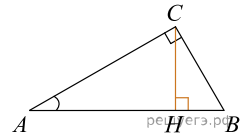


Вариант 228

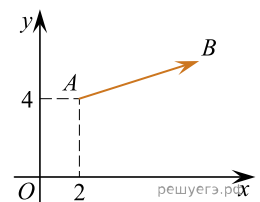
№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 5$, $\cos A = \frac{7}{25}$. Найдите BH .



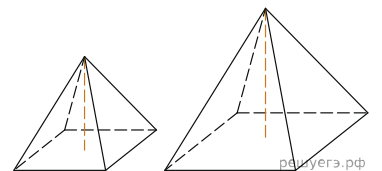
№ 2.

Вектор $\vec{AB}$ с началом в точке $A(2;4)$ имеет координаты $(6;2)$. Найдите абсциссу точки B .



№ 3.

Даны две правильные четырёхугольные пирамиды. Объём первой пирамиды равен 16. У второй пирамиды высота в 2 раза больше, а сторона основания в 1,5 раза больше, чем у первой. Найдите объём второй пирамиды.



№ 4.

Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

№ 5.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

№ 6.

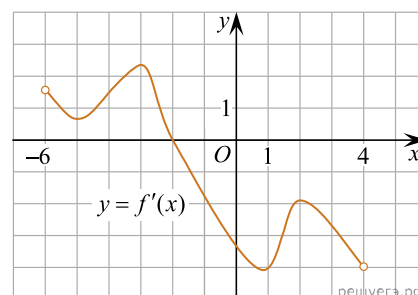
Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{6-2x} = 36$.

№ 7.

Найдите $61a - 11b + 50$, если $\frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9$.

№ 8.

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 4)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите абсциссу точки, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



№ 9.

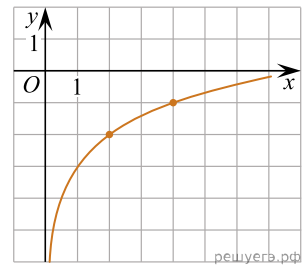
При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 10^5$ Па·м⁵, где p — давление газа в паскалях, V — объем газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p , равном $3,2 \cdot 10^6$ Па.

№ 10.

Заказ по изготовлению деталей ученик токаря может выполнить за 18 часов, а токарь— за 12 часов. Ученик начал выполнять такой заказ. Через какое время после начала выполнения заказа учеником нужно начать работу токарю, чтобы в этом заказе деталей, изготовленных учеником, было в два раза больше деталей, изготовленных токарем? Ответ дайте в часах.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 1$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2; 0]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin x} + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$.

№ 14.

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

а) Докажите, что плоскость $BA_1 C_1$ и прямая $B_1 D$ перпендикулярны.

б) Найдите косинус угла между плоскостями $BA_1 C_1$ и $BA_1 D_1$.

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1} \leq x$.

№ 16.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 27 млн рублей?

№ 17.

В прямоугольной трапеции $ABCD$ с меньшей боковой стороной $AB=4$ и $\angle ADC = \arctg 2$ из вершины D на диагональ AC опущен перпендикуляр DH . При этом треугольники ABC и DHA равны. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и DHA .

- а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна CD .
 - б) Найдите площадь четырёхугольника O_1CDO_2 .
-

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ 2xy = 2a - 1 \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

№ 19.

В детском оздоровительном лагере проходил праздник Нептуна, в котором участвовало ровно 2019 детей. Каждый из этих 2019 участников плеснул водой ровно в одного другого участника.

- а) Можно ли гарантированно найти 670 участников таких, что никто из них не обливал другого из этих 670 участников?
 - б) Можно ли гарантированно найти 675 участников таких, что никто из них не обливал другого из этих 675 участников?
 - в) Какое наибольшее количество участников можно гарантированно найти на этом празднике таких, что никто из них не обливал другого из этой группы участников?
-

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27272	4,8
2	27724	8
3	509620	72
4	282857	0,92
5	508887	0,8
6	510401	4
7	26806	10
8	508310	-2
9	27990	0,125

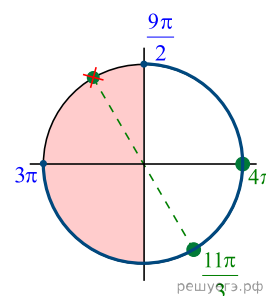
10	672795	8
11	509026	16
12	514704	6

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), или получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x > 0$. Поэтому множитель $\sqrt{\cos x}$ положителен. Тогда

$$\begin{aligned}
 (\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \cos x - 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \cos x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow (\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \cos x - 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \cos x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ x = 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$



б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $\frac{11\pi}{3}$ и 4π .

Ответ: а) $\left\{2\pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{11\pi}{3}, 4\pi$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что проекция прямой B_1D на плоскость ABB_1 это прямая AB_1 . Проекция прямой B_1D на плоскость BB_1C это прямая B_1C . $B_1C \perp BC_1$ и $AB_1 \perp A_1B$ как диагонали квадрата. Таким образом, по теореме о трех перпендикулярах $B_1D \perp BC_1$ и $B_1D \perp A_1B$. Тогда, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $B_1D \perp A_1BC_1$.

б) Пусть точка O — центр куба, а M — середина A_1B . $A_1D_1 \perp A_1B$, а MO — средняя линия треугольника BA_1D_1 , поэтому $MO \perp A_1B$. Треугольник BA_1C_1 — равносторонний, $C_1M \perp A_1B$, следовательно, искомый угол равен углу OMC_1 .

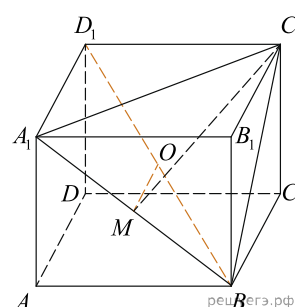
Примем длины ребер куба за a . Найдём стороны треугольника OMC_1 . Из треугольника BA_1D_1 , находим $OM = \frac{a}{2}$, из равностороннего треугольника BA_1C_1 находим

$$MC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Поскольку O — середина диагонали AC_1 , то $OC_1 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь применим к треугольнику OMC_1 теорему косинусов:

$$\begin{aligned} \cos \angle OMC_1 &= \frac{OM^2 + MC_1^2 - OC_1^2}{2 \cdot OM \cdot MC_1} = \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad \cos \angle OMC_1 = \frac{OM^2 + MC_1^2 - OC_1^2}{2 \cdot OM \cdot MC_1} = \\ &= \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1

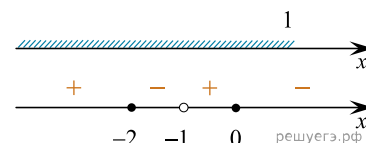
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1} \leq x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x^3}-x^2-x-1}{x+1} \leq 0$$

Заметим, что выражение x^2+x+1 принимает только положительные значения. Найдем корни числителя при условии $x \leq 1$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^3} = x^2+x+1 = 0 &\Leftrightarrow 1-x^3 = (x^2+x+1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1-x)(x^2+x+1) = (x^2+x+1)^2 &\Leftrightarrow 1-x = x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=-2. \end{cases} \end{aligned}$$



Решим неравенство методом интервалов (см. рис.), получим: $-2 \leq x < -1$ или $0 \leq x \leq 1$.

Ответ: $[-2, -1) \cup [0, 1]$.

Найдем корни числителя другим способом.

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^3} = x^2+x+1 = 0 &\Leftrightarrow 1-x^3 = (x^2+x+1)^2 \Leftrightarrow 1-x^3 = x^4+2x^3+3x^2+2x+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^4+3x^3+3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x^3+3x^2+3x+2)=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(x^3+2x^2+x^2+2x+x+2)=0 \Leftrightarrow x(x+2)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=-2. \end{cases} \end{aligned}$$

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. По формуле для переплаты Π при выплате суммы кредита $S = 18$ млн рублей дифференцированными платежами имеем:

$$\Pi = \frac{n+1}{200} rS,$$

где n — искомое число лет, а $r=10$ — величина платежной ставки в процентах (см. ГущинД.Д. [«Встречи с финансовой математикой»](#); для получения полного балла доказательство этих формул необходимо приводить на экзамене). По условию, переплата Π равна $27 - 18 = 9$ млн рублей,

$$9 = \frac{n+1}{2} \cdot 0,1 \cdot 18,$$

откуда $n = 9$.

Приведем другое решение.

Долг уменьшается каждый июль равномерно: $18, \frac{18}{n}(n-1), \dots, \frac{2 \cdot 18}{n}, \frac{18}{n}, 0$.

В январе долг возрастает на 10%, значит, долг в январе:

$$1,1 \cdot 18, \frac{1,1 \cdot 18(n-1)}{n}, \dots, \frac{2 \cdot 1,1 \cdot 18}{n}, \frac{1,1 \cdot 18}{n}.$$

Выплаты:

$$0,1 \cdot 18 + \frac{18}{n}, \frac{0,1 \cdot 18(n-1)}{n} + \frac{18}{n}, \dots, \frac{0,1 \cdot 18 \cdot 2}{n} + \frac{18}{n}, \frac{0,1 \cdot 18}{n} + \frac{18}{n}, 0,1 \cdot 18 + \frac{18}{n}, \frac{0,1 \cdot 18(n-1)}{n} + \frac{18}{n}, \dots, \frac{0,1 \cdot 18 \cdot 2}{n} + \frac{18}{n}, \frac{0,1 \cdot 18}{n} + \frac{18}{n}.$$

Тогда

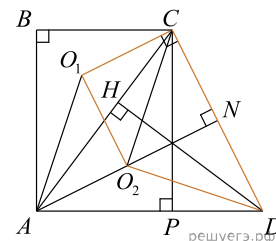
$$\begin{aligned} 18 + 0,1 \cdot 18 \left(\frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \right) &= 18 + 18 \frac{0,1(n+1)}{2} = 27 \Leftrightarrow 1,8 \frac{(n+1)}{2} = 9 \Leftrightarrow n = 9. \\ 18 + 0,1 \cdot 18 \left(\frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \right) &= 18 + 18 \frac{0,1(n+1)}{2} = 27 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1,8 \frac{(n+1)}{2} = 9 \Leftrightarrow n = 9. \end{aligned}$$

Ответ: 9.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) По условию треугольники ABC и DHA — прямоугольные и равные, поэтому $AC = AD$, а треугольник ADC — равнобедренный, $\angle ACD = \angle ADC$. Точка O_1 является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC . Треугольник AO_1C — равнобедренный, стороны AO_1 и O_1C равны как радиусы. Получаем:



$$\begin{aligned}\angle O_1CD &= \angle O_1CA + \angle ACD = \frac{1}{2}\angle BCA + \angle ACD = \\ &= \frac{1}{2}\angle CAD + \angle ACD = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle ACD) + \angle ACD = 90^\circ. \quad \angle O_1CD = \angle O_1CA + \angle ACD = \\ &= \frac{1}{2}\angle BCA + \angle ACD = \frac{1}{2}\angle CAD + \angle ACD = \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle ACD) + \angle ACD = 90^\circ.\end{aligned}$$

Луч AO_2 — биссектриса в равнобедренном треугольнике ACD . Значит, отрезок AO_2 — высота и медиана этого треугольника, $CN = ND$. Градусная мера внешнего угла треугольника равна сумме градусных мер двух углов, не смежных с ним, а градусная мера вписанного угла вдвое меньше градусной меры центрального угла, если они опираются на одну дугу, поэтому:

$$\angle DO_2N = \angle O_2AD + \angle O_2DA = \frac{1}{2}(\angle HAD + \angle HDA) = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ.$$

Отсюда следует, что треугольник DNO_2 — прямоугольный и равнобедренный, $O_2N = DN$.

Из прямоугольного треугольника ADN получаем:

$$AN = DN \cdot \operatorname{tg} \angle ADN = 2DN,$$

$$O_2N = DN = AO_2.$$

Хорда AC стягивает углы AO_1C и AO_2C , поэтому они равны. Значит, равны и треугольники AO_1C и AO_2C : $AO_1 = CO_2$, $CO_1 = AO_2$. Отсюда $O_1C = O_2N$, поэтому четырехугольник O_1O_2NC — прямоугольник по определению. Следовательно, прямая O_1O_2 параллельна CD .

б) Пусть отрезок CP — высота треугольника ACD , тогда $CP = AB$. Из прямоугольных треугольников CPD и AND соответственно находим:

$$PD \cdot \operatorname{tg} \angle PDC = CP \Leftrightarrow 2PD = 4 \Leftrightarrow PD = 2,$$

$$CD = \sqrt{CP^2 + PD^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5},$$

$$DN = CN = O_1O_2 = \sqrt{5},$$

$$AN = 2DN = 2\sqrt{5},$$

$$O_2N = \sqrt{5}.$$

Вычислим искомую площадь:

$$S_{O_1O_2DC} = \frac{1}{2} \cdot (O_1O_2 + CD) \cdot O_2N = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = 7,5.$$

Ответ: б) 7,5.

№ 18.

Критерии оценивания ответа на задание С5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4

Рассмотрены все возможные случаи. Получен верный ответ, но решение либо содержит пробы, либо вычислительную ошибку или описку.	3
Рассмотрены все возможные случаи. Получен ответ, но решение содержит ошибки.	2
Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.	1
Все прочие случаи.	0
Максимальное количество баллов	4

Решение. Система не изменяется при одновременной замене x на y , а y на x , при одновременной замене x на $-x$, а y на $-y$, при одновременной замене x на $-y$, а y на $-x$. Следовательно, если система имеет решение $(x_0; y_0)$, то она имеет и решения $(y_0; x_0)$, $(-x_0; -y_0)$ и $(-y_0; -x_0)$. Чтобы система имела ровно два решения, какие-то из пар должны совпадать.

Пары $(x_0; y_0)$ и $(-x_0; -y_0)$ совпадать не могут, поскольку в этом случае первое уравнение системы принимает вид $2a = 0$, а второе принимает вид $2a - 1 = 0$, что невозможно одновременно.

Если $(x_0; y_0) = (y_0; x_0)$, то первое уравнение системы принимает вид $2x^2 = 2a$, а второе принимает вид $2x^2 = 2a - 1$, что также невозможно.

Остается случай $(x_0; y_0) = (-y_0; -x_0)$. Теперь первое уравнение системы принимает вид $2x^2 = 2a$, а второе принимает вид $-2x^2 = 2a - 1$. В этом случае $2a = 1 - 2a$, откуда получаем единственное возможное значение $a = \frac{1}{4}$.

При найденном значении параметра система действительно имеет ровно два решения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}, \\ 2xy = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 0, \\ xy = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y, \\ y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = -\frac{1}{2}, \\ x = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $a = \frac{1}{4}$.

Приведем другое решение.

Заменим первое уравнение разностью, а второе — суммой исходных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ 2xy = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 1, \\ (x+y)^2 = 4a - 1. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

При $a < \frac{1}{4}$ второе уравнение системы, а значит, и вся система решений не имеет. При $a \geq \frac{1}{4}$ уравнения системы задают прямые:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1, \\ y = x + 1; \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - \sqrt{4a - 1}, \\ y = -x + \sqrt{4a - 1}. \end{cases}$$

Ясно (см.рис.), что при $a > \frac{1}{4}$ система имеет четыре решения (координаты точек A , B , C и D), а при $a = \frac{1}{4}$ — два решения (координаты точек M и N).

Ответ: $a = \frac{1}{4}$.

Приведём аналитическое решение.

Из второго уравнения системы находим, что число $x=0$ является решением системы, если $a = \frac{1}{2}$. При этом значении параметра система принимает вид

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

и имеет 4 решения: $(0; \pm 1)$ или $(\pm 1; 0)$. Такое значение параметра не подходит по условию. Следовательно, чтобы система имела ровно два решения, необходимо, чтобы $a \neq \frac{1}{2}$, а потому $x \neq 0$, и можно разделить обе части второго уравнения на x . Находим:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ y = \frac{2a-1}{2x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(\frac{2a-1}{2x}\right)^2 = 2a, \\ y = \frac{2a-1}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{(2a-1)^2}{4x^2} = 2a, \\ y = \frac{2a-1}{2x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 8ax^2 + (2a-1)^2 = 0, \\ y = \frac{2a-1}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ y = \frac{2a-1}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{(2a-1)^2}{4x^2} = 2a, \\ y = \frac{2a-1}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 8ax^2 + (2a-1)^2 = 0, \\ y = \frac{2a-1}{2x} \end{cases} \end{aligned}$$

Из второго уравнения полученной системы по каждому значению x можно найти единственное значение y . Значит, система имеет ровно два решения тогда и только тогда, когда ровно два решения имеет первое уравнение. Сделаем замену $t = x^2$, получим уравнение

$$4t^2 - 8at + (2a-1)^2 = 0.$$

Исходная задача равносильна требованию найти все значения параметра, при которых полученное уравнение при $a \neq \frac{1}{2}$ имеет ровно один положительный корень. Если полученное уравнение имеет два корня, то эти корни одного знака, так как по теореме Виета $t_1 \cdot t_2 = \frac{(2a-1)^2}{4} > 0$, значит, этот случай не подходит. Найдём четверть дискриминанта: $\frac{D}{4} = 16a^2 - 4(2a-1)^2 = 64a - 16$. Полученное выражение обращается в нуль при $a = \frac{1}{4}$. При этом значении параметра уравнение имеет корень $t = \frac{1}{4}$. Это решение положительное, поэтому найденное значение параметра искомое.

Ответ: $a = \frac{1}{4}$.

Приведем идею еще одного решения.

Заменим второе уравнение разностью первого и второго уравнений, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ (x-y)^2 = 1. \end{cases}$$

При $a \leq 0$ полученная система несовместна. При $a > 0$ первое уравнение задает окружность,

которая должна иметь ровно две общие точки с прямыми

$$y = x - 1,$$

$$y = x + 1.$$

Построив графики, убеждаемся, что искомый случай соответствует касанию окружности с найденными прямыми.

Ответ: $a = \frac{1}{4}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да. Поскольку всего было 2019 обливаний, найдется человек, которого облили не более одного раза. Выберем его в группу, а того, кого облил он, и (если такой есть) того, кто облил его, их выгоним из лагеря. Теперь осталось не менее 2016 человек, причем обливаний среди них было не больше, чем осталось людей. Поэтому опять найдется человек, которого облили не более одного раза. Выберем его в группу, а того, кого облил он, и (если такой есть) того, кто облил его, выгоним из лагеря. Продолжая процесс, получим в итоге группу, в которой будет не менее чем $\frac{2019}{3} = 673$ ребенка. Из них можно оставить 670 любых.

б) Нет. Разобьем всех детей на тройки, и пусть в каждой тройке первый обольет второго, второй — третьего, а третий — первого. Тогда из каждой тройки можно выбрать не более одного ребенка, а всего не более 673.

в) Как видно из решения пунктов а) и б), выбрать 673 ребенка можно всегда, а большее количество — не всегда. Поэтому ответ — 673.

Ответ: а) да; б) нет; в) 673.

