее значение этого выражения при условии $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}$ достигается при $x = \frac{4}{5}$, тогда $y = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

Поэтому максимально возможная прибыль завода за месяц равна:

$$75 \cdot \left(36 \cdot \frac{4}{5} + 35 \cdot \frac{1}{5} \right) = 75 \cdot \frac{179}{5} = 2685 \text{ тыс.руб.}$$

при этом фабрика производит 72 тонны блинчиков с ягодной начинкой и 15 тонн блинчиков с творожной начинкой.

Ответ: 2685 тыс. руб.

Приведём решение Дмитрия Гущина.

Тонна блинчиков с творожной начинкой приносит 35 тыс. руб., а тонна блинчиков с ягодной— 30 тыс.руб. При этом 1 тонне блинчиков с творожной начинкой соответствует 1,2 тонны блинчиков с ягодной начинкой. Заметим, что $1 \cdot 35 \text{ тыс.руб.} < 1,2 \cdot 30 \text{ тыс.руб.} = 36 \cdot 1 \text{ тыс.руб.}$, поэтому более выгодно производить блинчики с ягодной начинкой. Значит, блинчиков с творожной начинкой необходимо производить 15 тонн, а блинчиков с ягодной начинкой— $90 - 15 \cdot 1,2 = 72$ тонны, что даст $15 \cdot 35 + 72 \cdot 30 = 2685$ тыс. руб. прибыли.

№ 17.

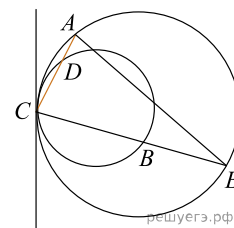
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Проведем общую касательную к окружностям в точке касания C . Угол между этой касательной и AC обозначим за α . Тогда по теореме об угле между касательной и хордой

$$\angle DBC = \angle \alpha = \angle AEC.$$

Таким образом, прямые DB и AE параллельны.



б) Заметим, что BD и AE — диаметры окружностей. Тогда $BD=16$, $AE=30$, треугольники DBC и AEC подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$. Пусть $AC = BC = x$, заметим, что $CE : CB = 15 : 8$, следовательно, $CE = \frac{15}{8}x$. По теореме Пифагора для треугольника ACE

$$x^2 + \left(\frac{15}{8}x\right)^2 = 30^2 \Leftrightarrow x = \frac{240}{17}.$$

Ответ: б) $\frac{240}{17}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. ОЛЗ данного уравнения: $\sin t + \cos t \Leftrightarrow t + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задачу можно переформулировать так: найдите все значения k , при каждом из которых уравнение

$$6k - (2 - 3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t)$$

имеет на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ хотя бы одно решение, не равное $\frac{\pi}{4}$.

Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} 6k - (2 - 3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t) &\Leftrightarrow 6k - 2\cos t + 3k\cos t = 2\sin t - 2\cos t \Leftrightarrow (\cos t + 2)3k = 2\sin t. & 6k - (2 - 3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6k - 2\cos t + 3k\cos t = 2\sin t - 2\cos t \Leftrightarrow (\cos t + 2)3k = 2\sin t. & 6k - (2 - 3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6k - 2\cos t + 3k\cos t = 2\sin t - 2\cos t \Leftrightarrow & & \\ &\Leftrightarrow (\cos t + 2)3k = 2\sin t. & & \end{aligned}$$

Функция в правой части уравнения на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ монотонно возрастает от 0 до 2. Функция в левой части монотонно убывает от $9k$ до $6k$ при $k \geq 0$. Таким образом, уравнение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ будет иметь единственный корень в случае если $9k \geq 0$ и $6k \leq 2$, то есть при $k \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$. При $k < 0$ функция в левой части уравнения отрицательна, и уравнение корней не имеет.

Осталось только выкинуть случай, когда единственный корень попадает в точку $x = \frac{\pi}{4}$. В этом случае получим:

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{\pi}{4} + 2\right)3k = 2\sin \frac{\pi}{4} &\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right)3k = \sqrt{2} \Leftrightarrow k = \frac{2\sqrt{2}}{3(\sqrt{2} + 4)} = \frac{2(2\sqrt{2} - 1)}{21}, & \left(\cos \frac{\pi}{4} + 2\right)3k = 2\sin \frac{\pi}{4} &\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right)3k = \sqrt{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = \frac{2\sqrt{2}}{3(\sqrt{2} + 4)} = \frac{2(2\sqrt{2} - 1)}{21}, & & \end{aligned}$$

откуда получаем ответ.

Приведём другое решение.

Областью определения заданного уравнения являются все числа отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, кроме точки, в которой $\sin t = \cos t$, то есть кроме точки $\frac{\pi}{4}$. На этой области имеем:

$$\begin{aligned} 6k - (2 - 3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t) &\Leftrightarrow 6k - 2\cos t + 3k\cos t = 2\sin t - 2\cos t \Leftrightarrow k = \frac{2}{3} \frac{\sin t}{\cos t + 2}. & 6k - (2 - 3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6k - 2\cos t + 3k\cos t = 2\sin t - 2\cos t \Leftrightarrow k = \frac{2}{3} \frac{\sin t}{\cos t + 2}. & 6k - (2 - 3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6k - 2\cos t + 3k\cos t = 2\sin t - 2\cos t \Leftrightarrow & & \\ &\Leftrightarrow k = \frac{2}{3} \frac{\sin t}{\cos t + 2}. & & \end{aligned}$$

Найдём множество значений левой части. Пусть $f(t) = \frac{\sin t}{\cos t + 2}$, тогда

$$f'(t) = \frac{\cos t(\cos t + 2) - \sin t(-\sin t)}{(\cos t + 2)^2} = \frac{2\cos t + 1}{(\cos t + 2)^2}.$$

Найденная производная положительна на области определения уравнения, функция $f(t)$ возрастает на ней, принимая все значения из отрезка $\left[f(0); f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$, кроме значения $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2} + 1}$. Таким образом, $E(f) = \left[0; \frac{1}{2}\right] \setminus \left\{\frac{1}{2\sqrt{2} + 1}\right\}$.

Следовательно, искомыми значениями параметра являются все числа из отрезка $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, кроме $\frac{2}{6\sqrt{2} + 3}$.

Приведем третье решение.

ОДЗ данного уравнения: $\sin t \neq \cos t \Leftrightarrow t \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задачу можно переформулировать так: найдите все значения k , при каждом из которых уравнение

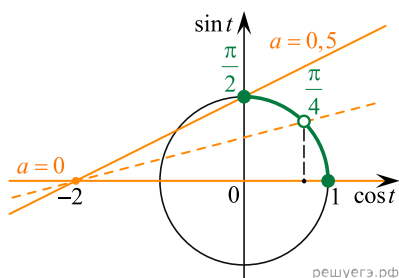
$$6k - (2 - 3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t)$$

имеет на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ хотя бы одно решение, не равное $\frac{\pi}{4}$.

Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} 6k - (2 - 3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t) &\Leftrightarrow 6k - 2\cos t + 3k\cos t = 2\sin t - 2\cos t \Leftrightarrow \sin t = \frac{3k}{2}(\cos t + 2). \quad 6k - (2 - 3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6k - 2\cos t + 3k\cos t = 2\sin t - 2\cos t \Leftrightarrow \sin t = \frac{3k}{2}(\cos t + 2). \quad 6k - (2 - 3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6k - 2\cos t + 3k\cos t = 2\sin t - 2\cos t \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin t = \frac{3k}{2}(\cos t + 2). \end{aligned}$$

Обозначим $\frac{3k}{2} = a$, тогда последнее уравнение примет вид $\sin t = a(\cos t + 2)$. В системе координат, изображённой на рисунке, оно задаёт пучок прямых (отмечены оранжевым цветом), проходящих через точку $(-2; 0)$.



Точки пересечения этих прямых с тригонометрической окружностью представляют собой решения уравнения. Чтобы на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ были решения, прямая должна пересекать дугу окружности, выделенную зелёным цветом, и не проходить через точку $\frac{\pi}{4}$.

Угловой коэффициент горизонтальной прямой $a = 0$.

У прямой, проходящей через верхнюю точку дуги, угловой коэффициент $a = 0,5$.

У прямой, проходящей через точку $\frac{\pi}{4}$, угловой коэффициент $a = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot (2 + \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{7}$.

Таким образом, условие задачи выполняется при $0 \leq a < \frac{2\sqrt{2} - 1}{7}$ или $\frac{2\sqrt{2} - 1}{7} < a \leq \frac{1}{2}$.

Вернувшись к параметру $k = \frac{2a}{3}$, получаем:

$$0 \leq k < \frac{4\sqrt{2} - 2}{21} \text{ или } \frac{4\sqrt{2} - 2}{21} < k \leq \frac{1}{3}.$$

Комментарий.

Изложим идею решения иными словами.

Обозначим в исходном уравнении $x = \cos t$, $y = \sin t$. Далее заметим, что при условии $x \neq y$ можно избавиться от знаменателя, привести подобные члены и записать исходное уравнение в виде $y = \frac{3k}{2}(x + 2)$ (*). Отметим далее, что в силу введенных обозначений $x^2 + y^2 = 1$ (**). Поэтому искомыми являются те значения параметра, при которых прямые, задаваемые уравнением (*), имеют с единичной окружностью (**) точки пересечения, лежащие в первой координатной четверти ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) и отличные от точек прямой $y = x$.

Ответ: $0 \leq k < \frac{4\sqrt{2}-2}{21}$ или $\frac{4\sqrt{2}-2}{21} < k \leq \frac{1}{3}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Обозначим (Ж, З, К) упорядоченную тройку чисел, характеризующую состояние мешка на данный момент, т.е. количество жёлтых, зелёных и красных шаров в мешке. Изначально мешок находится в состоянии (1, 1, 2).

Если в первый раз из мешка вынимают жёлтый и зелёный шар и заменяют их красным шаром, то мешок переходит в состояние (0, 0, 3), когда все шары в мешке — красные. Если в первый раз из мешка вынимают зелёный и красный шар и заменяют их жёлтым шаром, то мешок переходит в состояние (2, 0, 1). Дальнейшие переходы из одного состояния в другое определяются однозначно и описываются цепочкой: (2, 0, 1) → (1, 1, 0) → (0, 0, 1). Видим, что в мешке остался красный шар. Аналогично, если в первый раз из мешка вынимают жёлтый и красный шар и заменяют их зелёным шаром, то мешок переходит в состояние (0, 2, 1). Дальнейшие переходы из одного состояния в другое определяются однозначно и описываются цепочкой: (0, 2, 1) → (1, 1, 0) → (0, 0, 1).

Видим, что в мешке снова остался красный шар. Таким образом, в любом случае оставшиеся в мешке шары (или шар) будут красными.

б) Легко видеть, что в мешке могут остаться зелёные шары: (3, 4, 5) → (4, 3, 4) → (3, 4, 3) → (2, 5, 2) → (1, 6, 1).

Докажем, что в любом случае оставшиеся в мешке шары будут зелёными. Каждый раз общее количество шаров в мешке уменьшается на 1, поэтому процесс завершится не более чем за 11 шагов. В начальном состоянии количество жёлтых и красных шаров нечётно, а количество зелёных шаров — чётно. Поскольку за один ход (выемку и замену шаров) количество шаров каждого цвета изменяется на 1, количества жёлтых и красных шаров всегда будут одной чётности, а количество зелёных шаров — противоположной чётности. Поэтому, никогда нель-

зя получить состояние, в котором количество зелёных и количество красных шаров оба будут нулевыми, также, как никогда нельзя получить состояние, в котором количество зелёных и количество жёлтых шаров будут нулевыми. Следовательно, в любом случае в конце мы получим состояние, в котором все оставшиеся в мешке шары будут зелёными.

в) Обозначим $f(C) = Ж - З$, где Ж и З — количества жёлтых и зелёных шаров в данном состоянии $C = (Ж, З, К)$. Предположим, что из состояния С за один шаг мы перешли в состояние $C' = (Ж', З', К')$

Докажем, что $f(C)$ и $f(C')$ дают одинаковые остатки при делении на 3. Для этого покажем, что разность $\Delta f = f(C') - f(C)$ делится на 3. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. $Ж = Ж - 1, З = З - 1, К = К + 2$. $\Delta f = f(C') - f(C) = (Ж - 3) - (Ж - 3) = 0$.

Случай 2. $Ж = Ж - 1, З = З + 2, К = К - 1$. $\Delta f = f(C') - f(C) = (Ж - 3) - (Ж - 3) = -3$.

Случай 3. $Ж = Ж + 2, З = З - 1, К = К - 1$. $\Delta f = f(C') - f(C) = (Ж - 3) - (Ж - 3) = 3$.

Видим, что $f(C)$ и $f(C')$ дают одинаковые остатки при делении на 3.

Для начального состояния $C_0(3, 4, 5)$ находим: $f(C_0) = Ж - З = 3 - 4 = -1$.

Общее количество шаров в мешке остаётся неизменным, поскольку каждый раз два вынутых шара заменяются двумя шарами другого цвета. Если бы в конце в мешке все шары оказались бы одного цвета, то конечным состоянием было бы одно из трёх состояний $(12, 0, 0)$, $(0, 12, 0)$ или $(0, 0, 12)$.

В любом случае $f(C_n)$ будет делиться на 3, и, значит, $f(C_0)$ и $f(C_n)$ дают разные остатки при делении на 3. Следовательно, применяя указанную процедуру, добиться того, чтобы в мешке оказались шары одного цвета, нельзя.

Ответ: а) красный; б) зелёный; в) нельзя.
