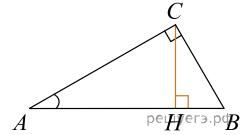


Вариант 229

№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $AB=13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите AH .



№ 2.

Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $2\sqrt{3}$ и 5, а угол между ними равен 150° . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

№ 3.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке M . Площадь треугольника ABC равна 3, $MS = 1$. Найдите объем пирамиды.

№ 4.

В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

№ 5.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальных кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 2 очка. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

№ 6.

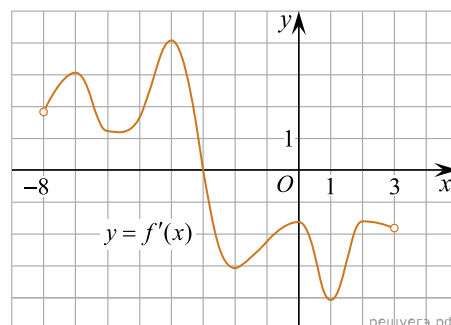
Решите уравнение $6^{x+1} - 6^x = 180$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{35 \cos 11^\circ}{\sin 79^\circ} + 7$.

№ 8.

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



№ 9.

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель — целое число от -2 до 2 .

Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{5In + Op + 3Tr + Q}{A}$.

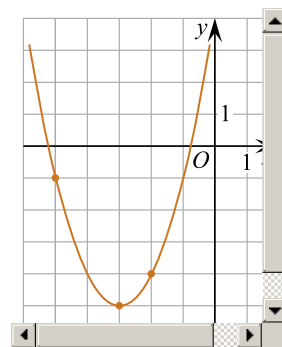
Если по всем четырем показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

№ 10.

Расстояние между городами A и B равно 435 км. Из города A в город B со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-9)$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = (x-2)^2 e^x$ на отрезке $[-5; 1]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $4\cos^4 x + 9\cos 2x - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

№ 14.

Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Точка M — середина ребра BC , точка L — середина ребра AB .

а) Докажите, что плоскость, параллельная прямой CL и содержащая прямую DM , делит ребро AB в отношении $3 : 1$, считая от вершины A .

б) Найдите угол между прямыми DM и CL .

№ 15.

Решите неравенство $\log_5((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5(x^2-7x+12) + \log_5(5-x)$.

№ 16.

В июле 2026 года Аристарх планирует взять кредит на восемь лет в размере 58 миллионов рублей. Условия его возврата таковы:

—каждый январь 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг будет возрастать на 5% по сравнению с концом предыдущего года;

—в июле 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

—каждый январь 2031, 2032, 2033 и 2034 годов долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

—в июле 2031, 2032, 2033 и 2034 годов долг должен быть на 7,5 миллионов меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2034 года долг должен быть полностью погашен.

Известно, что сумма выплат на первые четыре года равна сумме выплат за последние четыре года. Найдите общую сумму выплат за весь срок кредита.

№ 17.

Дана трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружности, построенные на боковых сторонах KL и MN как на диаметрах, пересекаются в точках A и B .

а) Докажите, что средняя линия трапеции лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB .

б) Найдите AB , если известно, что боковые стороны трапеции равны 26 и 28, а средняя линия трапеции равна 15.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$\frac{2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2)}{x^2 - 3x} = 0$$

имеет хотя бы один корень на промежутке $[0,5; 4]$.

№ 19.

Четыре натуральных числа a, b, c, d таковы, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1.$$

а) Могут ли все числа быть попарно различны?

б) Может ли одно из этих чисел равняться 9?

в) Найдите все возможные наборы чисел (без учета их порядка в наборе), среди которых ровно два числа равны.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27265	12,5
2	649909	-15
3	284355	1
4	282855	0,25
5	508890	0,1
6	676849	2
7	502106	42
8	27491	-3
9	319860	10
10	99590	240
11	508935	31
12	77483	4

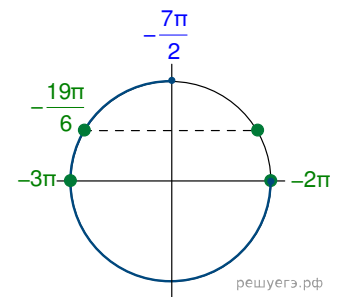
№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Выполним преобразования:

$$\sin x + \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{3} \sin 2x + 1 \Leftrightarrow \sin x + 1 - 2 \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие

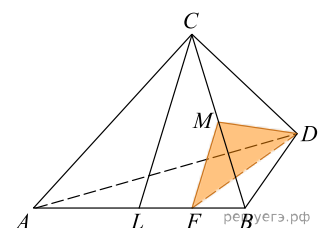
отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$. Получим числа: $-3\pi; -2\pi$ и $-3\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{19\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{19\pi}{6}; -3\pi; -2\pi$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть MF прямая параллельная прямой CL и F — точка ее пересечения с AB . Тогда плоскость DMF параллельна прямой CL по признаку параллельности прямой и плоскости. Отрезок MF — средняя линия треугольника BCL , поэтому $BF = \frac{1}{2}BL = \frac{1}{4}$. Это и требовалось доказать.



б) Искомый угол между прямыми DM и CL равен углу DMF . Обозначим угол DMF буквой α . $MF = \frac{1}{2}CL = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Выразим квадрат отрезка DF по теореме косинусов в двух треугольниках: DMF и BDF :

$$DF^2 = DM^2 + MF^2 - 2DM \cdot MF \cos \alpha = BD^2 + BF^2 - 2BD \cdot BF \cos 60^\circ. \quad DF^2 = DM^2 + MF^2 - 2DM \cdot MF \cos \alpha =$$

$$= BD^2 + BF^2 - 2BD \cdot BF \cos 60^\circ.$$

Тогда $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $BD = 1$. Подставляя числовые данные, получим:

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \alpha = 1 + \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2},$$

откуда $\cos \alpha = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\arccos \frac{1}{6}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Воспользуемся свойством логарифма:

$$\begin{aligned} \log_5 ((3-x)(x^2+2)) &\geq \log_5 (x^2-7x+12) + \log_5 (5-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 ((3-x)(x^2+2)) &\geq \log_5 ((x^2-7x+12)(5-x)), \\ 5-x &> 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(x^2+2) &\geq (x^2-7x+12)(5-x), \\ 5-x &> 0, \\ x^2-7x+12 &> 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(x^2+2) &\geq (x-3)(x-4)(5-x), \\ x &< 5, \\ x^2-7x+12 &> 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(x^2+2) &\geq (x^2-7x+12)(5-x), \\ 5-x &> 0, \\ x^2-7x+12 &> 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(x^2+2) &\geq (x-3)(x-4)(5-x), \\ x &< 5, \\ x^2-7x+12 &> 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x^2+2-x^2+9x-20) &\leq 0, \\ x &< 5, \\ x^2-7x+12 &> 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(9x-18) &\leq 0, \\ x &< 5, \\ (x-3)(x-4) &> 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 3. \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x^2+2-x^2+9x-20) &\leq 0, \\ x &< 5, \\ x^2-7x+12 &> 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(9x-18) &\leq 0, \\ x &< 5, \\ (x-3)(x-4) &> 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 3. \end{aligned}$$

Ответ: $[2; 3)$.

Приведём другое решение.

Учитывая, что $x^2+2 > 0$ при любом значении x , получаем:

$$\log_5 ((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5 (x^2-7x+12) + \log_5 (5-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5(3-x) + \log_5(x^2+2) \geq \log_5(3-x) + \log_5(4-x) + \log_5(5-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(x^2+2) \geq \log_5(4-x) + \log_5(5-x), \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow_{x < 3} \begin{cases} x^2+2 \geq x^2-9x+20, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-18 \geq 0, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 3. \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(x^2+2) \geq \log_5(4-x) + \log_5(5-x), \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow_{x < 3} \begin{cases} x^2+2 \geq x^2-9x+20, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-18 \geq 0, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 3.$$

Ответ: [2; 3).

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Так как с 2031 года по 2034 год долг ежегодно уменьшался на 7,5млнруб., а в 2034 году был полностью погашен, в 2031 году долг составлял $7,5 \cdot 4 = 30$ млнруб. Следовательно, с 2027 года по 2030 год долг ежегодно уменьшался на $\frac{58-30}{4} = 7$ млнруб. Составим график погашения кредита.

Год	Долг в начале года, млн руб.	Выплата, млн руб.	Остаток долга, млн руб.
2027	$1,05 \cdot 58$	$7 + 0,05 \cdot 58$	51
2028	$1,05 \cdot 51$	$7 + 0,05 \cdot 51$	44
2029	$1,05 \cdot 44$	$7 + 0,05 \cdot 44$	37
2030	$1,05 \cdot 37$	$7 + 0,05 \cdot 37$	30
2031	$1,1 \cdot 30$	$7,5 + 0,1 \cdot 30$	22,5
2032	$1,1 \cdot 22,5$	$7,5 + 0,1 \cdot 22,5$	15
2033	$1,1 \cdot 15$	$7,5 + 0,1 \cdot 15$	7,5
2034	$1,1 \cdot 7,5$	$7,5 + 0,1 \cdot 7,5$	0

Находим сумму выплат за весь срок погашения кредита (млн руб.):

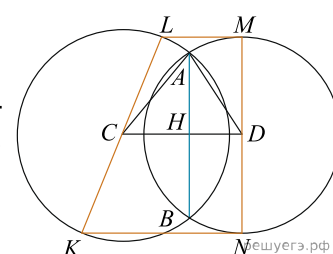
$$4 \cdot 7 + 4 \cdot 7,5 + 0,05(58 + 51 + 44 + 37) + 0,1(30 + 22,5 + 15 + 7,5) = 58 + 0,05 \cdot 190 + 0,1 \cdot 75 = 75.$$

Ответ: 75.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> и использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть *C* и *D* — центры окружностей с диаметрами *KL* и *MN* соответственно. Тогда *C* и *D* — середины боковых сторон трапеции, значит, *CD* — средняя линия трапеции. Линия центров *CD* пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам, следовательно, *CD* — серединный перпендикуляр к отрезку *AB*.



б) Пусть *H* — середина *AB*. Тогда *AH* — высота треугольника *CAD* со сторонами

$$CD = 15, AC = \frac{1}{2}KL = 14, AD = \frac{1}{2}MN = 13.$$

Пусть *p* — полупериметр треугольника *CAD*, *S* — площадь треугольника. Тогда

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21,$$

$$S = \sqrt{p(p-13)(p-14)(p-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

Значит,

$$AH = \frac{2S}{CD} = \frac{2 \cdot 84}{15} = \frac{2 \cdot 28}{5} = 11,2.$$

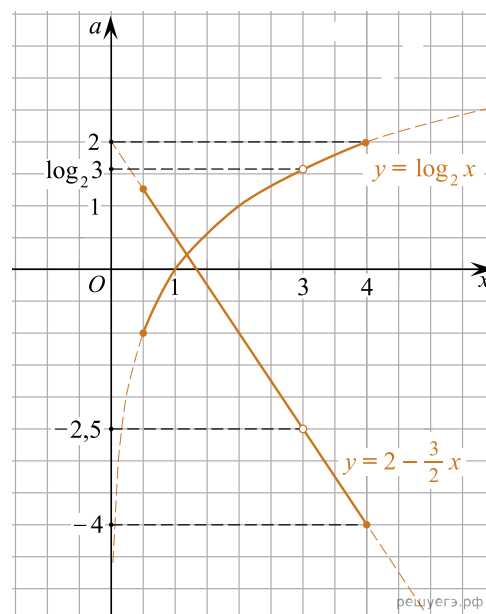
Следовательно, $AB = 2AH = 22,4$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом отличен от нуля. Чтобы найти нули числителя, получим квадратное относительно параметра уравнение и воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2)}{x^2 - 3x} = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2) = 0, \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a \left(2 - \frac{3}{2}x + \log_2 x \right) + \left(2 - \frac{3}{2}x \right) \cdot \log_2 x = 0, \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \log_2 x, \\ a = 2 - \frac{3}{2}x, \\ x \neq 3, \\ x > 0. \end{cases} \\
 & \frac{2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2)}{x^2 - 3x} = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2) = 0, \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a \left(2 - \frac{3}{2}x + \log_2 x \right) + \left(2 - \frac{3}{2}x \right) \cdot \log_2 x = 0, \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a = \log_2 x, \\ a = 2 - \frac{3}{2}x, \\ x \neq 3, \\ x > 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$



Построим график полученной системы на отрезке $[0,5;4]$ в системе координат xOa . По графику определяем, что исходное уравнение имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0,5;4]$ при $-4 \leq a < -2,5$, $-2,5 < a < \log_2 3$ или при $\log_2 3 < a \leq 2$.

Ответ: $[-4; -2,5) \cup (-2,5; \log_2 3) \cup (\log_2 3; 2]$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да, например $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$.

б) Да, например $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = 1$.

в) Если все четыре числа больше четырех, то сумма обратных к ним меньше четырех четвертых, то есть меньше 1. Если все числа не меньше четырех, то равенство возможно лишь для $a = b = c = d = 4$, но в этом случае равны все числа, а не ровно два из них. Наконец, ни одно из чисел не равно единице. Следовательно, среди чисел непременно есть 2 или 3. Будем считать, что $c = d$. Умножим обе части равенства на abc , получим: $abc = ac + bc + 2ab$. В силу симметрии a и b достаточно рассмотреть случай, когда 2 или 3 равно либо a , либо c . Рассмотрим эти варианты.

1. Пусть $a = 2$, тогда $2bc = 2c + bc + 4b$, то есть $bc - 2c - 4b = 0$, откуда $(b - 2)(c - 4) = 8$. Это дает варианты $b = 10, c = 5, b = c = 6$ (не подходит, поскольку три числа равны 6), $b = 4, c = 8, b = 3, c = 12$.

2. Пусть $a = 3$, тогда $3bc = 3c + bc + 6b$, то есть $2bc - 3c - 6b = 0$, откуда $(2b - 3)(2c - 6) = 18$. Это дает варианты $b = 2, c = 12; b = 3, c = 6$ (не подходит, поскольку дает две пары одинаковых чисел); $b = 6, c = 4$.

3. Пусть $c = 2$, тогда $2ab = 2a + 2b + 2ab$, откуда $a + b = 0$, что невозможно.

4. Пусть $c = 3$, тогда $3ab = 3a + 3b + 2ab$, а значит, $ab - 3a - 3b = 0$, откуда получаем, что $(a - 3)(b - 3) = 9$. Отсюда имеем: $a = 4, b = 12; a = 12, b = 4; a = b = 6$ (не подходит, поскольку дает две пары одинаковых чисел).

Из найденных наборов в ответ необходимо включить те, которые соответствуют различным наборам чисел, без учета их порядка в наборах. Это $\{2; 10; 5; 5\}, \{2; 4; 8; 8\}, \{2; 3; 12; 12\}, \{3; 6; 4; 4\}, \{4; 12; 3; 3\}$.

Ответ: а) да; б) да, в) $\{2; 10; 5; 5\}, \{2; 4; 8; 8\}, \{2; 3; 12; 12\}, \{3; 6; 4; 4\}, \{4; 12; 3; 3\}$.

