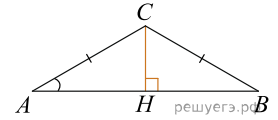


Вариант 23

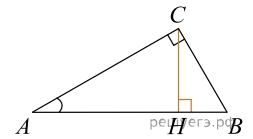
№ 1.

В треугольнике ABC $AC = BC = 7$, $\operatorname{tg} A = \frac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите AB .



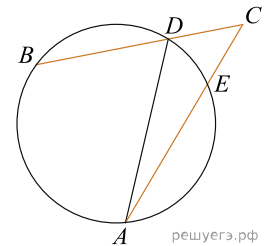
№ 2.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите высоту CH .



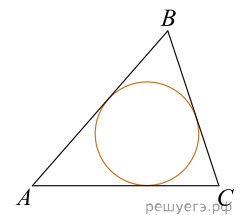
№ 3.

Угол ACB равен 42° . Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек D и E , равна 124° . Найдите угол DAE . Ответ дайте в градусах.



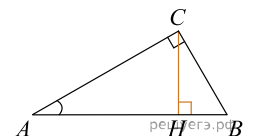
№ 4.

Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.



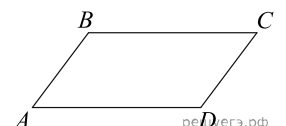
№ 5.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 3$, $\sin A = \frac{1}{6}$. Найдите AH .



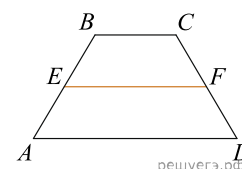
№ 6.

Один угол параллелограмма больше другого на 70° . Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.



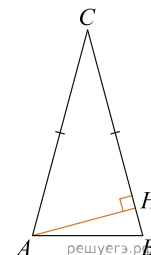
№ 7.

Средняя линия трапеции равна 28, а меньшее основание равно 18. Найдите большее основание трапеции.



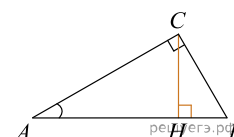
№ 8.

В треугольнике ABC $AC = BC = 4$, угол C равен 30° . Найдите высоту AH .



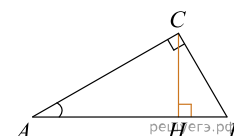
№ 9.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 24, $BH = 7$. Найдите $\sin A$.



№ 10.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 3$, $\cos A = \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите AH .



№ 11.

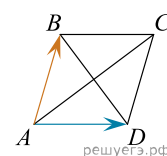
Найдите длину вектора $\vec{a}(6; 8)$.

№ 12.

Найдите длину вектора $\vec{a}(6; 8)$.

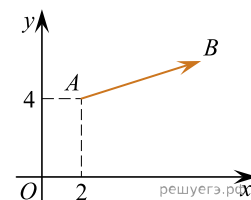
№ 13.

Диагонали изображенного на рисунке ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.



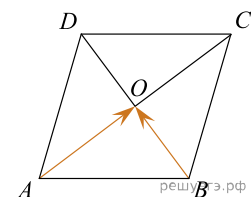
№ 14.

Вектор $\vec{AB}$ с началом в точке $A(2; 4)$ имеет координаты $(6; 2)$. Найдите ординату точки B .



№ 15.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{AO}$ и $\vec{BO}$.



№ 16.

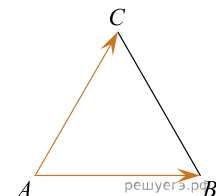
Даны векторы $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; -6)$ и $\vec{c} = (4; -3)$. Найдите значение выражения $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

№ 17.

Даны векторы $\vec{a}(3; 4)$ и $\vec{b}(-4; -3)$. Найдите косинус угла между ними.

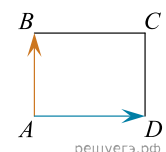
№ 18.

Стороны правильного треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$. Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$.



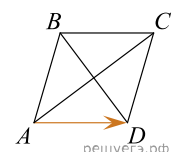
№ 19.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину разности векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.



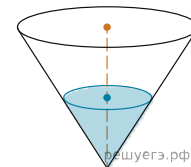
№ 20.

Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AD}$.



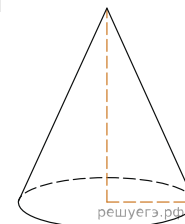
№ 21.

В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объем жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



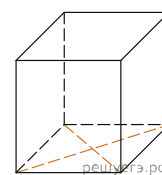
№ 22.

Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.



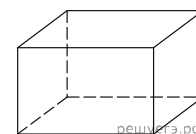
№ 23.

Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, а боковое ребро призмы равно 10.



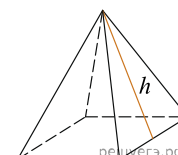
№ 24.

Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.



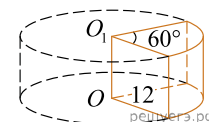
№ 25.

Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



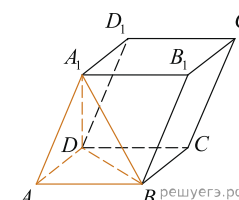
№ 26.

Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



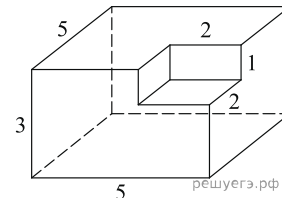
№ 27.

Найдите объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если объем треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 3.



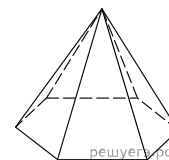
№ 28.

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



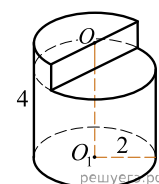
№ 29.

Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



№ 30.

Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



№ 31.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

№ 32.

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

№ 33.

На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18— за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

№ 34.

В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные— жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

№ 35.

За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки не будут сидеть рядом.

№ 36.

За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

№ 37.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что наступит исход ОР (в первый раз выпадает орёл, во второй — решка).

№ 38.

В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

№ 39.

В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос о Великой Отечественной войне. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос о Великой Отечественной войне.

№ 40.

Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 спортсменов из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

№ 41.

В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

№ 42.

Садовник принес две корзинки фруктов. В одной из них 2 яблока и 6 персиков, а в другой — 8 яблок и 12 персиков. Хозяйка, не глядя, взяла из каждой корзинки по одному фрукту. Какова вероятность того, что она достала два яблока или два персика?

№ 43.

В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

№ 44.

Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Мотор» по очереди играет с командами «Статор», «Стартер» и «Ротор». Найдите вероятность того, что «Мотор» будет начинать с мячом только вторую игру.

№ 45.

Вероятность того, что на тестировании по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

№ 46.

В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя не глядя переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

№ 47.

Стрелок стреляет в тире по восьми одинаковым мишеням. Вероятность попасть в каждую мишень при каждом выстреле одна и та же. Чтобы сбить все восемь мишеней, стрелку потребовалось 11 выстрелов. Какова вероятность того, что первыми пятью выстрелами стрелок сбил хотя бы четыре мишени?

№ 48.

Вероятность того, что на тестировании по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

№ 49.

В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

№ 50.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

№ 51.

Решите уравнение $8^{9-x} = 64^x$.

№ 52.

Найдите корень уравнения $\frac{x+89}{x-7} = \frac{-5}{x-7}$.

№ 53.

Найдите корень уравнения: $\frac{1}{4x-1} = 5$.

№ 54.

Найдите корни уравнения: $\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

№ 55.

Найдите корень уравнения $(x-1)^3 = -8$.

№ 56.

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+2} = 5^{x+5}$.

№ 57.

Найдите корень уравнения: $\frac{1}{9x-7} = \frac{1}{2}$.

№ 58.

Решите уравнение $\sqrt{x-2} = 6$.

№ 59.

Найдите решение уравнения: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-8} = 2^x$.

№ 60.

Решите уравнение $\frac{13x}{2x^2-7} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

№ 61.

Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

№ 62.

Найдите значение выражения $\frac{a^3 b^{-2}}{(2a)^2 b^{-5}} \cdot \frac{18}{ab^3}$ при $a = \sqrt{3} - 1$, $b = \frac{3}{17}$.

№ 63.

Найдите значение выражения $6x \cdot (3x^{12})^3 : (3x^9)^4$ при $x = 75$.

№ 64.

Найдите значение выражения $\frac{5 \operatorname{tg} 163^\circ}{\operatorname{tg} 17^\circ}$.

№ 65.

Найдите значение выражения $\frac{11a^6 b^3 - (3a^2 b)^3}{4a^6 b^6}$ при $b = 2$.

№ 66.

Найдите значение выражения $(7x - 13)(7x + 13) - 49x^2 + 6x + 22$ при $x = 80$.

№ 67.

Найдите значение выражения $3p(a) - 6a + 7$, если $p(a) = 2a - 3$.

№ 68.

Найдите значение выражения $7 \cdot 5^{\log_5 4}$.

№ 69.

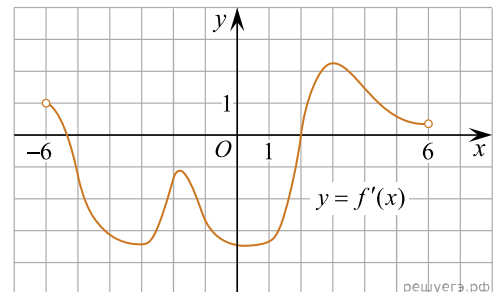
Найдите значение выражения $7^{2x-1} : 49^x : x$ при $x = \frac{1}{14}$.

№ 70.

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha + 2}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha + 6} = \frac{1}{3}$.

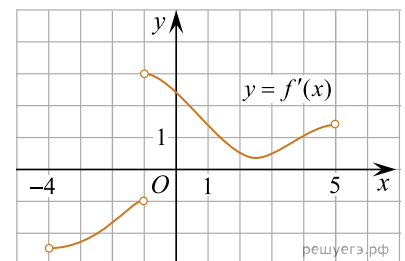
№ 71.

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



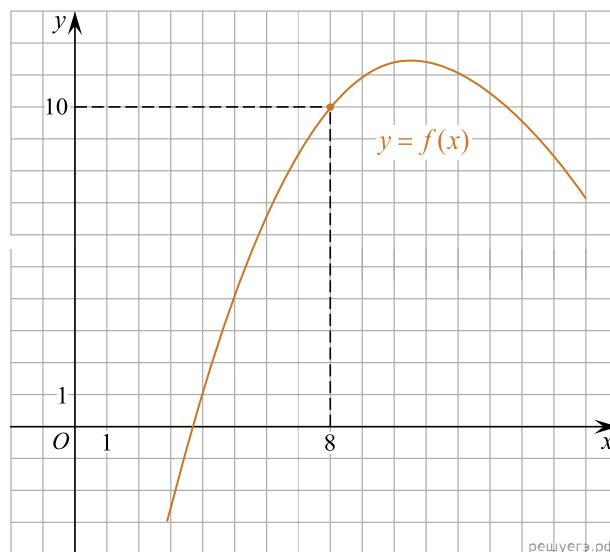
№ 72.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на полуинтервале $[-4; 5)$. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



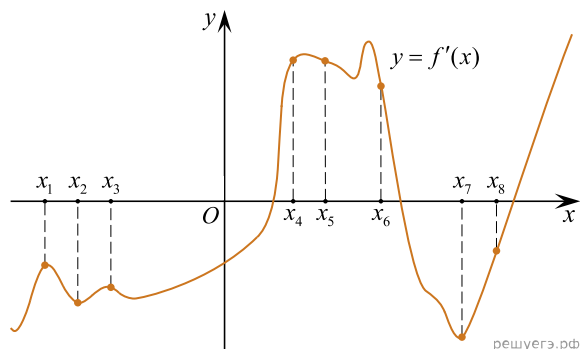
№ 73.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f'(8)$.



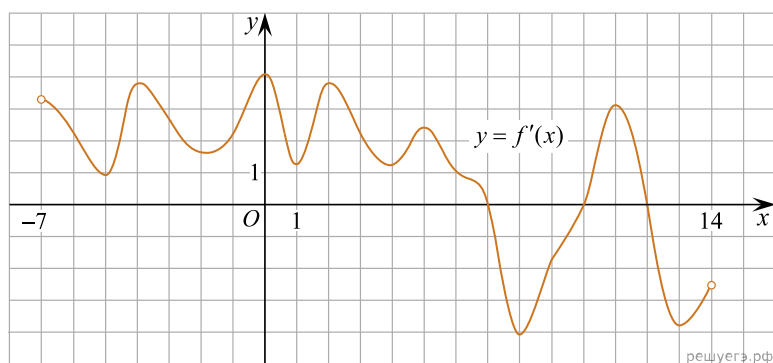
№ 74.

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



№ 75.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 9]$.

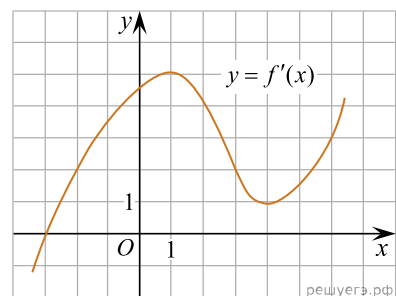


№ 76.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.

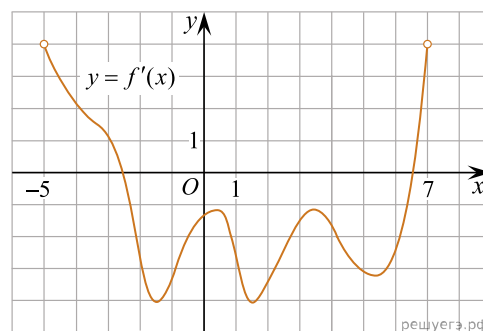
№ 77.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



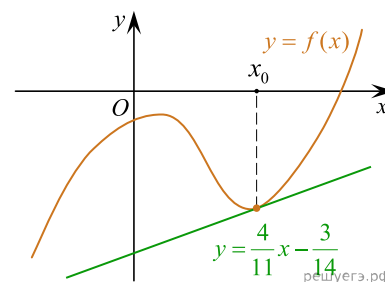
№ 78.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;7)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



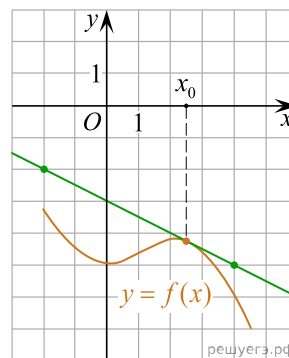
№ 79.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = -5f(x) - \frac{2}{11}x + \ln 3$ в точке x_0 .



№ 80.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



№ 81.

Наблюдатель находится на высоте h , выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 4 километров? Ответ выразите в метрах.

№ 82.

При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

№ 83.

Двигаясь со скоростью $v = 3$ м/с, трактор тащит сани с силой $F = 50$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = Fv \cos \alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 75 кВт (кВт — это $\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{с}}$).

№ 84.

Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость u меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 12$ с — период колебаний, $v_0 = 0,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, u — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

№ 85.

На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ — постоянная, r — радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м³ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 336 000 Н? Ответ выразите в метрах.

№ 86.

Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 20$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20 м?

№ 87.

Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_n = 20$ °С, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_b = 60$ °С до температуры T (°С), причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_b - T_n}{T - T_n}$, где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м.

№ 88.

Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 57$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 12$ км/ч². Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где t — время в часах. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ дайте в минутах.

№ 89.

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч². Скорость вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

№ 90.

Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин², $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

№ 91.

Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов теста, а Ваня — на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?

№ 92.

Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

№ 93.

Васе надо решить 434 задачи. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вася решил 5 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 14 дней.

№ 94.

Расстояние между городами A и B равно 470 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через 3 часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 60 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350 км от города A . Ответ дайте в км/ч.

№ 95.

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B , расстояние между которыми равно 98 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B . Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B . Ответ дайте в км/ч.

№ 96.

Иван и Алексей договорились встретиться в N -ске. Они едут к N -ску разными дорогами. Иван звонит Алексею и узнаёт, что тот находится в 168 км от N -ска и едет с постоянной скоростью 72 км/ч. Иван в момент звонка находится в 165 км от N -ска и ещё должен по дороге сделать 30-минутную остановку. С какой скоростью должен ехать Иван, чтобы прибыть в N -ск одновременно с Алексеем?

№ 97.

Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 24 км/ч , а вторую половину пути — со скоростью, на 16 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч .

№ 98.

Из двух городов, расстояние между которыми равно 560 км , навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 65 км/ч и 75 км/ч ?

№ 99.

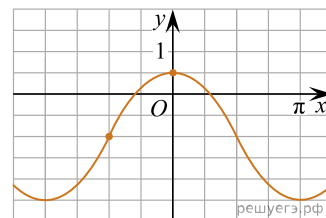
Даша и Маша пропалывают грядку за 12 минут, а одна Маша — за 20 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?

№ 100.

Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

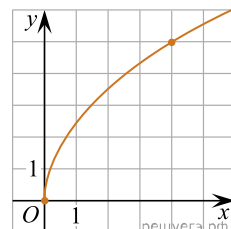
№ 101.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите a .



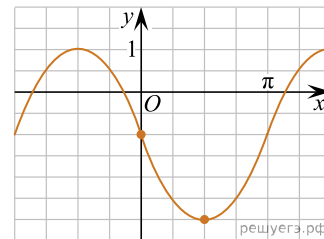
№ 102.

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 3,5$.



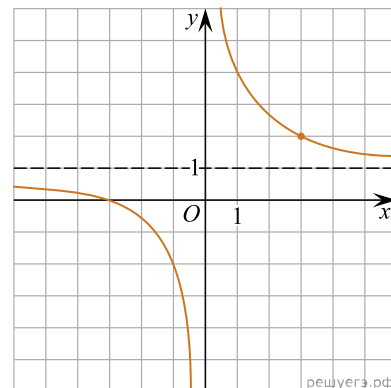
№ 103.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$, где a и b — целые числа. Найдите $y\left(\frac{25\pi}{6}\right)$.



№ 104.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,8.



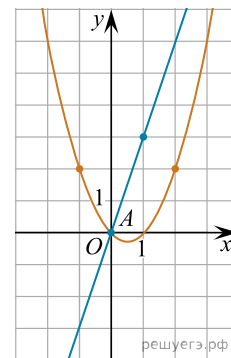
№ 105.

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(16)$.

□

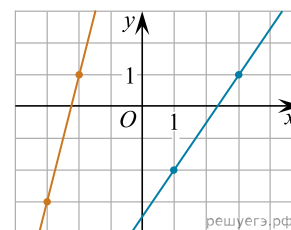
№ 106.

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



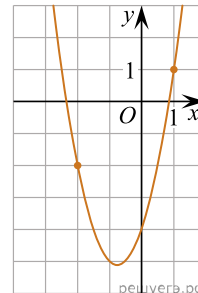
№ 107.

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



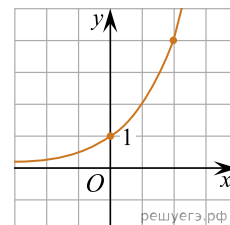
№ 108.

На рисунке изображён график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Найдите $f(-5)$.



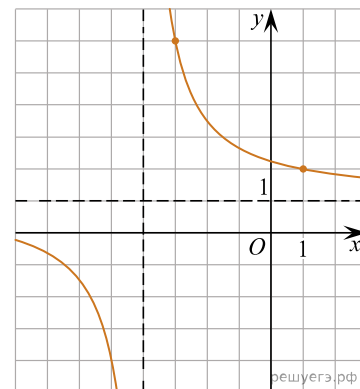
№ 109.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 32$.



№ 110.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx+a}{x+b}$. Найдите a .



№ 111.

Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$.

№ 112.

Найдите наименьшее значение функции $y = x + \frac{36}{x}$ на отрезке $[1; 9]$.

№ 113.

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$ на отрезке $[-2; 0]$.

№ 114.

Найдите точку минимума функции $y = (3-x)e^{3-x}$.

№ 115.

Найдите точку минимума функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$.

№ 116.

Найдите точку минимума функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36}$.

№ 117.

Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$.

№ 118.

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ на отрезке $[-4; -1]$.

№ 119.

Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $[1; 3]$.

№ 120.

Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-10; -1]$.

№ 121.

а) Решите уравнение $\frac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x \cos x - 1} = 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

№ 122.

а) Решите уравнение $\frac{\cos 2x + \sin x}{\sqrt{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{11\pi}{2}; 7\pi\right]$.

№ 123.

а) Решите уравнение $\frac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \cdot \log_{13}(2\sin^2 x)}{\log_{47}(\sqrt{2}\cos x)} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

№ 124.

- а) Решите уравнение $750^{\cos 3x} + 6 \cdot 125^{\frac{1}{3} + \cos 3x} = 5^{5 \cos 3x} + 30^{1 + \cos 3x}$.
- б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right]$.
-

№ 125.

- а) Решите уравнение $\frac{1 - \sin x + \sqrt{3} \sin 2x}{2\sqrt{3} \cos x - 3} = \frac{1}{3} + \sin x$.
- б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.
-

№ 126.

- а) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.
-

№ 127.

- а) Решите уравнение $2^{2x^2} - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2 + 2x} + 2^{11 + 4x} = 0$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(1 + \log_2 0, 25; \log_2 16, 1]$.
-

№ 128.

- а) Решите уравнение: $\sqrt{12 \sin x - \frac{9}{2} \cos 2x + \frac{17}{2}} = \frac{9}{8} + 4 \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x$.
- б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
-

№ 129.

- а) Решите уравнение $\sqrt{2 \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \sin(3\pi - 2x)} = -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$.
-

№ 130.

- а) Решите уравнение $5^{2 \sin 2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.
-

№ 131.

В пирамиде $DABC$ прямые, содержащие ребра DC и AB , перпендикулярны.

а) Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку E — середину ребра DB , и параллельно DC и AB . Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.

б) Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если $DC = 24$, $AB = 10$.

№ 132.

Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Ребро основания пирамиды равно $\sqrt{6}$, высота — $\sqrt{33}$.

а) Докажите, что сечение пирамиды, проходящее через середину ребра AD и точки M и T — середины ребер CS и BC соответственно, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите расстояние от середины ребра AD до прямой MT .

№ 133.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ через точку M на ребре AS параллельно плоскости SBD проведена плоскость α . Сечение пирамиды плоскостью α является прямоугольным треугольником.

а) Докажите, что $\angle ASB = 60^\circ$.

б) Найдите отношение $SM : MA$, если объем пирамиды $SABCD$ равен 675, а объем пирамиды, отсекаемой плоскостью α от пирамиды $SABCD$, равен 100.

№ 134.

Плоскость α , содержащая диагональ BD грани куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, пересекает ребро $B_1 C_1$ и делит площадь боковой поверхности куба в отношении 2 : 1.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро $B_1 C_1$ в отношении 2 : 1, считая от вершины B_1 .

б) В каком отношении плоскость α делит объем куба?

№ 135.

Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

а) Докажите, что P — середина BQ .

б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если $SD = 9$.

№ 136.

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если $A_1 C = BD = 2$.

№ 137.

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1 .
 - б) Найдите угол между плоскостями $AD_1 C_1$ и $A_1 D_1 C$.
-

№ 138.

Основанием прямой треугольной призмы $PQRP_1 Q_1 R_1$ является прямоугольный треугольник PQR с прямым углом R . Диагонали боковых граней $PP_1 Q_1 Q$ и $PP_1 R_1 R$ равны 17 и 15 соответственно, $PQ = 10$.

- а) Докажите, что треугольник $P_1 QR$ прямоугольный.
 - б) Найдите объем пирамиды $P_1 QRR_1$.
-

№ 139.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 9, а боковое ребро $SA=6$. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK:KB = SM:MC=2:7$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро SB в отношении 2 : 7, считая от вершины S .
 - б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM .
-

№ 140.

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 5$.

- а) Найдите длину отрезка $A_1 K$, где K — середина ребра BC .
 - б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и $BB_1 C_1$.
-

№ 141.

Решите неравенство $\frac{\log_{1-2x}((x+1)(1-4x+4x^2))}{\log_{x+1}(1-2x)} \leq -1$.

№ 142.

Решите неравенство: $25^{x^2-2x+10} - 0,2^{2x^2-4x-80} \leq 0$.

№ 143.

Решите неравенство $\left(x + \frac{3}{x}\right) \left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geq 4 \left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2$.

№ 144.

Решите неравенство $\frac{\log_4(16x^4) + 11}{\log_4^2 x - 9} \geq -1$.

№ 145.

Решите неравенство: $\frac{9|x^2 - 22x + 105|}{17 - |x + 2|} - |22x - x^2 - 105| \leq 0$.

№ 146.

Решите неравенство: $3|x + 3| - 3x \leq 14 - |2 - x|$.

№ 147.

Решите неравенство

$$\log_2 \left((7^{-x^2} - 3) \times (7^{-x^2+16} - 1) \right) + \log_2 \frac{7^{-x^2} - 3}{7^{-x^2+16} - 1} > \log_2 (7^{7-x^2} - 2)^2.$$

№ 148.

Решите неравенство $\log_{x+2}(x^2 - 2) \geq 2$.

№ 149.

Решите неравенство: $5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0$.

№ 150.

Решите неравенство $\frac{1}{3^x - 1} + \frac{9^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x+3} + 3}{3^x - 9} \geq 3^{x+1}$.

№ 151.

Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется $r\%$ этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 13% больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r .

№ 152.

По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение — 12 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 10% по сравнению с началом года. Начисленные проценты планируются оставлять вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов потребуются дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и во второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и в четвёртый годы. Найдите наименьшее значение n , при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее значение m , что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

№ 153.

Евгений взял 16 января кредит на сумму 1млнруб. на 6 месяцев. Условия его возврата таковы. Каждый месяц 1-го числа долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга. Каждый месяц 15-го числа долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг, млн руб.	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет составлять более 1,25 млн руб.

№ 154.

15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

№ 155.

15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 2466тысячи рублей. Какую сумму (в тыс. руб.) нужно выплатить банку за последние 12 месяцев?

№ 156.

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

№ 157.

Алексей планирует 15 декабря взять в банке кредит на 2 года в размере 1806000 рублей. Сотрудник банка предложил Алексею два различных варианта погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

Вариант 1	— Каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года; — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; — кредит должен быть полностью погашен за два года двумя равными платежами.
Вариант 2	— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца; — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; — 15 числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца; — к 15-му числу 24 месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат банку по более выгодному для Алексея варианту погашения кредита?

№ 158.

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 900 000 рублей на 13 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа с 1 по 12 месяц долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму;
- 15-го числа 13 месяца долг должен быть погашен.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 12 месяца, если всего было выплачено 1134 тысяч рублей?

№ 159.

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 500 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть 200 тыс. руб.;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Сколько рублей составит платёж в 2029 году?

№ 160.

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 31% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 69 690 821 рубль.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

№ 161.

Окружность проходит через вершины B и C прямоугольного треугольника ABC и пересекает катет AC в точке K , а гипотенузу AB — в точке M .

а) Докажите, что треугольники AKM и ABC подобны.

б) Найдите площадь четырехугольника $CKMB$, если радиус окружности равен $\sqrt{29}$, катеты AC и BC равны 12 и 4 соответственно.

№ 162.

На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно так, что $BD + CE = BC$, точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC .

а) Докажите, что точки A , E , I и D лежат на одной окружности.

б) Точка D' симметрична точке D относительно прямой AI . Найдите радиус описанной окружности треугольника EDD' , если $D'E = 2$, а радиус вписанной окружности треугольника ABC равен $\frac{9}{2}$.

№ 163.

Точки K и M — середины сторон AB и BC соответственно параллелограмма $ABCD$. Отрезки AM и CK пересекаются в точке P .

а) Докажите, что точка P принадлежит диагонали BD .

б) Найдите площадь параллелограмма, если известно, что $AB = 17$, $BP = 4$ и $BC = 25$.

№ 164.

Точка A расположена вне квадрата $KLMN$ с центром O , причём треугольник KAN прямоугольный ($\angle A = 90^\circ$) и $AK = 2AN$. Точка B — середина стороны KN .

а) Докажите, что прямая BM параллельна прямой AN .

б) Прямая AO пересекает сторону ML квадрата в точке P . Найдите отношение $LP : PM$.

№ 165.

Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$ и пересекает BC и CD в точках E и K соответственно.

а) Докажите, что отрезки AE и AK равны.

б) Найдите AD , если $CE = 48$, $DK = 20$, $\cos \angle BAD = 0,4$.

№ 166.

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C продолжение биссектрисы CK этого треугольника (точка K лежит на гипотенузе AB) пересекает его описанную окружность в точке L . Прямая, проходящая через точку L и середину гипотенузы AB , пересекает вторично описанную окружность треугольника ABC в точке M и пересекает катет BC в точке P .

- а) Докажите, что прямая MK является касательной к описанной окружности треугольника BMP .
 - б) Найдите площадь треугольника MKP , если $AC = 3$ и $BC = 4$.
-

№ 167.

Точки P , Q , W делят стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношении $AP : PB = CQ : QB = CW : WD = 3 : 4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW , равен 10, $PQ = 16$, $QW = 12$, угол PWQ — острый.

- а) Докажите, что треугольник PQW — прямоугольный.
 - б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.
-

№ 168.

В треугольнике KLM на продолжении стороны KL за точку L взята точка D , точка N лежит на пересечении биссектрисы угла MLD и прямой KM . Отрезки KC и NP — биссектрисы треугольника KLN , $\angle PMC = 90^\circ$.

- а) Докажите, что $\angle KLM = 60^\circ$.
 - б) Найдите площадь треугольника LMC , если $KL = 10$ и $ML = 5$.
-

№ 169.

В параллелограмме $ABCD$ расположены две равные непересекающиеся окружности. Первая касается сторон AD , AB и BC , вторая — сторон AD , CD и BC .

а) Докажите, что общая внутренняя касательная l окружностей проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

б) Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а прямая l касается окружностей в точках M и N . Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках M , N и в центрах окружностей, если $AD = 16$, а расстояние между центрами окружностей равно 10.

№ 170.

Две касательные к окружности, CA и CB , пересекаются в точке C (A и B — точки касания). Вторая окружность проходит через точку C , касается прямой AB в точке B и пересекает первую окружность в точке M , отличной от B .

а) Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCM , если $BC = 10$, а синусы углов BAM и ABM равны соответственно $0,6$ и $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

№ 171.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - 4x + a}{5x^2 - 6ax + a^2} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

№ 172.

Найдите значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 - 5xy + y^2 + x - y - 2 = 0, \\ y = ax - 5 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

№ 173.

Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a+1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

№ 174.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + \left| 1 - \frac{|x|}{2} \right| = 1$$

имеет ровно два различных корня.

№ 175.

Найдите (в градусах) сумму всех значений параметра α , где $0^\circ < \alpha < 1000^\circ$, для каждого из которых существует хотя бы одно число $x \in [1; 2]$, удовлетворяющее уравнению

$$1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|}.$$

№ 176.

Найдите наибольшее значение параметра a , при котором уравнение

$$ax^2 = |2x - 1|\sqrt{2x - 1} + |x - 1|\sqrt{4x - 1}$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни этого уравнения для такого значения a .

№ 177.

Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| + |y| - 10) \cdot (9 - |xy|) = 0, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет не менее 12 решений.

№ 178.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(a^2 - 6a + 9)(2 + 2\sin x - \cos^2 x) + (12a - 18 - 2a^2)(1 + \sin x) + a + 3 = 0$$

не имеет решений.

№ 179.

Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x \leq 2a + 6, \\ 6x \geq x^2 + a^2, \\ x + a > 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[1; 2]$.

№ 180.

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(|x + 2| + |x - a|)^2 - 5(|x + 2| + |x - a|) + 3a(5 - 3a) = 0$$

имеет ровно два решения.

№ 181.

Бесконечная непостоянная арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ состоит из натуральных чисел.

- а) Если $a_4 = 12$, может ли a_{42} делиться на 11?
 - б) Может ли быть $a_1 = 13$, если a_{73} и a_{95} делятся на 9?
 - в) Первый член прогрессии $\{a_n\}$ делится без остатка на 19, второй — на 23, третий — на 31. Чему равна наименьшая возможная разность d этой прогрессии? Найдите наименьшее возможное значение a_5 при наименьшем возможном значении d .
-

№ 182.

Леша задумал двузначное число (от 10 до 99). Гриша пытается его отгадать, называя двузначные числа. Если Гриша правильно называет число, или же одну цифру называет правильно, а в другой ошибается не более чем на единицу, то Леша отвечает «тепло»; в остальных случаях Леша отвечает «холодно». (Например, если задумано число 65, то, назвав 65, 64, 66, 55 или 75, Гриша услышит в ответ «тепло», а в остальных случаях услышит «холодно».)

- а) Покажите, что нет способа, при котором Гриша гарантированно узнает число, истратив 18 попыток.
 - б) Придумайте способ, при котором Гриша гарантированно узнает число, истратив 24 попытки (какое бы число ни задумал Леша).
 - в) А за 22 попытки получится?
-

№ 183.

Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

- а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.
 - б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?
 - в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из трёхзначных чисел?
-

№ 184.

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

- а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?
 - б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?
 - в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?
-

№ 185.

Дано натуральное трёхзначное число n , в записи которого нет нулей. Для этого числа составим дробь $f(n)$, в числителе которой само число n , а в знаменателе — произведение всех цифр числа.

- а) Приведите пример такого числа n , для которого $f(n) = \frac{119}{24}$.
- б) Существует ли такое n , что $f(n) = \frac{125}{24}$?
- в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $f(n)$, если она равна несократимой дроби со знаменателем 24?

№ 186.

За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

- а) Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а и б?
-

№ 187.

Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел.

- а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_7$ ровно три числа делятся на 100?
б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100?
в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$?
-

№ 188.

На доске написали несколько необязательно различных трехзначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и третью цифры (например, число 123 заменили на число 321).

- а) Могла ли сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза меньше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.
-

№ 189.

- а) Существуют ли натуральные числа m и n , такие, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + mx + n$ равен 17?
б) Существуют ли натуральные числа m и n , такие, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + mx + n$ равен 54?
в) Какое наименьшее значение принимает дискриминант D квадратного трехчлена $x^2 + (3m + n)x + (3n + m)$, если известно, что числа m, n и D — натуральные?
-

№ 190.

Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n .

- а) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 9a_4$?
б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?
в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $3na_{n+1} = (n^2 - 1)a_n$?
-

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27288	8

2	27267	2,5
3	27886	20
4	27624	6
5	27268	17,5
6	27807	125
7	27820	38
8	27795	2
9	27342	0,28
10	27271	17,5
11	27663	10
12	27663	10
13	27715	12
14	27725	6
15	27719	0
16	647124	28
17	649915	-0,96
18	27720	6
19	27709	10
20	27713	10
21	318145	490
22	27160	60
23	27062	248
24	27076	48
25	27069	340
26	27198	144
27	77154	18
28	25601	110
29	27070	360
30	27200	14
31	282854	0,5
32	500250	0,92
33	320190	0,1
34	320193	0,46
35	325913	0,75
36	325904	0,25
37	320185	0,25
38	282858	0,36

39	504230	0,26
40	285925	0,36
41	621772	0,16
42	672742	0,55
43	508840	0,2
44	526004	0,125
45	320198	0,07
46	500998	0,6
47	663475	0,5
48	320198	0,07
49	320201	0,027
50	320172	0,52
51	77378	3
52	689090	-94
53	77384	0,3
54	26669	-4
55	282850	-1
56	510820	-3
57	77383	1
58	500032	38
59	26671	4
60	77367	-0,5
61	549336	-0,96
62	658792	4,5
63	77397	150
64	26767	-5
65	26817	-0,5
66	26898	333
67	26818	-2
68	26844	28
69	77402	2
70	26791	2,25
71	6429	14
72	551782	-10
73	40129	1,25
74	317541	3
75	27494	1

76	119977	59
77	40131	-3
78	27498	18
79	525702	-2
80	510403	-0,5
81	27984	1,25
82	27953	25
83	28007	60
84	28012	0,0025
85	27968	2
86	28004	15
87	27995	30
88	27964	30
89	27982	5000
90	27962	2
91	99621	24
92	99575	100
93	99581	57
94	99591	70
95	26582	7
96	502291	90
97	26578	32
98	99588	4
99	99617	30
100	99584	30
101	509123	1,5
102	509118	1,96
103	676931	-2
104	508961	-15
105	639672	4
106	642407	4
107	509197	-5
108	508911	31
109	660992	5
110	509001	9
111	77444	3
112	77473	12

113	77434	12
114	26712	4
115	77491	1
116	26723	10
117	245174	3
118	628240	-9
119	315127	-6
120	77470	-10

№ 121.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Решим уравнение:

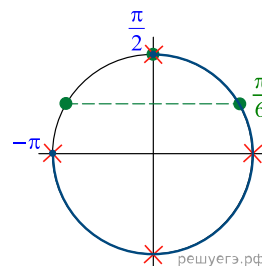
$$\frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\operatorname{tg} x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = 1, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\operatorname{tg} x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = 1, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни на промежутке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрической окружности (см. рис.). Получим число $\frac{\pi}{6}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{\pi}{6}$.

№ 122.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2

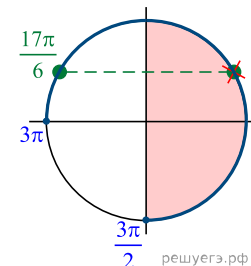
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Левая часть уравнения имеет смысл при $-\cos x \geq 0$. Выражение $\sqrt{-\cos x} + 1$ положительно при всех допустимых значениях x .

Значит,

$$(2 \sin x - 1)(\sqrt{-\cos x} + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\cos x \geq 0, \\ 2 \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$(2 \sin x - 1)(\sqrt{-\cos x} + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\cos x \geq 0, \\ 2 \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $\frac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{17\pi}{6}$.

№ 123.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Пусть $t = \log_2(2 \cos x)$, тогда имеем:

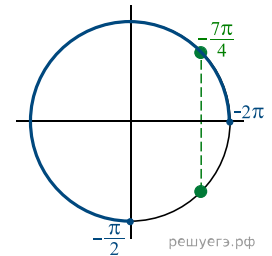
$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = 4. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \log_2(2 \cos x) = \frac{1}{2}, \\ \log_2(2 \cos x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x = \sqrt{2}, \\ 2 \cos x = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \begin{cases} \log_2(2 \cos x) = \frac{1}{2}, \\ \log_2(2 \cos x) = 4 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x = \sqrt{2}, \\ 2 \cos x = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$. Получим число $-\frac{7\pi}{4}$.



Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$.

№ 124.

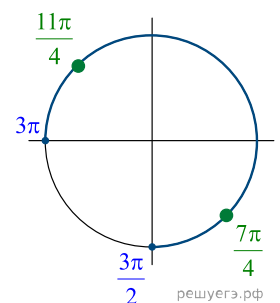
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\sin x} \cdot 5^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x} \Leftrightarrow 5^{\sin x} = 5^{-\cos x} \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1, \quad 3^{\sin x} \cdot 5^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x} \Leftrightarrow 5^{\sin x} = 5^{-\cos x} \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1,$$

откуда следует, что $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$. Получим числа $\frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}$.



Ответ: а) $\{-\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\}$; б) $\frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}$.

№ 125.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Сведем уравнение к более простому, затем решим полученное уравнение введением вспомогательного угла:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -\sqrt{3} \cos x, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -\sqrt{3} \cos x, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -\sqrt{3} \cos x, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -\sqrt{3} \cos x, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -\sqrt{3} \cos x, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

б) Отберем корни при помощи двойного неравенства:

$$\begin{aligned}
-\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq \frac{3\pi}{2} & \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{6} \leq 2k \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0. \quad -\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow -\frac{7}{6} \leq 2k \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0.
\end{aligned}$$

Найденному значению параметра соответствует число $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{\pi}{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2

Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Уравнение имеет смысл при $\sin x < 0$.

Если $\log_{11}(-\sin x) = 0$, то $\sin x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_{11}(-\sin x) \neq 0$, то $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$, откуда $\cos x = 2$ или $\cos x = \frac{1}{2}$.

Уравнение $\cos x = 2$ не имеет решений.

Уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ имеет корни $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что $\sin x < 0$, получаем: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$. Решим неравенства:

$$\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq k \leq \frac{17}{12}, \text{ откуда } k = 1.$$

$$\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq k \leq \frac{3}{2}, \text{ откуда } k = 1.$$

Соответствующие найденным значениям параметров корни: $\frac{3\pi}{2}$ и $\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$.

№ 127.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Разделим обе части уравнения на положительное выражение 2^{4x} и решим квадратное уравнение:

$$2^{2x^2} - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2+2x} + 2^{11+4x} = 0 \Leftrightarrow 2^{2x^2-4x} - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2-2x} + 2^{11} = 0 \Leftrightarrow 2^{2x^2} - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2+2x} + 2^{11+4x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x^2-4x} - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2-2x} + 2^{11} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^{x^2-2x})^2 - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2-2x} + 2^3 \cdot 2^8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-2x} = 2^3, \\ 2^{x^2-2x} = 2^8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -1, \\ x = 4, \\ x = -2. \end{cases} \Leftrightarrow (2^{x^2-2x})^2 - (2^3 + 2^8) \cdot 2^{x^2-2x} + 2^3 \cdot 2^8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-2x} = 2^3, \\ 2^{x^2-2x} = 2^8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -1, \\ x = 4, \\ x = -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-2x} = 2^3, \\ 2^{x^2-2x} = 2^8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -1, \\ x = 4, \\ x = -2. \end{cases}$$

б) Заметим, что $1 + \log_2 0,25 = 1 - 2 = -1$ и $\log_2 16,1 > \log_2 16 = 4$, поэтому на заданном промежутке лежат корни $x=3$ и $x = 4$.

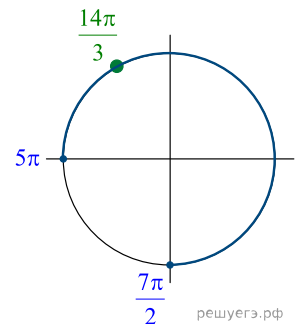
Ответ: а) $\{-2; -1; 3; 4\}$, б) $\{3; 4\}$.

№ 128.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\cos^2 x - 4\cos x + 3} = \sqrt{\cos x + 6} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 6 \geq 0, \\ 2\cos^2 x - 4\cos x + 3 = \cos x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq -6, \\ 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq -6, \\ 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 3, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \sqrt{2\cos^2 x - 4\cos x + 3} = \sqrt{\cos x + 6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 6 \geq 0, \\ 2\cos^2 x - 4\cos x + 3 = \cos x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq -6, \\ 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 3, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \sqrt{2\cos^2 x - 4\cos x + 3} = \sqrt{\cos x + 6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 6 \geq 0, \\ 2\cos^2 x - 4\cos x + 3 = \cos x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq -6, \\ 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 3, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \sqrt{2\cos^2 x - 4\cos x + 3} = \sqrt{\cos x + 6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 6 \geq 0, \\ 2\cos^2 x - 4\cos x + 3 = \cos x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq -6, \\ 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 3, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \sqrt{2\cos^2 x - 4\cos x + 3} = \sqrt{\cos x + 6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 6 \geq 0, \\ 2\cos^2 x - 4\cos x + 3 = \cos x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq -6, \\ 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 3, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \sqrt{2\cos^2 x - 4\cos x + 3} = \sqrt{\cos x + 6} \Leftrightarrow \end{aligned}$$



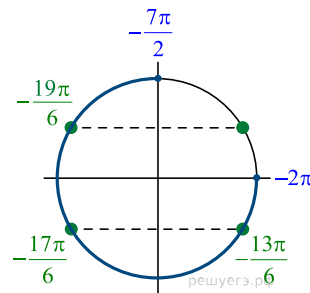
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), или получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Пусть $t = 9^{\sin x}$, тогда исходное уравнение запишется в виде $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3, \\ t = \frac{1}{3}. \end{cases}$

При $t = 3$ получим: $9^{\sin x} = 3 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$

При $t = \frac{1}{3}$ получим: $9^{\sin x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi]$. Получим числа: $-\frac{19\pi}{6}, -\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}.$



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{19\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}.$

№ 131.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Построим прямые EK, EM, KF , такие что: $EK \parallel DC, EM \parallel AB, KF \parallel AB$, тогда $MF \parallel DC$ искомое сечение параллелограмм $EKFM$. Покажем, что $EKFM$ прямоугольник:

$$EM \parallel AB, EK \parallel DC, DC \perp AB \Rightarrow EM \perp EK.$$

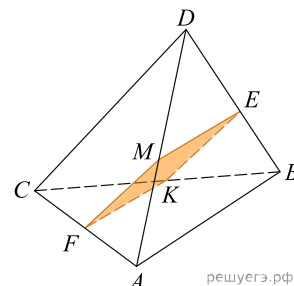
б) Заметим, что $EK \parallel DC$ и E — середина DB , тогда EK — средняя линия треугольника DBC . Значит, $EK = \frac{1}{2}DC = 12$, аналогично $ME = \frac{1}{2}AB = 5$. $EKMF$ — прямоугольник, поэтому получаем:

$$MK^2 = ME^2 + EK^2 \Leftrightarrow MK^2 = 12^2 + 5^2 \Leftrightarrow MK = 13.$$

Пусть прямая MK пересекает прямую EF в точке O , тогда $MO = OK = EO = OF = \frac{1}{2}MK = \frac{13}{2}.$

Заметим, что $EM < EK$ (чтобы косинус в ответе получился положительным, а полученный угол — острым). Применим теорему косинусов в треугольнике EOM :

$$EM^2 = MO^2 + OE^2 - 2MO \cdot OE \cdot \cos \angle EOM \Leftrightarrow \cos \angle EOM = \frac{2 \cdot \frac{169}{4} - 25}{\frac{169}{169}} = \frac{119}{169}. \quad EM^2 = MO^2 + OE^2 - 2MO \cdot OE \cdot \cos \angle EOM \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \cos \angle EOM = \frac{2 \cdot \frac{169}{4} - 25}{2 \cdot \frac{169}{4}} = \frac{119}{169}.$$

Откуда $\angle EOM = \arccos \frac{119}{169}$.

Ответ: $\arccos \frac{119}{169}$.

Идея окончания решения Игоря Калинкина.

Можно найти площадь сечения, перемножив стороны прямоугольника и приравняв полученное произведение к формуле площади параллелограмма через диагонали ($S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$, где α — угол между диагоналями). Выразив отсюда синус угла между диагоналями и найдя арксинус, получим $\alpha = \arcsin \frac{120}{169}$.

Идея окончания решения Марины Максимовской.

Рассмотрим равнобедренный треугольник MOE , проведём высоту к ME . В получившемся прямоугольном треугольнике выразим тангенс половины нужного угла. Половина нужного угла получится $\arctg \frac{5}{12}$, тогда весь угол — $2 \arctg \frac{5}{12}$.

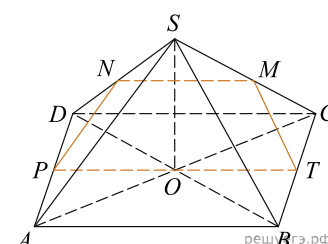
№ 132.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение.

а) Пусть O — центр основания, а N — середина ребра SD , P — середина ребра AD . Тогда $MN \parallel CD \parallel TP$, поэтому точки P, N, M, T лежат в одной плоскости и являются вершинами трапеции.

По теореме о средней линии треугольника $NP = \frac{1}{2} AS = \frac{1}{2} BS = MT$, так что трапеция равнобедренная.

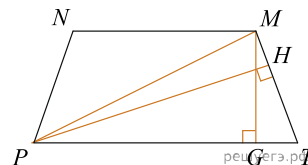


б) Так как $AO = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, $AS = \sqrt{OA^2 + OS^2} = \sqrt{3 + 33} = 6$, $NP = MT = 3$.

Основания трапеции равны $PT = \sqrt{6}$, $MN = \frac{\sqrt{6}}{2}$. В треугольнике PMT проведем высоты MG и PH . Тогда

$$GT = \frac{PT - MN}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}, MG = \sqrt{MT^2 - GT^2} = \sqrt{9 - \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{69}{8}}.$$

Заметим, что $MG \cdot PT = 2 \cdot S_{PMT} = PH \cdot MT$, поэтому $PH = \frac{MG \cdot PT}{MT} = \frac{1}{2}\sqrt{23}$.



Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{23}$.

№ 133.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть плоскость α пересекает ребро AD в точке K и ребро AB в точке N . Из условия следует, что прямая KN параллельна прямой BD , прямая KM параллельна прямой SD , а прямая MN параллельна прямой SB . Треугольники MKN и SDB подобны по двум углам, а так как $SB = SD$, то $MN = MK$. Следовательно, в треугольнике MNK вершиной прямого угла может быть только точка M , значит, $\angle BSD = 90^\circ$. По теореме Пифагора в треугольнике SDB получаем:

$$BD^2 = BS^2 + SD^2 = BS^2 + BS^2 = 2BS^2.$$

С другой стороны, из треугольника ADB находим:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2,$$

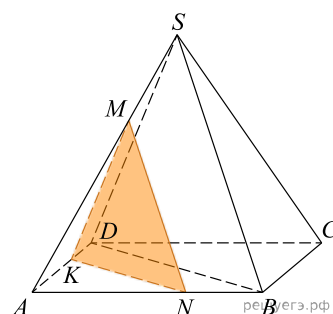
то есть $AB = BS = AS$, треугольник ASB — равносторонний, поэтому $\angle ASB = 60^\circ$.

б) Пусть $SM : MA = x$. В пирамиде $ASBD$ параллельное основанию сечение MNK отсекает пирамиду $AMNK$, подобную данной. Из подобий треугольников получаем:

$$\frac{AM}{AS} = \frac{AK}{AD} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{x+1}.$$

Объемы подобных многогранников относятся как куб коэффициента подобия: $\frac{V_{AMNK}}{V_{ASBD}} = \left(\frac{1}{x+1}\right)^3$. Сечение SBD делит пирамиду на две равновеликих: $V_{SABCD} = 2V_{ASBD}$. Тогда получаем:

$$\frac{V_{AMNK}}{\frac{1}{2}V_{SABCD}} = \left(\frac{1}{x+1}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{200}{675} = \frac{1}{(x+1)^3} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \frac{8}{27} = \frac{1}{(x+1)^3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x+1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{AMNK}}{\frac{1}{2}V_{SABCD}} = \left(\frac{1}{x+1}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{200}{675} = \frac{1}{(x+1)^3} \Leftrightarrow \frac{8}{27} = \frac{1}{(x+1)^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x+1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{1}{2}$.

№ 134.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть плоскость α пересекает ребро B_1C_1 в точке P . Продлим прямую BP до пересечения с продолжением ребра CC_1 в точке T . Проведем прямую DT , пусть она пересечет ребро C_1D_1 в точке Q (см.рис.). Тогда четырехугольник $BPQD$ — сечение куба плоскостью α . Пусть $PC_1 = x$, $B_1P = ax$, тогда

$$CT : C_1T = (a+1)x : x = (a+1) : 1 = DC : QC_1,$$

откуда $QC_1 = x$. Далее,

$$S_{DCC_1Q} + S_{CBPC_1} = 2 \cdot (a+1) \cdot x \cdot \frac{x + (a+1) \cdot x}{2} = x^2 \cdot (a+1) \cdot (a+2).$$

Полученная площадь по условию равна трети от общей площади боковой поверхности куба. Следовательно,

$$\frac{1}{3} \cdot 4(a+1)^2 \cdot x^2 = x^2 \cdot (a+1) \cdot (a+2) \Leftrightarrow \frac{4}{3}(a+1) = a+2 \Leftrightarrow 4a+4 = 3a+6 \Leftrightarrow a=2, \frac{1}{3} \cdot 4(a+1)^2 \cdot x^2 = x^2 \cdot (a+1) \cdot (a+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}(a+1) = a+2 \Leftrightarrow 4a+4 = 3a+6 \Leftrightarrow a=2,$$

откуда и следует, что $B_1P : PC_1 = 2 : 1$.

б) Найдем объем усеченной пирамиды $BCDPC_1Q$:

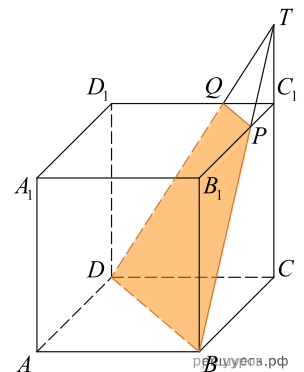
$$V = V_{TBDC} - V_{TPQC_1} = \frac{1}{3} \cdot CT \cdot S_{BDC} - \frac{1}{3} \cdot C_1T \cdot S_{PQC_1} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot x \cdot \frac{(3x)^2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{27x^3 - x^3}{4} = \frac{13}{2}x^3. V = V_{TBDC} - V_{TPQC_1} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot CT \cdot S_{BDC} - \frac{1}{3} \cdot C_1T \cdot S_{PQC_1} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot x \cdot \frac{(3x)^2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{27x^3 - x^3}{4} = \frac{13}{2}x^3.$$

Объем куба равен $V_K = (3x)^3 = 27x^3$. Следовательно, объемы частей относятся как



$$\frac{13}{2}x^3 : \left(27x^3 - \frac{13}{2}x^3\right) = \frac{13}{2} : \left(27 - \frac{13}{2}\right) = \frac{13}{2} : \frac{41}{2} = 13 : 41.$$

Ответ: б) 13 : 41.

№ 135.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

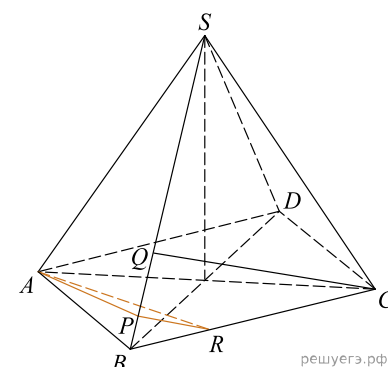
Решение. а) Пусть боковое ребро пирамиды равно x . Тогда

$$\cos \angle ABS = \frac{AB}{2SB} = \frac{3\sqrt{2}}{2x},$$

$$\cos \angle CBS = \frac{BC}{2SB} = \frac{3}{x},$$

$$BP = AB \cdot \cos \angle ABS = \frac{(3\sqrt{2})^2}{2x} = \frac{9}{x},$$

$$BQ = BC \cdot \cos \angle CBS = \frac{3 \cdot 6}{x} = \frac{18}{x}.$$



Следовательно, $BQ = 2BP$ и P — середина BQ .

б) В грани SBC проведём отрезок PR параллельно QC . Так как P — середина BQ , то R — середина BC . Кроме этого, угол APR является линейным углом угла между гранями SBA и SBC . Найдём площади граней SAB и SBC . Пусть h_{AB} и h_{BC} их высоты соответственно. Тогда

$$h_{AB} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{34}}{2},$$

$$h_{BC} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2},$$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}AB \cdot h_{AB} = \frac{9\sqrt{17}}{2}.$$

Далее имеем: $S_{SBC} = \frac{1}{2}BC \cdot h_{BC} = 18\sqrt{2}$, $AP = \frac{2S_{SAB}}{SB} = \sqrt{17}$,

$$PR = \frac{1}{2}CQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S_{SBC}}{SB} = 2\sqrt{2},$$

$$AR = \sqrt{AB^2 + BR^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}.$$

Напишем теорему косинусов для треугольника APR :

$$AR^2 = AP^2 + PR^2 - 2AP \cdot PR \cdot \cos \angle APR \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27 = 17 + 8 - 2\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{2} \cos \angle APR \Leftrightarrow \cos \angle APR = -\frac{1}{2\sqrt{34}}.$$

Таким образом, искомый угол равен $\arccos \frac{1}{2\sqrt{34}}$.

Ответ: б) $\arccos \frac{1}{2\sqrt{34}}$.

№ 136.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Поскольку $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямая призма, прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC , то есть AC — проекция $A_1 C$ на плоскость ABC . $ABCD$ — ромб, поэтому прямые AC и BD перпендикулярны. Тогда по теореме о трех перпендикулярах прямая $A_1 C$ перпендикулярна прямой BD .

б) Пусть $AB = AA_1 = a$, $AC \cap DB = O$. По теореме Пифагора в треугольнике $A_1 AC$ имеем:

$$A_1 C^2 = AA_1^2 + AC^2 \Leftrightarrow 4 = a^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC = \sqrt{4 - a^2}.$$

По теореме Пифагора в треугольнике DOC имеем:

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 \Leftrightarrow a^2 = 1 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{a^2 - 1}.$$

Найдем a :

$$\sqrt{4 - a^2} = 2\sqrt{a^2 - 1} \Leftrightarrow 4 - a^2 = 4(a^2 - 1) \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{8}{5}}.$$

Тогда AC равно: $AC = 2\sqrt{\frac{8}{5} - 1} = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$. Отсюда объём призмы равен:

$$V = AA_1 \cdot S_{ABCD} = \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

№ 137.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Поскольку проекция прямой BD_1 на плоскость $ABCD$ — прямая $BD \perp AC$, то и $BD_1 \perp AC$. Аналогично $BD_1 \perp AB_1$ (надо рассмотреть плоскость ABB_1A_1). Значит, BD_1 перпендикулярно двум пересекающимся прямым в плоскости AB_1C , поэтому $BD_1 \perp AB_1C$.

б) Будем считать, что ребро куба имеет длину 1. Очевидно, в обеих плоскостях лежит точка B , поэтому прямая пересечения у этих плоскостей BD_1 . Опустим на нее перпендикуляры из точек A и C (они упадут в одну точку из-за равенства треугольников ABD_1 и CBD_1). Пусть их основание — точка H . Рассмотрим треугольник ACH . В нем $AC = \sqrt{2}$,

$$AH = \frac{2S_{ABD_1}}{BD_1} = \frac{AB \cdot AD_1}{BD_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

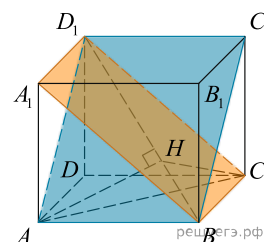
Напишем теперь теорему косинусов для треугольника ACH .

$$2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cos \angle AHC, \text{ откуда } \angle AHC = 120^\circ, \text{ а угол между плоскостями — } 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

Примечание.

Решение задачи методом координат приведено в комментариях.



№ 138.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Решение. а) Пусть плоскость пересекает ребро SB в точке N . Поскольку плоскость параллельна ребру SA , она пересекает грань SBA по прямой, параллельной SA . Таким образом, прямые KN и SA параллельны, треугольники NBK и SBA подобны, а $SN : NB = AK : KB = 2 : 7$, что и требовалось доказать.

б) Пусть плоскость сечения пересекает ребро AC в точке L . Аналогично пункту а) из подобия треугольников MCL и SCA находим, что $AL : LC = SM : MC = 2 : 7$. Из равенства $AL : LC = AK : KB$ следует, что LK и CB параллельны.

Проведём SH и AH , и пусть плоскость SHA пересекает α по прямой QR (см.рис.), причём $QR \parallel SA$, поскольку плоскость α параллельна SA .

Проведём в плоскости SHA перпендикуляр RP к прямой SA . Прямая $RP \perp QR$, поскольку $QR \parallel SA$. Прямая $RP \perp LK$, поскольку её проекция $RA \perp LK$. Следовательно, прямая RP перпендикулярна плоскости α , тогда RP — расстояние от прямой SA до плоскости α . Это расстояние равно расстоянию между скрещивающимися прямыми SA и KM .

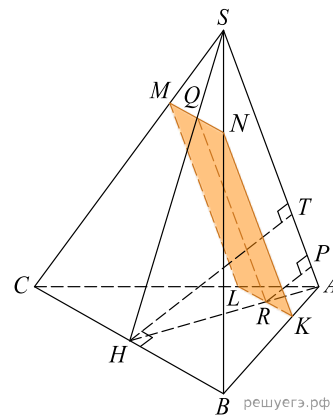
Заметим, что $AR : RH = AK : KB = 2 : 7$, поскольку прямые LK и CB параллельны.

$$\text{Тогда } AR = \frac{2}{9}AH = \frac{2}{9} \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Заметим, что $RP = RA \sin \angle SAO$, где O — основание высоты пирамиды, тогда

$$RP = AR \cdot \frac{SO}{SA} = AR \cdot \frac{\sqrt{SA^2 - AO^2}}{SA} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6^2 - (3\sqrt{3})^2}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



№ 140.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) По теореме Пифагора

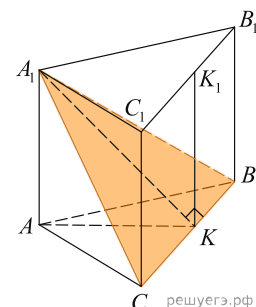
$$A_1K = \sqrt{AA_1^2 + AK^2} = \sqrt{25 + (8\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 192 - 48} = 13.$$

$$A_1K = \sqrt{AA_1^2 + AK^2} = \sqrt{25 + (8\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 192 - 48} = 13.$$

б) Отметим точку K_1 — середину B_1C_1 . Поскольку $A_1K \perp BC$ (потому что его проекция на основание ABC — прямая AK — перпендикулярна BC) и $KK_1 \perp BC$ (потому что $KK_1 \parallel C_1C$), то

$$\angle((A_1BC), (BB_1C_1)) = \angle((A_1K), (KK_1)) = \angle A_1KK_1 = \angle KA_1A = \arccos \frac{AA_1}{A_1K} = \arccos \frac{5}{13}.$$

$$\angle((A_1BC), (BB_1C_1)) = \angle((A_1K), (KK_1)) = \angle A_1KK_1 = \angle KA_1A = \arccos \frac{AA_1}{A_1K} = \arccos \frac{5}{13}.$$



$$= \arccos \frac{AA_1}{A_1K} = \arccos \frac{5}{13}.$$

Тангенс найденного угла равен $\frac{12}{5}$.

Ответ: а) 13; б) $\frac{12}{5}$.

№ 141.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} (\log_{1-2x}(x+1) + \log_{1-2x}(1-2x)^2) \cdot \log_{1-2x}(x+1) \leq -1, \\ x+1 \neq 1. \end{cases}$$

Сделаем замену $y = \log_{1-2x}(x+1)$. Получаем: $(y+2)y \leq -1$; $(y+1)^2 \leq 0$; $y = -1$.

Сделаем обратную замену: $\log_{1-2x}(x+1) = -1$. Тогда

$$\begin{cases} (1-2x)(x+1) = 1, \\ x+1 > 0, \\ 1-2x \neq 1, \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 - x = 0, \\ x > -1, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

откуда $x = -0,5$.

Ответ: $-0,5$.

№ 142.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Последовательно получаем:

$$25^{x^2-2x+10} - 0,2^{2x^2-4x-80} \leq 0 \Leftrightarrow 5^{2x^2-4x+20} \leq 5^{-2x^2+4x+80} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 20 \leq -2x^2 + 4x + 80 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5.$$

Ответ: $[-3; 5]$.

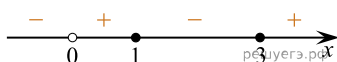
№ 143.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 5-x \geq 0, \\ 5-x \neq 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

- 1) $\sqrt{x^2-6x+9} = 1$, т. е. $|x-3| = 1$ и, значит, $x = 2$ или $x = 4$. Таким образом, $x = 2$ — решение задачи.
- 2) $\sqrt{x^2-6x+9} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2$, получим: $x + \frac{3}{x} \geq 4$, откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$.



Решим это неравенство, получим: $0 < x \leq 1$ или $x \geq 3$.

Учитывая ограничения, получаем множество решений исходного неравенства: $(0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4) \cup (4; 5]$.

Ответ: $(0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4) \cup (4; 5]$.

№ 144.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство, используя свойства логарифма:

$$\frac{\log_4(16x^4) + 11}{\log_4^2 x - 9} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{\log_4 16 + \log_4(x^4) + 11}{\log_4^2 x - 9} \geq -1 \Leftrightarrow$$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеет- ся верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Запишем неравенство в виде:

$$3|x+3| + |x-2| \leq 3x+14.$$

Заметим, что левая часть представляет из себя кусочно-линейную функцию, которая возрастает при $x \geq -3$ и убывает при $x \leq -3$. Это означает, что в точке -3 она достигает минимума, равного 5. Таким образом, должно быть верно неравенство $3x+14 \geq 5$, откуда $x \geq -3$. Для таких значений переменной получаем:

$$3(x+3) + |x-2| \leq 3x+14 \Leftrightarrow |x-2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x-2 \leq 5 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 7. \quad 3(x+3) + |x-2| \leq 3x+14 \Leftrightarrow |x-2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x-2 \leq 5 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 7.$$

Ответ: $[-3; 7]$.

Приведем другое решение.

Воспользуемся тем, что для суммы $|a| + |b|$ возможны четыре случая раскрытия модулей, откуда заключаем:

$$|a| + |b| \leq c \Leftrightarrow \begin{cases} -c \leq a+b \leq c, \\ -c \leq a-b \leq c. \end{cases}$$

Тогда имеем:

$$3|x+3| + |2-x| \leq 3x+14 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-14 \leq 3(x+3) + (2-x) \leq 3x+14, \\ -3x-14 \leq 3(x+3) - (2-x) \leq 3x+14. \end{cases} \Leftrightarrow 3|x+3| + |2-x| \leq 3x+14 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-14 \leq 3(x+3) + (2-x) \leq 3x+14, \\ -3x-14 \leq 3(x+3) - (2-x) \leq 3x+14. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x-14 \leq 2x+11 \leq 3x+14, \\ -3x-14 \leq 4x+7 \leq 3x+14. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5, \\ x \geq -3, \\ x \leq 7. \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 7.$$

№ 147.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеет- ся верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $t = 7^{-x^2}$, $0 < t \leq 1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_2((t-3)(7^{16}t-1)) + \log_2 \frac{t-3}{7^{16}t-1} > \log_2(7^7t-2)^2.$$

Так как $t-3 < 0$, имеем $7^{16}t-1 < 0$, а значит, $0 < t < \frac{1}{7^{16}} < \frac{2}{7^7}$.

Получаем:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \log_2(t-3)^2 > \log_2(7^7 t - 2)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t-3| > |7^7 t - 2|, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-t > 2-7^7 t, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{7^{16}}. \\ & \begin{cases} \log_2(t-3)^2 > \log_2(7^7 t - 2)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t-3| > |7^7 t - 2|, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3-t > 2-7^7 t, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{7^{16}}. \begin{cases} \log_2(t-3)^2 > \log_2(7^7 t - 2)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} |t-3| > |7^7 t - 2|, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3-t > 2-7^7 t, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{7^{16}}. \end{aligned}$$

Поясним: неравенство $3-t > 2-7^7 t$ эквивалентно неравенству $(7^7-1)t > -1$ и выполнено для всех значений переменной. Итак,

$$7^{-x^2} < 7^{-16} \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x < -4. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

№ 148.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Перепишем правую часть неравенства:

$$\log_{x+2}(x^2-2) \geq \log_{x+2}(x+2)^2.$$

Воспользуемся методом рационализации:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x+2-1)(x^2-2-(x+2)^2) \geq 0, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ x^2-2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1,5) \leq 0, \\ x > -2, \\ x \neq -1, \\ x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty). \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x < -\sqrt{2}. \begin{cases} (x+2-1)(x^2-2-(x+2)^2) \geq 0, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ x^2-2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1,5) \leq 0, \\ x > -2, \\ x \neq -1, \\ x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty). \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x < -\sqrt{2}. \begin{cases} (x+2-1)(x^2-2-(x+2)^2) \geq 0, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ x^2-2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1,5) \leq 0, \\ x > -2, \\ x \neq -1, \\ x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty). \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x < -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right)$.

№ 149.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Используя основное логарифмическое тождество, получим:

$$\begin{aligned}
 5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x + \log_5^2 x - 12 \leq 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 3)(\log_5 x + 4) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \log_5 x \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{625} \leq x \leq 125, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 125. \\
 5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x + \log_5^2 x - 12 \leq 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 3)(\log_5 x + 4) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \log_5 x \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{625} \leq x \leq 125, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 125. \quad 5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x + \log_5^2 x - 12 \leq 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 3)(\log_5 x + 4) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \log_5 x \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{625} \leq x \leq 125, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 125. \quad 5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x + \log_5^2 x - 12 \leq 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 3)(\log_5 x + 4) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \log_5 x \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{625} \leq x \leq 125, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 125.
 \end{aligned}$$

Ответ: $(1; 125]$.

№ 150.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{t-1} + \frac{3t^2 - 27t + 3}{t-9} \geq 3t \Leftrightarrow \frac{1}{t-1} + \frac{3t(t-9)}{t-9} + \frac{3}{t-9} \geq 3t \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{1}{t-1} + 3t + \frac{3}{t-9} \geq 3t \Leftrightarrow \frac{t-3}{(t-1)(t-9)} \geq 0,$$

откуда $1 < t \leq 3$; $t > 9$.

При $1 < t \leq 3$ получим: $1 < 3^x \leq 3$, откуда $0 < x \leq 1$.

При $t > 9$ получим: $3^x > 9$, откуда $x > 2$.

Ответ: $(0; 1] \cup (2; +\infty)$.

№ 151.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть сумма кредита равна S . По условию долг Алексея должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S, \frac{11S}{12}, \dots, \frac{2S}{12}, \frac{S}{12}, 0.$$

К концу каждого месяца к сумме долга добавляется $r\%$. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$. Тогда последовательность сумм долга вместе с процентами такова:

$$kS, \frac{11kS}{12}, \dots, \frac{2kS}{12}, \frac{kS}{12}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S + \frac{S}{12}, \frac{11(k-1)S + S}{12}, \dots, \frac{2(k-1)S + S}{12}, \frac{(k-1)S + S}{12}.$$

Всего следует выплатить:

$$S + S(k-1) \left(1 + \frac{11}{12} + \dots + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} \right) = S \left(1 + \frac{13(k-1)}{2} \right).$$

Общая сумма выплат оказалась на 13% больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$13(k-1) = 0,26 \Leftrightarrow k = 1,02.$$

Откуда получаем, что $r = 2$.

Ответ: 2.

№ 152.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. К началу 2-го года получится $1,1 \cdot 12 + n = 13,2 + n$ млн рублей вложений, а к началу 3-го года —

$$1,1(13,2 + n) + n = 14,52 + 2,1n.$$

По условию $14,52 + 2,1n \geq 24$, откуда следует, что $n \geq 4\frac{18}{35}$. Наименьшее целое значение $n=5$. Тогда к началу 3-го года получится

$$14,52 + 10,5 = 25,02 \text{ млн рублей.}$$

К началу 4-года получим $1,1 \cdot 25,02 + m$ млн рублей, а к концу проекта —

$$1,1(1,1 \cdot 25,02 + m) + m = 30,2742 + 2,1m.$$

По условию $30,2742 + 2,1m \geq 36$, откуда следует, что $m \geq 2\frac{2543}{3500}$. Наименьшее целое значение $m = 3$.

Ответ: $n = 5$ млн рублей и $m = 3$ млн рублей.

№ 153.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$. Заполним таблицу:

Месяц	Долг на 1-е число после начисления процен- тов, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число, тыс. руб.
Январь (1)			1000
Февраль (2)	$1000k$	$1000k - 900$	900
Март (3)	$900k$	$900k - 800$	800
Апрель (4)	$800k$	$800k - 700$	700
Май (5)	$700k$	$700k - 600$	600
Июнь (6)	$600k$	$600k - 500$	500
Июль (7)	$500k$	$500k$	0

Общая сумма выплат составит:

$$S = 1000k - 900 + 900k - 800 + 800k - 700 + 700k - 600 + 600k - 500 + 500k = 4500k - 3500 \text{ тыс. руб.}$$

По условию сумма выплат должна быть больше 1250 тыс. руб., тогда

$$4500k - 3500 > 1250 \Leftrightarrow 450k > 475 \Leftrightarrow k > 1\frac{5}{90},$$

откуда

$$\frac{r}{100} > \frac{5}{90} \Leftrightarrow r > \frac{50}{9} \Leftrightarrow r > 5\frac{5}{9}.$$

Наименьшее целое решение полученного неравенства равно 6.

Ответ: 6.

№ 154.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть планируется взять в кредит $18S$ у. е. Заполним таблицу:

Месяц (номер месяца)	Долг на 1-е число месяца, у. е.	Выплата, у. е.	Долг на 15-е число месяца, у. е.
Январь			$18S$
Февраль (1)	$18S \cdot 1,02$	$S + 18S \cdot 0,02$	$17S$
Март (2)	$17S \cdot 1,02$	$S + 17S \cdot 0,02$	$16S$
Апрель (3)	$16S \cdot 1,02$	$S + 16S \cdot 0,02$	$15S$
...	...	...	...
Июнь (17)	...	...	S
Июль (18)	$S \cdot 1,02$	$S + S \cdot 0,02$	0

Найдём сумму всех выплат:

$$\begin{aligned} B &= S + 18S \cdot 0,02 + S + 17S \cdot 0,02 + S + 16S \cdot 0,02 + \dots + S + 2S \cdot 0,02 + S + S \cdot 0,02 = \\ &= 18S + (18 + 17 + 16 + \dots + 2 + 1)S \cdot 0,02 = 18S + 19 \cdot 9S \cdot 0,02 = 18S + 19 \cdot 0,18S = 18 \cdot 1,19S. \\ B &= S + 18S \cdot 0,02 + S + 17S \cdot 0,02 + S + 16S \cdot 0,02 + \dots + S + 2S \cdot 0,02 + S + S \cdot 0,02 = \\ &= 18S + (18 + 17 + 16 + \dots + 2 + 1)S \cdot 0,02 = \\ &= 18S + 19 \cdot 9S \cdot 0,02 = 18S + 19 \cdot 0,18S = 18 \cdot 1,19S. \\ B &= S + 18S \cdot 0,02 + S + 17S \cdot 0,02 + S + 16S \cdot 0,02 + \dots + S + 2S \cdot 0,02 + S + S \cdot 0,02 = \\ &= 18S + (18 + 17 + 16 + \dots + 2 + 1)S \cdot 0,02 = \end{aligned}$$

$$= 18S + 19 \cdot 9S \cdot 0,02 = \\ = 18S + 19 \cdot 0,18S = 18 \cdot 1,19S.$$

Тогда общая сумма, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, в процентах от суммы кредита составляет

$$\frac{18 \cdot 1,19S \cdot 100\%}{18S} = 119\%.$$

Ответ: 119.

№ 155.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть сумма кредита равна $24S$ тыс. руб. и $k = 1 + \frac{2}{100}$. Заполним таблицу:

Номер месяца	Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число, тыс. руб.	
			$24S$	
1	$24kS$	$24kS - 23S$	$23S$	первый год
2	$23kS$	$23kS - 22S$	$22S$	
...	...	...	...	
12	$13kS$	$13kS - 12S$	$12S$	
13	$12kS$	$12kS - 11S$	$11S$	второй год
...	...	...	...	
24	kS	$kS - 0$	0	

Из таблицы находим сумму выплат в первые 12 месяцев:

$$B_{1-12} = \underbrace{24kS - 23S}_{1\text{-й месяц}} + \underbrace{23kS - 22S}_{2\text{-й месяц}} + \dots + \underbrace{13kS - 12S}_{12\text{-й месяц}} = \\ = \frac{24kS - 23S + 13kS - 12S}{2} \cdot 12 = (37kS - 35S) \cdot 6,$$

По условию эта сумма равна 2466 тыс. руб., откуда, подставляя $k = 1,02$, получаем:

$$(37 \cdot 1,02 \cdot S - 35S) \cdot 6 = 2466 \Leftrightarrow 2,74S = 411 \Leftrightarrow S = 150.$$

Сумма выплат в последние 12 месяцев равна

$$B_{13-24} = \underbrace{12kS - 11S}_{13\text{-й месяц}} + \underbrace{11kS - 10S}_{14\text{-й месяц}} + \dots + \underbrace{kS - 0}_{24\text{-й месяц}} = \frac{12kS - 11S + kS - 0}{2} \cdot 12 = (13kS - 11S) \cdot 6. \quad B_{13-24} = \underbrace{12kS - 11S}_{13\text{-й месяц}} + \underbrace{11kS - 10S}_{14\text{-й месяц}} + \dots + \underbrace{kS - 0}_{24\text{-й месяц}} = \\ = \frac{12kS - 11S + kS - 0}{2} \cdot 12 = (13kS - 11S) \cdot 6.$$

Подставляя $k = 1,02$ и $S = 150$, находим:

$$B_{13-24} = (13 \cdot 1,02 \cdot 150 - 11 \cdot 150) \cdot 6 = 2,26 \cdot 150 \cdot 6 = 226 \cdot 9 = 2034 \text{ тыс. руб.} \quad B_{13-24} = (13 \cdot 1,02 \cdot 150 - 11 \cdot 150) \cdot 6 = \\ = 2,26 \cdot 150 \cdot 6 = 226 \cdot 9 = 2034 \text{ тыс. руб.}$$

№ 156.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. По условию, за первые 20 месяцев долг должен равномерно уменьшиться на $300-100=200$ (тыс.руб.), значит, долг перед банком (в тыс. руб.) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$300; 290; 280; \dots 110; 100; 0.$$

Первое число каждого месяца долг возрастает на 2%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. руб.) по состоянию на 1-е число такова:

$$306; 295,8; \dots 112,2; 102.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. руб.) должны быть следующими:

$$\begin{matrix} 16; & 15,8; & \dots & 12,2; & 102. \\ (306-290) & (295,8-280) & & (112,2-100) & (102-0) \end{matrix}$$

Значит, всего следует выплатить

$$\begin{matrix} (16 + 15,8 + \dots + 12,2) + 102 = \frac{16 + 12,2}{2} \cdot 20 + 102 = \frac{20 \cdot 28,2}{2} + 102 = 384 \text{ тыс. руб.} \\ \text{сумма 20-ти членов арифм. прогрессии} \end{matrix}$$

Ответ: 384 тысячи рублей.

№ 157.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть S —размер кредита, он равен 1806 тысячам рублей. Срок погашения кредита n составляет 2 года, или 24 месяца. Процентная ставка r составляет в первом варианте 15% годовых, а во втором 2% ежемесячно.

В первом варианте долг x выплачен двумя платежами, поэтому $(S \cdot 1,15 - x)1,15 - x = 0$, откуда

$$S \cdot 1,3225 - 2,15x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{S \cdot 1,3225}{2,15} \stackrel{S=1806}{\Leftrightarrow} x = \frac{1806 \cdot 1,3225}{2,15} = 1110,9 \text{ тыс. руб.}$$

Сумма выплат составляет $1110,9 \cdot 2 = 2221,8$ тыс. руб.

Во втором варианте суммы долга составляют арифметическую прогрессию:

$$S \cdot 1,02, S \cdot 1,02 \cdot \frac{23}{24}, S \cdot 1,02 \cdot \frac{22}{24}, \dots, S \cdot 1,02 \cdot \frac{1}{24}.$$

а выплаты равны

$$S \cdot 0,02 + \frac{S}{24}, \frac{S \cdot 0,02 \cdot 23 + S}{24}, \frac{S \cdot 0,02 \cdot 22 + S}{24}, \dots, \frac{S \cdot 0,02 + S}{24}.$$

Поэтому для суммы выплат получаем:

$$\begin{aligned}
 S + S \cdot 0,02 \left(1 + \frac{23}{24} + \frac{22}{24} + \dots + \frac{1}{24} \right) &= S + S \cdot 0,02 \left(\frac{1 + \frac{1}{24}}{2} \cdot 24 \right) = \\
 = S + S \cdot 0,02 \cdot \frac{25}{2} &= S + \frac{S}{4} = 1,25S \quad S + S \cdot 0,02 \left(1 + \frac{23}{24} + \frac{22}{24} + \dots + \frac{1}{24} \right) = \\
 &= S + S \cdot 0,02 \left(\frac{1 + \frac{1}{24}}{2} \cdot 24 \right) = \\
 &= S + S \cdot 0,02 \cdot \frac{25}{2} = S + \frac{S}{4} = 1,25S
 \end{aligned}$$

или $1,25 \cdot 1806 = 2257,5$ тыс. руб.

Следовательно, более выгоден кредит, описанный в варианте 1; разность сумм выплат составит

$$2257,5 - 2221,8 = 35,7 \text{ (тыс. руб.)} = 35\,700 \text{ руб.}$$

Ответ: 35 700 рублей.

№ 158.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть 15-го числа 12-го месяца долг составит x тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$900; \frac{11 \cdot 900 + x}{12}; \frac{10 \cdot 900 + 2x}{12}; \dots \frac{900 + 11x}{12}; x; 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$927; 1,03 \cdot \frac{11 \cdot 900 + x}{12}; \dots 1,03 \cdot \frac{900 + 11x}{12}; 1,03x.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$\begin{aligned}
 27 + \frac{900 - x}{12}; 0,03 \cdot \frac{11 \cdot 900 + x}{12} + \frac{900 - x}{12}; \dots 0,03 \cdot \frac{900 + 11x}{12} + \frac{900 - x}{12}; 1,03x. \quad 27 + \frac{900 - x}{12}; 0,03 \cdot \frac{11 \cdot 900 + x}{12} + \\
 + \frac{900 - x}{12}; \dots 0,03 \cdot \frac{900 + 11x}{12} + \frac{900 - x}{12}; 1,03x.
 \end{aligned}$$

Всего следует выплатить

$$\begin{aligned}
 27 + 0,03 \cdot \frac{900 + x}{2} \cdot 11 + 900 - x + 1,03x = 0,195x + 1075,5 \text{ (тыс.рублей)}, \quad 27 + 0,03 \cdot \frac{900 + x}{2} \cdot 11 + 900 - x + \\
 + 1,03x = 0,195x + 1075,5 \text{ (тыс.рублей)},
 \end{aligned}$$

откуда $0,195x + 1075,5 = 1134 \Leftrightarrow 0,195x = 58,5 \Leftrightarrow x = 300$. Значит, 15-го числа 12-го месяца долг составит 300 тыс. рублей.

Ответ: 300.

№ 159.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. В январе 2027 года долг (в тыс. руб.) будет равен 600, а в июле равен 400.

В январе 2028 года долг будет равен 480, а в июле равен 280.

В январе 2029 года долг будет равен 336.

По условию к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью, значит, платёж в 2029 году будет составлять 336 тыс. руб.

Ответ: 336 тыс. руб.

№ 160.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Если искомая сумма составляет S рублей, то при коэффициенте ежегодной процентной ставки q , равной 1,31, фиксированная сумма Φ , которую клиент ежегодно должен возвращать в банк в течение 3 лет, составляет

$$\Phi = \frac{Sq^3}{q^2 + q + 1}, \text{ откуда } S = \frac{\Phi \cdot (q^2 + q + 1)}{q^3}.$$

Заметим, что 69 690 821 кратно $1,31^3$. Действительно, $69\,690\,821 : 1,31 = 53\,199\,100$;

$$53\,199\,100 : 1,31 = 40\,610\,000; \quad 40\,610\,000 : 1,31 = 31\,000\,000.$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{69\,690\,821 \cdot (1,31^2 + 1,31 + 1)}{1,31^3} = 31\,000\,000 \cdot 4,0261 = 40\,261 \cdot 3\,100 = 124\,809\,100. \quad S = \frac{69\,690\,821 \cdot (1,31^2 + 1,31 + 1)}{1,31^3} = \\ &= 31\,000\,000 \cdot 4,0261 = 40\,261 \cdot 3\,100 = 124\,809\,100. \quad S = \frac{69\,690\,821 \cdot (1,31^2 + 1,31 + 1)}{1,31^3} = \\ &= 31\,000\,000 \cdot 4,0261 = \\ &= 40\,261 \cdot 3\,100 = 124\,809\,100. \end{aligned}$$

Ответ: 124 809 100 рублей.

Замечания.

1. В мировой практике существует и работает два способа (схемы) погашения кредитов: *дифференцированная*, при которой периодический платеж включает постоянную сумму для погашения основного долга по кредиту, к которой прибавляются проценты на оставшуюся часть долга, и *аннуитетная* при которой долг гасится равными платежами, как в условии данной задачи.

2. При аннуитетной схеме, как правило, бывает кратным q^n либо фиксированная сумма, которую клиент обязан вносить в отчетный период, либо сумма взятого кредита. Возможен случай, когда та или другая сумма, указанная выше, кратна $q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1$.

3. Прежде чем приступить к решению задачи, лучше проверить ожидаемые кратности, что облегчит дальнейшие вычисления.

Приведём другое решение.

Заметим, что ежегодный платеж равен $69\,690\,821 = 31\,000\,000 \cdot 1,31^3$.
 Если искомая сумма составляет x рублей, то:

Периоды	Долг клиента (рублей)		
	в начале отчетного периода с учетом возрастания долга	частичное погашение	остаток к концу периода после частичного погашения
Первоначальный	x	—	x
I год	$1,31x$	$31000000 \cdot 1,31^3$	$1,31x - 1,31^3 \cdot 31000000 =$ $= 1,31 \cdot (x - 1,31^2 \cdot 31000000)$
II год	$1,31^2(x - 1,31^2 \cdot 31000000)$	$31000000 \cdot 1,31^3$	$1,31^2(x - 1,31^2 \cdot 31000000) - 1,31^3 \cdot 31000000 =$ $= 1,31^2(x - 1,31^2 \cdot 31000000 - 1,31 \cdot 31000000)$
III год	$1,31^3(x - 1,31^2 \cdot 31000000 - 1,31 \cdot 31000000)$	$31000000 \cdot 1,31^3$	$1,31^3(x - 1,31^2 \cdot 31000000 - 1,31 \cdot 31000000) - 1,31^3 \cdot 31000000 =$ $= 1,31^3(x - 1,31^2 \cdot 31000000 - 1,31 \cdot 31000000 - 31000000) = 0$

Решение уравнения:

$$\begin{aligned}
 &1,31^3(x - 1,31^2 \cdot 31000000 - 1,31 \cdot 31000000 - 31000000) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x - 1,31^2 \cdot 31000000 - 1,31 \cdot 31000000 - 31000000 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 1,31^2 \cdot 31000000 + 1,31 \cdot 31000000 + 31000000 \Leftrightarrow x = 31000000 \cdot (1,31^2 + 1,31 + 1) \Leftrightarrow x = 1,31^2 \cdot 31000000 + 1,31 \cdot 31000000 + 31000000 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 31000000 \cdot (1,31^2 + 1,31 + 1) \Leftrightarrow \\
 &x = 3100 \cdot 10000 \cdot (1,7161 + 2,31) \Leftrightarrow x = 3100 \cdot 10000 \cdot 4,0261 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 31 \cdot 40261 \cdot 100 \Leftrightarrow x = 124809100. \quad x = 3100 \cdot 10000 \cdot (1,7161 + 2,31) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 3100 \cdot 10000 \cdot 4,0261 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = 31 \cdot 40261 \cdot 100 \Leftrightarrow x = 124809100.
 \end{aligned}$$

Ответ: 124 809 100 рублей.

№ 161.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Отрезок KB — хорда, на которую опирается прямой угол, то есть диаметр окружности. Следовательно, вписанный угол KMB — прямой, потому что опирается на диаметр. Смежный с ним угол AMK также прямой, тогда треугольники AKM и ABC подобны по двум углам.

б) Найдем площадь четырехугольника $CKMB$ как сумму площадей прямоугольных треугольников CKB и BMK . Из прямоугольных треугольников KCB и ABC по теореме Пифагора соответственно получаем:

$$CK = \sqrt{KB^2 - BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{29})^2 - 4^2} = \sqrt{116 - 16} = 10,$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 16} = 4\sqrt{10}.$$

Из подобия треугольников AKM и ABC получаем $\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{KM}$, откуда

$$AM = \frac{AC \cdot (AC - CK)}{AB} = \frac{12 \cdot 2}{4\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5},$$

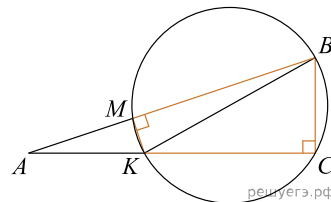
$$KM = \frac{BC \cdot (AC - CK)}{AB} = \frac{4 \cdot 2}{4\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$BM = AB - AM = 4\sqrt{10} - \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{17\sqrt{10}}{5}.$$

Таким образом, площадь четырехугольника $CKMB$ равна

$$\begin{aligned} S_{CKMB} &= S_{CKB} + S_{BMK} = \frac{1}{2} \cdot CK \cdot CB + \frac{1}{2} \cdot BM \cdot KM = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{17\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} = 20 + \frac{17}{5} = \frac{117}{5}. \end{aligned}$$

Ответ: б) $\frac{117}{5}$.

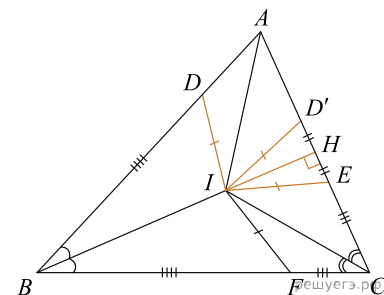


№ 162.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Из условия следует, что существует точка F на стороне BC такая, что $BF = BD$, $CF = CE$. Следовательно, треугольники DBI и FBI , треугольники ECI и FCI равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда

$$\begin{aligned}\angle DIE &= 360^\circ - 2\angle FIB - 2\angle FIC = 360^\circ - 2(180^\circ - \angle IFB - \angle FBI) - 2(180^\circ - \angle IFC - \angle ICF) = \\ &= 360^\circ - 360^\circ + 2\angle IFB + \angle ABC - 360^\circ + 2\angle IFC + \angle ACB = \\ &= -360^\circ + 2(\angle IFB + \angle IBC) + 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BAC. \quad \angle DIE = 360^\circ - 2\angle FIB - 2\angle FIC = \\ &= 360^\circ - 2(180^\circ - \angle IFB - \angle FBI) - 2(180^\circ - \angle IFC - \angle ICF) = \\ &= 360^\circ - 360^\circ + 2\angle IFB + \angle ABC - 360^\circ + 2\angle IFC + \angle ACB = \\ &= -360^\circ + 2(\angle IFB + \angle IBC) + 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BAC. \quad \angle DIE = 360^\circ - 2\angle FIB - 2\angle FIC = \\ &= 360^\circ - 2(180^\circ - \angle IFB - \angle FBI) - 2(180^\circ - \angle IFC - \angle ICF) = \\ &= 360^\circ - 360^\circ + 2\angle IFB + \angle ABC - 360^\circ + 2\angle IFC + \angle ACB = \\ &= -360^\circ + 2(\angle IFB + \angle IBC) + 180^\circ - \angle BAC = \\ &= 180^\circ - \angle BAC.\end{aligned}$$



Таким образом, четырехугольник $ADIE$ вписан в окружность.

б) Из пункта а) следует, что $DI = IE = IF = ID$. Пусть IH — высота треугольника IDE . Отрезок IH — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , тогда $\left(\frac{9}{2}\right)^2 = IE^2 - IH^2$, откуда $IE = \frac{\sqrt{85}}{2}$. Это и есть радиус окружности, описанной около треугольника EDD .

Ответ: $\frac{\sqrt{85}}{2}$.

№ 163.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Проведём диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$. Пусть точка O — точка их пересечения. Тогда в треугольнике ABC отрезки AM , BO и CK — медианы. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, медианы AM и CK пересекаются в точке P . Получаем, что точка P принадлежит отрезку BO , а потому и всей диагонали BD .

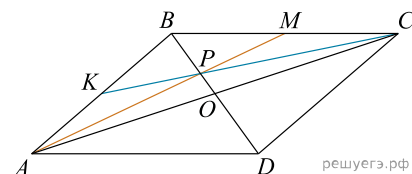
б) Рассмотрим треугольник ABC . Точка P — точка пересечения его медиан, поэтому $BO = \frac{3}{2}BP = 6$. По свойству диагоналей параллелограмма $BD = 12$.

Найдём площадь треугольника ABD по формуле Герона:

$$p = \frac{AB + BD + AD}{2} = 27,$$

$$S_{ABD} = \sqrt{27 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 10} = 90.$$

Следовательно, $S_{ABCD} = 180$.



№ 164.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б и использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что $\frac{AK}{AN} = \frac{MN}{BN} = 2$, следовательно, треугольники BMN и NKA подобны по соотношению двух сторон и равенству углов, заключенных между этими сторонами. Тогда $\angle MBN = \angle ANK$, следовательно, прямая BM параллельна прямой AN .

б) Диагонали квадрата перпендикулярны, равны и делятся точкой пересечения пополам, поэтому $\angle KON = 90^\circ$ и $OK = ON$. Из точек A и O отрезок KN виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром KN . Вписанные в эту окружность углы KAO и NAO опираются на равные хорды, поэтому AO — биссектриса угла KAN .

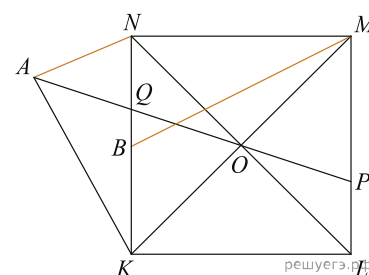
Пусть отрезок AP пересекает сторону KN в точке Q . Тогда AQ — биссектриса треугольника KAN . По свойству биссектрисы

$$\frac{NQ}{QK} = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2}.$$

Треугольник LOP равен треугольнику NOQ по стороне и двум прилежащим к ней углам, значит, $LP = NQ$. Тогда $MP = KQ$. Следовательно,

$$\frac{LP}{PM} = \frac{NQ}{QK} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: б) 1 : 2.



№ 165.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

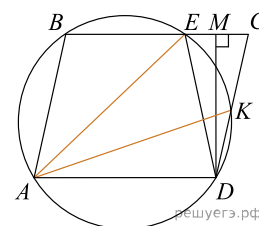
Решение. а) Заметим, что $\angle ABE = \angle ABC = \angle ADC = \angle ADK$. Значит, хорды окружности AE и AK стягивают равные дуги. Поэтому эти хорды равны.

б) Поскольку прямые BC и AD параллельны, $\angle EAD = \angle AEB$, поэтому $DE = AB = DC$. Пусть DM — медиана равнобедренного треугольника CDE . Тогда

$$CD = \frac{CM}{\cos \angle ECD} = \frac{CE}{2 \cos \angle BAD} = 60,$$

$$CK = CD - DK = 40.$$

По свойству секущей $CK \cdot CD = CE \cdot CB$, откуда $AD = CB = \frac{CK \cdot CD}{CE} = 50$.



Ответ: б) 50.

№ 166.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

б) По теореме Пифагора $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, откуда $AB = 5$, а значит, $OB = \frac{5}{2}$. Треугольники BOP и BCA подобны, поэтому $BO : OP = BC : CA$, следовательно,

$$OP = \frac{BO \cdot CA}{BC} = \frac{3 \cdot \frac{5}{2}}{4} = \frac{15}{8}.$$

Отрезок LM походит через середину диаметра, значит, LM — тоже диаметр, тогда $OM = \frac{5}{2}$ и $PM = \frac{5}{2} - \frac{15}{8} = \frac{5}{8}$. По свойству биссектрисы $AK : KB = AC : CB$, следовательно, $AK = \frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{15}{7}$. Тогда $KO = \frac{5}{2} - \frac{15}{7} = \frac{5}{14}$.

$$S_{\triangle PKM} = \frac{1}{2} \cdot PM \cdot KO = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{14} = \frac{25}{224}.$$

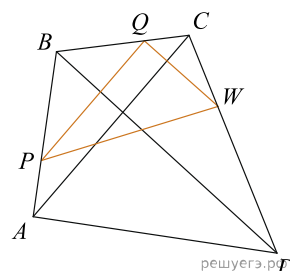
Ответ: б) $\frac{25}{224}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

$$2R = \frac{PQ}{\sin \angle OWP} = \frac{QW}{\sin \angle OPW} \Leftrightarrow 20 = \frac{16}{\sin \angle OWP} = \frac{12}{\sin \angle OPW}.$$

$$\sin^2 \angle QWP + \sin^2 \angle QPW = \frac{256}{400} + \frac{144}{400} = 1.$$

Следовательно, $\sin^2 \angle QPW = \cos^2 \angle QWP$, откуда, учитывая, что угол W острый, находим, что $\sin \angle QPW = \cos \angle QWP$, и, значит, $\angle QPW + \angle QWP = \frac{\pi}{2}$, то есть $\angle PQW = \frac{\pi}{2}$, треугольник PQW прямоугольный.



Ответ: 392.

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{10}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + 1)}.$$

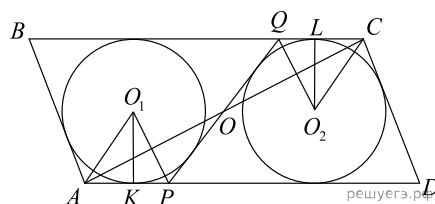
Ответ: б) $\frac{25\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

№ 169.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагонали AC параллелограмма с общей внутренней касательной l к данным окружностям, P и Q — точки пересечения прямой l со сторонами AD и BC соответственно. Достаточно доказать, что O — середина диагонали AC .

Пусть O_1 и O_2 — центры первой и второй окружностей соответственно. Первая окружность касается стороны AD в точке K , вторая окружность касается стороны BC в точке L .



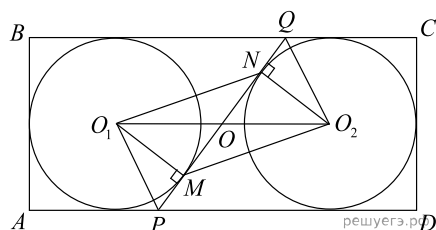
Лучи AO_1 и CO_2 — биссектрисы равных углов BAD и BCD , значит, прямоугольные треугольники AKO_1 и CLO_2 равны по катету (радиусы равных окружностей) и противолежащему острому углу. Тогда $AK = CL$. Аналогично $KP = LQ$. Следовательно,

$$AP = AK + KP = CL + LQ = CQ.$$

Значит, треугольники AOP и COQ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $AO = OC$, а точка O — середина диагонали AC , то есть центр параллелограмма $ABCD$.

б) $ABCD$ — прямоугольник, поэтому его сторона AD равна сумме диаметра окружности и отрезка O_1O_2 , то есть $2r + O_1O_2 = AD$, $2r + 10 = 16$, следовательно, $r = 3$.

Четырёхугольник O_1MO_2N — параллелограмм, поскольку его противоположные стороны O_1M и O_2N равны и параллельны. Диагонали O_1O_2 и MN параллелограмма O_1MO_2N пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.



Площадь параллелограмма O_1MO_2N в четыре раза больше площади треугольника OO_1M , в котором $OO_1 = \frac{1}{2}O_1O_2 = 5$, $O_1M = r = 3$. По теореме Пифагора

$$OM = \sqrt{OO_1^2 - O_1M^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Следовательно,

$$S_{O_1MO_2N} = 4S_{OO_1M} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot OM \cdot O_1M = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24.$$

Ответ: б) 24.

№ 170.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Пусть P — точка пересечения прямых BC и AM . По свойству угла между касательной и хордой $\angle MBA = \angle MCB$, $\angle MBC = \angle MAB$, $\angle CAM = \angle MBA$. Отсюда треугольники APB и BPM подобны, то есть $\frac{AP}{BP} = \frac{BP}{PM}$, следовательно, $BP^2 = AP \cdot PM$. Аналогично треугольники APC и CPM подобны, откуда $\frac{AP}{CP} = \frac{CP}{PM}$, следовательно, $CP^2 = AP \cdot PM$. Значит, $BP = CP$. Что и требовалось доказать.

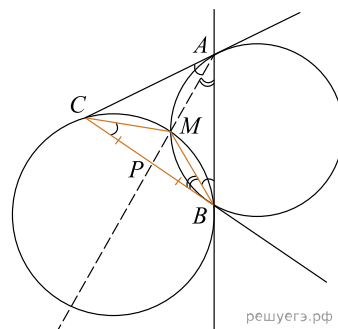
б) Из пункта а) получаем:

$$\sin \angle MBC = \sin \angle BAM = 0,6, \quad \sin \angle MCB = \sin \angle ABM = \sin \angle CAM = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Заметим, что треугольник CAB является равнобедренным, поэтому $\angle CAB < 90^\circ$, следовательно, углы MCB и MBC в сумме составляют острый угол, значит, каждый из них меньше 90° . Тогда

$$\begin{aligned}\sin \angle CMB &= \sin(\angle MCB + \angle MBC) = \sin \angle MBC \cdot \cos \angle MCB + \sin \angle MCB \cdot \cos \angle MBC = \\ &= 0,6 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 0,8 = \frac{2,6}{\sqrt{10}} = \frac{13}{5\sqrt{10}}. \quad \sin \angle CMB = \sin(\angle MCB + \angle MBC) = \\ &= \sin \angle MBC \cdot \cos \angle MCB + \sin \angle MCB \cdot \cos \angle MBC = \\ &= 0,6 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 0,8 = \frac{2,6}{\sqrt{10}} = \frac{13}{5\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

По теореме синусов



$$2R_{BCM} = \frac{10}{\frac{13}{5\sqrt{10}}} = \frac{50\sqrt{10}}{13},$$

откуда $R_{BCM} = \frac{25\sqrt{10}}{13}$.

Ответ: б) $\frac{25\sqrt{10}}{13}$.

№ 171.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений параметра, отличающееся от исходного только включением точки 4	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев и получено множество значений параметра, отличающееся от искомого только включением точек -5 ; 3 и/или 4 или Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом выполнены все шаги решения	2
Задача сведена к исследованию: взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4x + a}{5x^2 - 6ax + a^2} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + a = 0, \\ 5x^2 - 6ax + a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x^2 + 4x, \\ (5x - a)(x - a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x^2 + 4x, \\ a \neq x, \\ a \neq 5x. \end{cases} \\ \frac{x^2 - 4x + a}{5x^2 - 6ax + a^2} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + a = 0, \\ 5x^2 - 6ax + a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x^2 + 4x, \\ a \neq x, \\ a \neq 5x. \end{cases} \end{aligned}$$

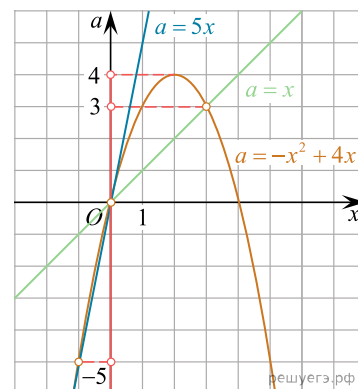
Изобразим решение в системе координат xOa . Графиком системы, а значит, и графиком исходного уравнения является парабола с выколотыми точками.

Ординаты точек пересечения параболы $a = -x^2 + 4x$ и прямой $a = x$ найдём из уравнения $a = -a^2 + 4a$. Получаем $a = 0$ или $a = 3$.

Ординаты точек пересечения параболы $a = -x^2 + 4x$ и прямой $a = 5x$ найдём из уравнения $a = -\frac{a^2}{25} + \frac{4a}{5}$. Получаем $a = 0$ или $a = -5$.

Ровно два решения исходное уравнение имеет при $a < -5$, $-5 < a < 0$, $0 < a < 3$, $3 < a < 4$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 4)$.



№ 172.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4

С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Подставим u из второго уравнения в первое, получим уравнение

$$(a^2 - 5a + 6)x^2 + (26 - 11a)x + 28 = 0. \quad (*)$$

Система будет иметь единственное решение, если полученное уравнение будет иметь ровно один корень. Найдём соответствующие значения параметра.

Если старший коэффициент уравнения $(*)$ равен нулю, то его степень не больше 1, поэтому оно может иметь единственное решение, не иметь решений или иметь бесконечно много решений. Из уравнения $a^2 - 5a + 6 = 0$ находим $a = 2$ или $a = 3$. Эти значения приводят к уравнениям $4x + 28 = 0$ и $-7x + 28 = 0$ соответственно, имеющим единственное решение.

При прочих a уравнение $(*)$ является квадратным и имеет единственное решение, тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю:

$$D = (26 - 11a)^2 - 4 \cdot 28(a^2 - 5a + 6) = 9a^2 - 12a + 4 = (3a - 2)^2,$$

откуда $a = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}, 2, 3$.

№ 173.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся включением/исключением точек $a = \frac{-2 - \sqrt{2}}{3}$ и/или $a = -2 + \sqrt{2}$.	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(\frac{-2 - \sqrt{2}}{3}; -2 + \sqrt{2}\right)$ или возможно, с включением граничных точек и/или одной из точек $a = -1$ или $a = -0,6$. ИЛИ Верно пройдены все этапы решения, но неверно найдены граничные точки множества значений a из-за вычислительной ошибки	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и получен один из промежутков $(2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$, $\left(\frac{-2 - \sqrt{2}}{3}; \frac{-2 + \sqrt{2}}{3}\right)$. ИЛИ Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Первое уравнение системы равносильно уравнению $(x - 2(a + 1))^2 + (y - a)^2 = 1$. Это уравнение задает окружность ω радиусом 1 с центром в точке $(2a + 2; a)$. Второе уравнение системы задает пару прямых $y = x$ и $y = -x$, пересекающихся в точке $(0; 0)$.

Прямая и окружность имеют не более двух общих точек. Значит, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда окружность ω пересекается с каждой из прямых $y = x$ и $y = -x$, в двух

точках и не проходит через точку их пересечения $(0; 0)$.

Число точек пересечения окружности с прямой $y = x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$2x^2 - 2(3a + 2)x + 5a^2 + 8a + 3 = 0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$4(3a + 2)^2 - 8(5a^2 + 8a + 3) > 0 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 2 < 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} < a < -2 + \sqrt{2}. \quad 4(3a + 2)^2 - 8(5a^2 + 8a + 3) > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + 4a + 2 < 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} < a < -2 + \sqrt{2}.$$

Число точек пересечения окружности с прямой $y = -x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$2x^2 - 2(a + 2)x + 5a^2 + 8a + 3 = 0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$4(a + 2)^2 - 8(5a^2 + 8a + 3) > 0 \Leftrightarrow 9a^2 + 12a + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{-2 - \sqrt{2}}{3} < a < \frac{-2 + \sqrt{2}}{3}. \quad 4(a + 2)^2 - 8(5a^2 + 8a + 3) > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9a^2 + 12a + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{-2 - \sqrt{2}}{3} < a < \frac{-2 + \sqrt{2}}{3}.$$

Окружность проходит через точку $(0; 0)$ при $5a^2 + 8a + 3 = 0$, то есть при $a = -1$ и $a = -0,6$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно 4 решения при

$$\frac{-2 - \sqrt{2}}{3} < a < -1, \quad -1 < a < -0,6, \quad -0,6 < a < -2 + \sqrt{2}.$$

Ответы: $\frac{-2 - \sqrt{2}}{3} < a < -1, \quad -1 < a < -0,6, \quad -0,6 < a < -2 + \sqrt{2}.$

№ 174.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Уравнение определено на множестве $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Пусть $t = \frac{1}{|x|}$, тогда, чтобы исходное уравнение имело два различных корня, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$a\sqrt{1-t^2} + \left|1 - \frac{1}{2t}\right| = 1 \quad (*)$$

имело ровно одно решение при $0 < t \leq 1$. Рассмотрим два случая раскрытия модуля.

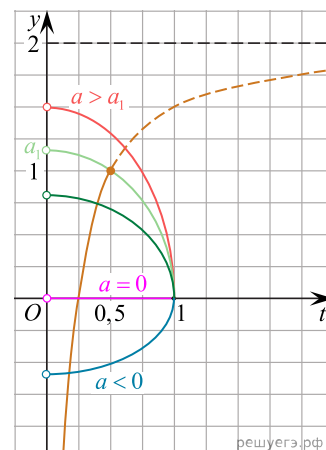
1 случай. Если $0 < t \leq \frac{1}{2}$, то имеем:

$$a\sqrt{1-t^2} - 1 + \frac{1}{2t} = 1 \Leftrightarrow a\sqrt{1-t^2} = 2 - \frac{1}{2t}.$$

Построим эскизы графиков левой и правой частей полученного уравнения в системе координат tOy . График левой части — дуга эллипса, при $a = 0$ вырождающаяся в отрезок. График правой части — гипербола. Уравнение имеет одно решение при $a \leq a_1$ и не имеет решений при $a > a_1$, где a_1 — значение параметра, при котором график функции

$y = a\sqrt{1-t^2}$ проходит через точку $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Найдём значение a_1 :

$$1 = a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow 1 = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$



2 случай. Если $\frac{1}{2} < t \leq 1$, то имеем:

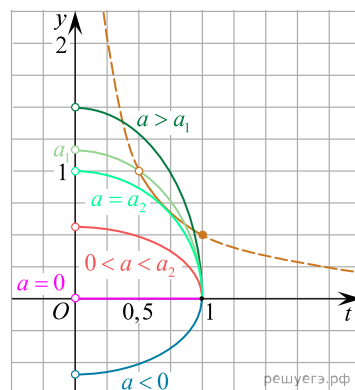
$$a\sqrt{1-t^2} + 1 - \frac{1}{2t} = 1 \Leftrightarrow a\sqrt{1-t^2} = \frac{1}{2t}.$$

Построим эскизы графиков левой и правой частей уравнения в системе координат tOy . График левой части — дуга эллипса, при $a = 0$ вырождающаяся в отрезок. График правой части — гипербола. Найдем количество точек пересечения дуги эллипса с гиперболой:

$$\begin{aligned} a\sqrt{1-t^2} &= \frac{1}{2t} \Leftrightarrow a^2(1-t^2) = \frac{1}{4t^2} \Leftrightarrow 4a^2t^4 - 4a^2t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2(2t^2 - 1)^2 = a^2 - 1. \\ a\sqrt{1-t^2} &= \frac{1}{2t} \Leftrightarrow a^2(1-t^2) = \frac{1}{4t^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4a^2t^4 - 4a^2t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2(2t^2 - 1)^2 = a^2 - 1. \end{aligned}$$

Единственному положительному корню соответствуют значения $a = \pm 1$. С учётом условия $a > 0$ получаем, что искомое значение параметра $a_2 = 1$. Тогда уравнение не имеет решений при $a < a_2$, имеет одно решение при $a = a_2$ или $a \geq a_1$, имеет два решения при $a_1 < a < a_2$, где a_1 — значение параметра, при котором график функции $y = a\sqrt{1-t^2}$ проходит через точку $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Объединяя два случая, получаем, что для $0 < t \leq 1$ уравнение (*) при $a < 1$ имеет при одно решение, при $a = 1$ — два решения, при $1 < a < \frac{2}{\sqrt{3}}$ — три решения, при $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ — два решения, при $a > \frac{2}{\sqrt{3}}$ — одно решение.



Ответ: $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

№ 175.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Заметим, что левая часть уравнения не меньше 1, а правая — не больше 1. Значит, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right) = 1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right) = 0, \\ \cos \pi x - \sin \pi x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ = 90^\circ + 180^\circ k, \\ \pi x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} 1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right) = 1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right) = 0, \\ \cos \pi x - \sin \pi x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ = 90^\circ + 180^\circ k, \\ \pi x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}. \quad \begin{cases} 1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right) = 1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right) = 0, \\ \cos \pi x - \sin \pi x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ = 90^\circ + 180^\circ k, \\ \pi x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Из уравнения $\pi x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ находим: $x = \frac{1}{4} + n$, $n \in \mathbb{Z}$. Значит, существуют только одно число $x \in [1; 2]$, удовлетворяющее исходному уравнению. Это число — $\frac{5}{4}$. Подставим его в первое уравнение полученной системы и найдём возможные значения параметра α :

$$\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{5}{4} + 67,5^\circ = 90^\circ + 180^\circ k \Leftrightarrow 5\alpha = 180^\circ + 8 \cdot 180^\circ k \Leftrightarrow \alpha = 36^\circ + 288^\circ k, k \in \mathbb{Z}. \quad \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{5}{4} + 67,5^\circ = 90^\circ + 180^\circ k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\alpha = 180^\circ + 8 \cdot 180^\circ k \Leftrightarrow \alpha = 36^\circ + 288^\circ k, k \in \mathbb{Z}.$$

Условию $0^\circ < \alpha < 1000^\circ$ удовлетворяют четыре значения параметра, а именно 36° , 324° , 612° и 900° . Их сумма равна 1872° .

Ответ: 1872° .

№ 176.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Уравнение определено при $x \geq \frac{1}{2}$. Рассмотрим векторы

$$\vec{m} = (|2x - 1|; \sqrt{4x - 1})$$

и

$$\vec{n} = (\sqrt{2x - 1}; |x - 1|),$$

и пусть α — угол между ними. Найдём длины этих векторов:

$$|\vec{m}| = \sqrt{|2x - 1|^2 + \sqrt{4x - 1}^2} = \sqrt{4x^2 - 4x + 1 + 4x - 1} = \sqrt{4x^2} = 2|x|,$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{\sqrt{2x - 1}^2 + |x - 1|^2} = \sqrt{2x - 1 + x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Тогда исходное уравнение имеет вид

$$\frac{a}{2} \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| = \vec{m} \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \frac{a}{2} \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow a = 2 \cos \alpha, \quad x \geq \frac{1}{2}$$

Таким образом, $a \leq 2$. Значение $a = 2$ может достигаться тогда и только тогда, когда $\cos \alpha = 1$, то есть в случае, когда векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены. Если соответствующие значения x существуют, то $a = 2$ — искомое наибольшее значение параметра, при котором уравнение имеет решения.

Выше было получено, что $|\vec{m}| = 2|\vec{n}|$. Следовательно, векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены, если координаты вектора $\vec{m}$ в 2 раза больше координат вектора $\vec{n}$, то есть при одновременном выполнении условий:

$$|2x - 1| = 2\sqrt{2x - 1},$$

$$\sqrt{4x - 1} = 2|x - 1|.$$

Решим уравнение $|2x - 1| = 2\sqrt{2x - 1}$:

$$\begin{aligned} |2x - 1| = 2\sqrt{2x - 1} &\Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 4(2x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0, \\ 2x - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x = \frac{5}{2}. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0, \\ 2x - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x = \frac{5}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставляя найденные корни в уравнение $\sqrt{4x - 1} = 2|x - 1|$, убеждаемся, что они являются его решениями. Таким образом, при наибольшем возможном значении параметра a исходное уравнение имеет корни $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{5}{2}$.

Ответ: $a = 2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{2}$.

№ 177.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$(|x| + |y| - 10) \cdot (9 - |xy|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + |y| - 10 = 0, \\ 9 - |xy| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + |y| = 10, \\ y = \pm \frac{9}{x}. \end{cases}$$

В системе координат xOy графиком первого уравнения полученной совокупности является квадрат с вершинами в точках $(0; 10)$, $(0; -10)$, $(10; 0)$ и $(-10; 0)$, а графиком второго уравнения является объединение двух гипербол (см.рис.). Точки пересечения гипербол и квадрата в первой четверти найдём из системы

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 9, \\ x = 9, \\ y = 1. \end{cases}$$

В остальных четвертях точки пересечения симметричны найденным и имеют координаты $(1; -9)$, $(9; -1)$, $(-1; 9)$, $(-9; 1)$, $(-1; -9)$ и $(-9; -1)$.

Графиком второго уравнения исходной системы при $a > 0$ является окружность с центром в начале координат и радиусом a . Лежащие в первой четверти точки пересечения гиперболы и окружности определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{81}{x^2} = a^2, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - a^2 x^2 + 81 = 0, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 324}}{2}, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases}, \Leftrightarrow_{x>0} \begin{cases} x = \sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 324}}{2}}, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases}, \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{81}{x^2} = a^2, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - a^2 x^2 + 81 = 0, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 324}}{2}, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow_{x>0} \\
& \Leftrightarrow_{x>0} \begin{cases} x = \sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 324}}{2}}, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases}, \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{81}{x^2} = a^2, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - a^2 x^2 + 81 = 0, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 324}}{2}, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases} \Leftrightarrow_{x>0} \\
& \Leftrightarrow_{x>0} \begin{cases} x = \sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 324}}{2}}, \\ y = \frac{9}{x} \end{cases}
\end{aligned}$$

Положительным решением уравнения $a^4 = 324$ является число $a_1 = \sqrt{18}$. При этом значении параметра уравнение $x^4 - a^2 x^2 + 81 = 0$ имеет ровно одно решение, лежащее в первой четверти, а потому в силу симметрии гиперболы имеет с окружностью ровно 4 общих точки, лежащих по одной в каждой координатной четверти. При $0 < a < a_1$ общих точек нет. При $a > a_1$ выражение $a^2 \pm \sqrt{a^4 - 324}$ положительно, поэтому гипербола и окружность пересекаются в 8 точках, лежащих по две в каждой координатной четверти.

Количество решений исходной системы совпадает с количеством точек пересечения окружности и графика первого уравнения системы. Получаем, что

- при $0 < a < a_1$ система не имеет решений;
- при $a = a_1$ система имеет 4 решения;
- при $a_1 < a < a_2$ система имеет 8 решений;
- при $a = a_2$ система имеет **12 решений**;
- при $a_2 < a < a_3$ система имеет **16 решений**;
- при $a = a_3$ система имеет 8 решений;
- при $a_3 < a < a_4$ система имеет **16 решений**;
- при $a = a_4$ система имеет **12 решений**;
- при $a > a_4$ система имеет 8 решений.

Найдем граничные значения параметра из геометрических соображений:

$$a_2 = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

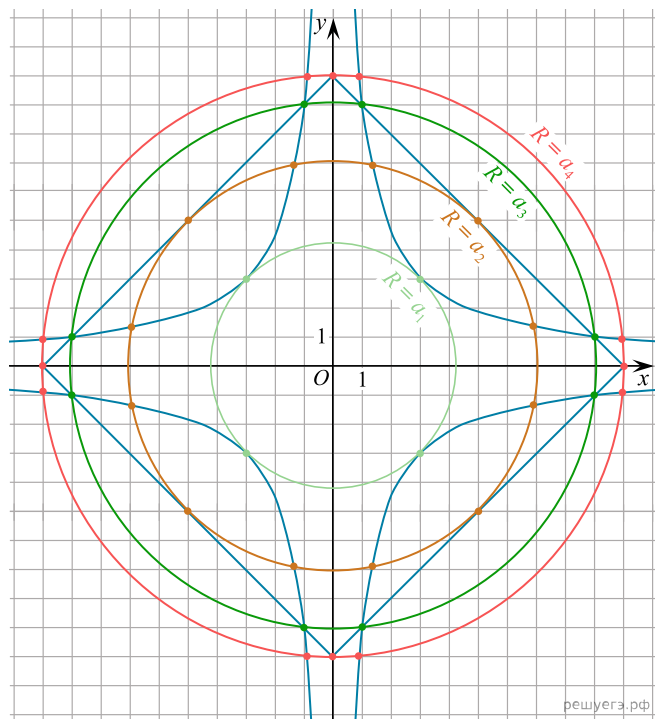
(окружность вписана в квадрат);

$$a_3 = \sqrt{1^2 + 9^2} = \sqrt{82}$$

(окружность проходит через точки пересечения квадрата и гиперболы); $a_4 = 10$ (квадрат вписан в окружность).

Таким образом, исходная система имеет не менее 12 решений при $5\sqrt{2} \leq a < \sqrt{82}$ или $\sqrt{82} < a \leq 10$.

Ответ: $[5\sqrt{2}; \sqrt{82}) \cup (\sqrt{82}; 10]$.



Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем уравнение:

$$(a-3)^2(2+2\sin x-1+\sin^2 x)-2(a-3)^2(1+\sin x)+a+3=0 \Leftrightarrow$$

$$(a-3)^2(1+\sin x)^2-2(a-3)^2(1+\sin x)+a+3=0.$$

Так как уравнение $1+\sin x=t$ имеет решения при и только при $0 \leq t \leq 2$, исходное уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда функция

$$f(t)=b^2t^2-2b^2t+b+6$$

(где $b=a-3$) либо не имеет нулей, либо её нули лежат за пределами отрезка $[0; 2]$.

Итак, f не имеет нулей, во-первых, в случае $b=0$, а во-вторых, в случае $b \neq 0$, тогда функция f — квадратичная. Имеем:

$$D_1=b^4-b^2(b+6)<0 \Leftrightarrow b^2-b-6<0 \Leftrightarrow -2<b<3.$$

Окончательно получаем, что f не имеет нулей при $b \in (-2; 3)$.

Так как при $b \neq 0$ графиком функции f является парабола с вершиной в точке $x_0=1$ и ветвями вверх, её нули лежат вне отрезка $[0; 2]$ при $f(0)=f(2)<0$, откуда $b<-6$.

Окончательно получаем, что f имеет нули вне отрезка $[0; 2]$ тогда и только тогда, когда $b<-6$.

Переходя от значений b к значениям a , получаем, что $a<-3$ или $1<a<6$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; 6)$.

№ 179.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2

В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

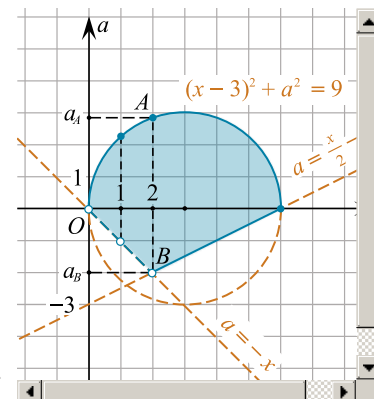
Решение. Преобразуем систему:

$$\begin{cases} x \leq 2a + 6, \\ 6x \geq x^2 + a^2, \\ x + a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 \leq 2a, \\ x^2 - 6x + 9 + a^2 \leq 9, \\ a > -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{x}{2} - 3, \\ (x - 3)^2 + a^2 \leq 3^2, \\ a > -x. \end{cases}$$

В осях xOa изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют полученной системе (выделено синим). Это точки, лежащие одновременно

- не ниже прямой $a = \frac{x}{2} - 3$,
- на окружности радиусом 3 с центром в точке $(3; 0)$ и внутри неё,
- выше прямой $a = -x$.

Точка A — точка окружности $(x - 3)^2 + a^2 < 9$ с абсциссой 2 и положительной ординатой. Точка B — точка пересечения прямых $a = -x$ и $a = \frac{x}{2} - 3$.



Для точки A :

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + a^2 < 3^2, \\ x = 2, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ a = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Для точки B :

$$\begin{cases} a = \frac{x}{2} - 3, \\ a = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ a = -2. \end{cases}$$

На отрезке $[1; 2]$ система имеет хотя бы одно решение при $a_B < a \leq a_A$, где a_A и a_B — ординаты точек A и B соответственно. Таким образом, условие задачи выполнено при $-2 < a \leq 2\sqrt{2}$.

Ответ: $(-2; 2\sqrt{2}]$.

№ 180.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Обосновано получен ответ отличающийся от верного только исключением и/или включением ГРАНИЧНЫХ точек ИЛИ Ответ неверен вследствие одной вычислительной ошибки (описки), не повлиявшей на ход решения и не упростившей задачу.	3
С помощью верного рассуждения получены искомые значения a , возможно неверные, из-за неверной оценки введенной переменной t .	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения графика функций $ x + 2 $ и $ x + a - b$.	1

Решение. Пусть $t = |x+2| + |x-a|$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$$t^2 - 5t + 3a(5-3a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3a, \\ t = 5-3a, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |x+2| + |x-a| = 3a, \\ |x+2| + |x-a| = 5-3a. \end{cases}$$

Значит, решение исходного уравнения — это решение уравнений $|x+2| + |x-a| = 3a$ или $|x+2| + |x-a| = 5-3a$.

Исследуем сколько решений имеет уравнение $|x+2| + |x-a| = b$ в зависимости от a и b . Заметим, что слева стоит сумма модулей, то есть при $b < 0$ решений нет. Запишем уравнение в виде $|x+2| = -|x-a| + b$. График левой части этого уравнения — график модуля с вершиной в точке $(-2, 0)$, график правой части — график модуля, отражённый относительно оси Ox , с вершиной в точке (a, b) . Это уравнение будет иметь два решения, если одновременно прямая $y = -x + a + b$ лежит правее (выше) прямой $y = -x - 2$ и прямая $y = x - a + b$ лежит левее (выше) прямой $y = x + 2$. Это достигается условиями $-x + a + b > -x - 2$ и $x - a + b > x + 2$. Таким образом, уравнение совокупности имеет два решения при условии:

$$\begin{cases} a + b > -2, \\ a - b < -2, \\ b \geq 0. \end{cases}$$

Если вершина (a, b) находится внутри части плоскости отсекаемой графиком $y = |x+2|$, то уравнение имеет два решения, если прямые $y = -x - 2$ и $y = -x + a + b$ совпадают или прямые $y = x + 2$ и $y = x - a + b$ совпадают, то уравнение имеет бесконечно много решений, если вершина (a, b) совпадает с точкой $(-2, 0)$, то уравнение имеет одно решение.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения, если одно из уравнений совокупности имеет два решения, а второе не имеет решений, либо если каждое из уравнений совокупности имеет два решения, но эти решения совпадают. Разберём каждый из этих случаев.

Первый случай. При $a + b < -2$ или $a - b > -2$, или $b < 0$ уравнение совокупности решений не имеет. Таким образом, исходное уравнение имеет два решения, если первое уравнение имеет два решения, а второе — не имеет, либо наоборот. В случае, когда первое уравнение верно, система условий имеет вид:

$$\begin{cases} \begin{cases} a + 3a > -2, \\ a - 3a < -2, \\ 3a \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a + 5 - 3a < -2, \\ a - 5 + 3a > -2, \\ 5 - 3a < 0, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a > -\frac{1}{2}, \\ a > 1, \\ a \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a > \frac{7}{2}, \\ a > \frac{3}{4}, \\ a > \frac{5}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow a > 1.$$

В случае, когда второе уравнение верно, система условий имеет вид:

$$\begin{cases} \begin{cases} a + 3a < -2, \\ a - 3a > -2, \\ 3a < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a + 5 - 3a > -2, \\ a - 5 + 3a < -2, \\ 5 - 3a \geq 0, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a < -\frac{1}{2}, \\ a < 1, \\ a < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a < \frac{7}{2}, \\ a < \frac{3}{4}, \\ a \leq \frac{5}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow a < \frac{3}{4}.$$

Второй случай. Решения совпадут, если совпадают уравнения, то есть, если $3a = 5 - 3a$, откуда $a = \frac{5}{6}$. При данном значении a оба уравнения принимают вид:

$$|x+2| + \left|x - \frac{5}{6}\right| = \frac{5}{2}$$

Данное уравнение не имеет решений, то есть исходное уравнение не имеет решений при a равном $\frac{5}{6}$.

Таким образом, уравнение имеет ровно два решения при $a \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup (1, +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup (1, +\infty)$.

Приведём другое решение.

Пусть $t = |x+2| + |x-a|$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$$t^2 - 5t + 3a(5-3a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3a, \\ t = 5-3a \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |x+2| + |x-a| = 3a, \\ |x+2| + |x-a| = 5-3a. \end{cases} \quad (*)$$

Прямые $x = -2$ и $a = x$ (изображены синим пунктиром) разбивают плоскость xOa на четыре части, в каждой из которых модули снимаются одинаково.

I случай: $x \geq -2$ и $x \geq a$. Получаем

$$\begin{cases} x+2+x-a = 3a, \\ x+2+x-a = 5-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5x + 0,5, \\ a = -x + 1,5. \end{cases}$$

II случай: $x \geq -2$ и $x \leq a$. Тогда

$$\begin{cases} x+2-x+a = 3a, \\ x+2-x+a = 5-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ a = 0,75. \end{cases}$$

III случай: $x \leq -2$ и $x \leq a$. Совокупность принимает вид

$$\begin{cases} -x-2-x+a = 3a, \\ -x-2-x+a = 5-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x-1, \\ a = 0,5x + 1,75. \end{cases}$$

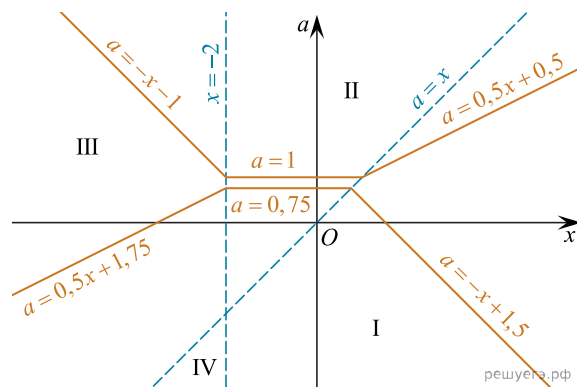
IV случай: $x \leq -2$ и $x \geq a$. Получаем

$$\begin{cases} -x-2+x-a = 3a, \\ -x-2+x-a = 5-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,5, \\ a = 3,5. \end{cases}$$

Графиком совокупности (*) являются две ломаные (изображены оранжевым).

Значит, при $a < 0,75$ или $a > 1$ исходное уравнение имеет два решения, при $a = 0,75$ или $a = 1$ исходное уравнение имеет бесконечное число решений, при $0,75 < a < 1$ исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: $(-\infty, 0,75) \cup (1, +\infty)$.



№ 181.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Пусть первый член прогрессии равен a , а разность прогрессии d .

а) Заметим, что $a_{42} = a_4 + 38d$. При $d = 2$ получаем кратное 11 число $a_{42} = 88$. Например, можно взять прогрессию 6, 8, 10, 12, ...

б) Имеем:

$$a_{95} - a_{73} = (a + 94d) - (a + 72d) = 22d.$$

Найденное выражение кратно 9 только при d кратном 9. Значит,

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 13 + (n - 1) \cdot 9.$$

Полученная сумма не делится на 9 ни при каких n . Противоречие.

в) Докажем, что можно взять $d = 1$. Нужно, чтобы a_1 было кратно 19, и давало остаток 22 при делении на 23 и остаток 29 при делении на 31. Подберем такое a_1 . Заметим, что $a_1 = 91$ удовлетворяет последним двум условиям. Любое другое подходящее a_1 должно отличаться от этого на число, кратное и 23, и 31, то есть кратное 713 (и потому быть не меньше 91). Итак,

$$a_1 = 91 + 713x = 76 + 15 + 37 \cdot 19x + 10x = 19(4 + 37x) + 5(3 + 2x),$$

и тогда число $3 + 2x$ делится на 19. Минимальное такое x — это 8, поэтому минимальное a_1 — это $91 + 8 \cdot 713 = 5795$. Значит, $a_5 = a_1 + 4d = 5799$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5799.

№ 182.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Расположим двузначные числа в клетках прямоугольника высоты 9 и ширины 10 (по горизонтали откладываем единицы, по вертикали — десятки). Каждой попытке Гриши соответствует крестик из пяти клеток: в центре названное им число, а по бокам четыре числа, отличающиеся в одной цифре на единицу (если названное число содержит цифру 0 или 9, некоторые клетки крестика выходят за края прямоугольника; таким клеткам никакие числа не соответствуют). Задача Гриши — покрыть прямоугольник 9×10 такими крестиками. Убедимся, что 18 крестиков ему не хватит. Суммарная площадь крестиков равна $18 \times 5 = 90$, т.е. равна площади прямоугольника. Но, покрывая угловую клетку, мы неизбежно выйдем за пределы прямоугольника, и эта потеря помешает покрыть весь прямоугольник.

б, в) Решим сразу пункт в) — убедимся, что 22 попыток хватит. Покрытие из 22 крестиков легко найти, если заметить, что крестиками можно выложить плоскость без перекрытий (правда, придётся ещё добавить несколько крестиков по краям прямоугольника). Например, Гриша может назвать числа 11, 13, 17, 25, 29, 30, 32, 37, 44, 49, 51, 56, 63, 68, 70, 75, 82, 87, 89, 90, 94, 97.

Давайте рассмотрим предложенную картинку. Прямоугольник замощен фигурами разной формы: крест (5 клеток), Т-образный (4 клетки), трехклеточные (угловые и прямые), двухклеточные фигуры и две одиночные клетки.

Услышав «холодно», мы (Гриша) сразу отбрасываем все клетки названной фигуры, услышав «тепло», — начинаем проверять. Для проверки разных фигур требуется разное максимальное количество дополнительных ходов: для креста — 3 хода, для Т-образного и трехклеточных фигур — 2 хода, для двухклеточных — 1 ход.

Стратегия состоит в следующем.

Сначала называем числа, соответствующие крестам, поскольку для них требуется больше проверочных ходов: 25, 32, 37, 44, 51, 56, 63, 68, 75, 82, 87 (всего 11 чисел). Если мы слышали «тепло», то для угадывания числа нам потребовалось максимум $11+3=14$ ходов, если же всё время мы слышали «холодно», то мы потратили 11 ходов и исключили 55 чисел.

Далее называем числа, соответствующие Т-образным и трехклеточным: 11, 13, 17, 29, 30, 49, 70, 89, 94 (таких чисел 9). Если мы теперь слышали «тепло», то для угадывания числа нам потребовалось максимум $11+9+2=22$ хода (Ура!!!), если же всё время мы и теперь слышали «холодно», то мы потратили $11+9=20$ ходов и исключили $55+31=86$ чисел.

Далее называем число 90, это был двадцать первый ход. Если слышим «тепло», то проверяем одним ходом и отгадываем число за $21+1=22$ хода (Ура!!!), а если слышим «холодно», то вычеркиваем еще 2 числа. Итого вычеркнуто $86+2=88$ чисел, за 21 ход. Осталось два невычеркнутых числа.

ФИНАЛ (последний, 22-й ход): называем число 96. Если «тепло», то загадано число 96, если «холодно», то загадано число 98. УРА!!!

Таким образом, Гриша (с нашей помощью), при правильной стратегии максимум за 22 хода обязательно отгадает задуманное Лёшей двузначное число.

№ 183.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Например, 2, 4, 5, 5, 4.

б) Нет. Заметим, что $a_{k+2} - a_{k+1} = a_{k+1} - a_k - 1$, то есть разность между соседними членами последовательности уменьшается на 1. Поэтому последовательность с какого-то момента убывает, а до этого момента возможно возрастает (возрастающей части может и не быть, если разность сразу выбрать отрицательной). Очевидно, каждое число может не более одного раза встретиться на участке возрастания и на участке убывания.

в) Заметим, что если ко всем членам последовательности прибавить одно и то же число, она по-прежнему будет удовлетворять условию. Выберем максимальный ее член x и прибавим ко всем членам по $999 - x$. Теперь максимальный равен 999, а остальные остались трехзначными.

Изучим, сколько трехзначных чисел может содержать убывающая последовательность такого типа, начинающаяся с 999. Это будут числа

$$999 - 1, 999 - 1 - 2, \dots, 999 - 1 - 2 - \dots - n = 999 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для того чтобы они были трехзначными, нужно, чтобы $n(n+1) \leq 2 \cdot 899$, $n \leq 41$. Итак, может быть не более 42 чисел. Аналогично возрастающая часть последовательности содержит не более 42 чисел и общий ответ — 84.

Ответ: а) да; б) нет; в) 84.

№ 184.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Пусть данное число равно $100a + 10b + c$, где a , b и c — цифры сотен, десятков и единиц соответственно. Если частное этого числа и суммы его цифр равно k , то выполнено $100a + 10b + c = ka + kb + kc$.

а) Если частное равно 90, то $100a + 10b + c = 90a + 90b + 90c$; $10a = 80b + 89c$, что верно, например, при $c = 0$, $b = 1$, $a = 8$ — частное числа 810 и суммы его цифр равно 90.

б) Если частное равно 88, то $100a + 10b + c = 88a + 88b + 88c \Leftrightarrow 12a = 78b + 87c \Leftrightarrow 4a = 26b + 29c$. Так как $a < 10$, то $b = 0, c = 1$ или $b = 1, c = 0$. В обоих этих случаях не существует натурального числа a , удовлетворяющего уравнению. Значит, частное трёхзначного числа и суммы его цифр не может быть равным 88.

в) Пусть k — наибольшее натуральное значение частного числа, не кратного 100, и суммы его цифр. Тогда

$$100a + 10b + c = ka + kb + kc \Leftrightarrow (100 - k)a = (k - 10)b + (k - 1)c.$$

Учитывая, что $b+c > 0$, получаем:

$$9(100-k) \geq (100-k)a = (k-10)b + (k-1)c \geq (k-10)(b+c) \geq k-10, \quad 9(100-k) \geq (100-k)a = (k-10)b + (k-1)c \geq (k-10)(b+c) \geq k-10.$$

откуда $9(100 - k) \geq k - 10 \Leftrightarrow 10k \leq 910 \Leftrightarrow k \leq 91$.

Частное числа 910 и суммы его цифр равно 91. Значит, наибольшее натуральное значение частного трёхзначного числа, не кратного 100, и суммы его цифр равно 91.

Ответ: а) да; б) нет; в) 91.

№ 185.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2

Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Подходит, например, 238, поскольку $\frac{238}{2 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{119}{24}$.

б) Поскольку при сокращении дроби и в числителе и в знаменателе остаются делители изначального числа и произведения его цифр, число должно было делиться на 125. Если при этом оно было четным, то заканчивалось на 0, поэтому его произведение цифр было нулем, что невозможно. Проверяя числа 125, 375, 625, 875, видим, что ни у одного из них произведение цифр не кратно 24.

в) Если дробь несократима, в числителе должно стоять число с произведением цифр 24, при этом не кратное 2 и 3. Девятки и семерки среди его цифр точно нет, если есть восьмерка, то остальные цифры — 3 и 1, что дает числитель, кратный 3. Если же максимальная из цифр шестерка, то остальные либо 2 и 2 (тогда число четно), либо 4 и 1. Таким образом, получаем $\frac{641}{24}$.

Если же дробь сократима, то ее числитель после сокращения не превосходит $999 : 2 < 641$, поэтому такие дроби точно не дадут максимальный результат.

Ответ: а) 238; б) нет; в) $\frac{641}{24}$.

№ 186.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. а; — пример в п. а, обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. б; — пример в п. б, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Если за столом было 5 мальчиков, евших только бутерброды, 8 мальчиков, евших только конфеты, и 12 девочек, каждая из которых ела и то и другое, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 25 детей могло быть 13 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 14 или больше. Тогда девочек было 11 или меньше. Пусть число мальчиков, евших бутерброды равно m_1 . Тогда число $\frac{m_1}{m_1 + 11}$ не больше, чем доля мальчиков, евших бутерброды среди всех детей, евших бутерброды, а это число не больше, чем $\frac{5}{16}$, откуда $\frac{m_1}{m_1 + 11} \leq \frac{5}{16}$ и, следовательно, $m_1 \leq 5$. Пусть m_2 —

число мальчиков, евших конфеты. Аналогично, $\frac{m_2}{m_2+11} \leq \frac{2}{5}$, откуда, учитывая, что m_2 число целое, находим: $m_2 \leq 7$. Но тогда общее число мальчиков, евших хоть что-то не больше, чем $5+7=12$. Следовательно, по крайней мере, 2 мальчика ничего не ели, а это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 25 учащихся могло быть 13 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 13.

в) Предположим, что некоторый мальчик ел и конфеты, и бутерброды. Если бы вместо него было два мальчика, один из которых ел только конфеты, а другой — только бутерброды, то доля мальчиков, евших конфеты и доля мальчиков, евших бутерброды, остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек можно считать, что каждый мальчик ел или только конфеты, или только бутерброды.

Пусть, как прежде, m_1 мальчиков ели бутерброды, m_2 ели конфеты, и всего было d девочек. Оценим долю девочек. Будем считать, что каждая девочка ела и конфеты, и бутерброды, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля среди евших конфеты и доля среди евших бутерброды не станут меньше.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d} \leq \frac{5}{16}$, $\frac{m_2}{m_2+d} \leq \frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{5}{11}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{2}{3}$.

Тогда $\frac{m_1+m_2}{d} \leq \frac{37}{33}$, поэтому доля девочек равна

$$\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \geq \frac{1}{\frac{37}{33}+1} = \frac{33}{70}.$$

Осталось показать, что такая доля девочек действительно могла быть. Например, если из 70 детей 15 мальчиков ели только бутерброды, 22 мальчика ели только конфеты, и еще было 33 девочки, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено, а доля девочек в точности равна $\frac{33}{70}$.

Ответ: а) да; б) 13; в) $\frac{33}{70}$.

№ 187.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Подходящим примером является прогрессия с первым членом 50 и разностью 50. Среди первых семи её членов (50, 100, 150, 200, 250, 300, 350) ровно три делятся на 100.

б) Обозначим через d разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Из условия следует, что d — натуральное число. Пусть m и n — натуральные числа, $m > n$, НОД($d, 100$) обозначает наибольший общий делитель чисел d и 100. Имеем

$$a_m - a_n = (a_1 + (m-1)d) - (a_1 + (n-1)d) = (m-n)d.$$

Следовательно, разность $a_m - a_n$ делится на 100 тогда и только тогда, когда разность $m - n$ делится на $k = \frac{100}{\text{НОД}(d, 100)}$. Значит, если среди членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ есть кратные 100, то это члены

с номерами вида $kp+q$, где q — номер первого члена, кратного $100(q \leq k)$, а p пробегает все неотрицательные целые числа. Поэтому среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ровно один будет делиться на 100. Если $k \leq 4$, то $12 < \frac{49}{k}$, и среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ будет по крайней мере 12 чисел, кратных 100. Если же $k \geq 5$, то $10 > \frac{49}{k}$, и среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ будет не более 10 чисел, кратных 100. Значит, не существует такой прогрессии, в которой среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100.

в) Обозначим через $[x]$ целую часть числа x — наибольшее целое число, не превосходящее x . По доказанному в пункте б) среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ровно один будет делиться на 100, где $k = \frac{100}{\text{НОД}(d, 100)}$, d — разность арифметической прогрессии.

Значит, среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ кратными 100 будут не более $\left[\frac{2n}{k}\right] + 1$ чисел. Аналогично, среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$ кратными 100 будут не менее $\left[\frac{3n}{k}\right]$ чисел. Неравенство $\left[\frac{2n}{k}\right] + 1 > \left[\frac{3n}{k}\right]$ выполнено тогда и только тогда, когда $\left[\frac{2n}{k}\right] = \left[\frac{3n}{k}\right]$. Пусть это равенство выполнено. Тогда разность между числами $\frac{3n}{k}$ и $\frac{2n}{k}$ меньше 1. Получаем, что $\frac{n}{k} < 1$ и $\frac{2n}{k} < 2$. Значит, $\left[\frac{3n}{k}\right] = \left[\frac{2n}{k}\right] < 2$, $\frac{3n}{k} < 2$ и $n < \frac{2k}{3}$. Поскольку число k не превосходит 100, отсюда следует, что $n \leq 66$. Рассмотрим прогрессию с первым членом 69 и разностью 1. Тогда среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_{132}$ ровно два делятся на 100 ($a_{32}=100$ и $a_{132}=200$). Среди чисел $a_{133}, a_{134}, \dots, a_{330}$ ровно одно делится на 100 ($a_{232}=300$). Этот пример показывает, что n может равняться 66.

Ответ: а) да, например прогрессия 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, ...; б) нет; в) 66.

№ 188.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Запишем каждое трехзначное число с цифрами a, b, c в виде $100a + 10b + c$. Пусть сумма всех первых цифр равна A , вторых B и третьих C , тогда по условию $100A + 10B + C = 2970$.

а) После замены сумма стала равна $100C + 10B + A$. Допустим, что

$$100C + 10B + A = 2970 : 3 = 990,$$

тогда вычитая уравнения друг из друга получим $99A - 99C = 1980$, откуда $A - C = 20$. Складывая это с исходным уравнением, находим $101A + 10B = 2990$. Значит, A кратно 10. При этом $101A \leq 2990$, откуда $A < 30$. Значит, $A \leq 20$ и $C \leq 0$. Тогда $C = 0$, значит, все числа кончаются на 0 и переставлять в них цифры нельзя.

б) Аналогично допустим

$$100C + 10B + A = 2970 : 2 = 1485,$$

тогда вычитая уравнения друг из друга получим $99A - 99C = 1485$, откуда $A - C = 15$. Складывая это с исходным уравнением, находим $101A + 10B = 2985$. Значит, A кратно 5. Возьмем $A = 25$, тогда $C = 10$ и $B = (2985 - 2525) : 10 = 46$. Значит, можно, например, взять числа 491 (5 раз) и 515 (один раз).

в) Пусть сумма новых чисел равна N , тогда аналогично получаем $100C + 10B + A = N$ и $99(A - C) = 2970 - N$, поэтому $2970 - N$ кратно 99, значит, и N кратно 99. Пусть $N = 99x$, тогда $99(A - C) = 2970 - 99x$, откуда $A - C = 30 - x$ и $101A + 10B = 3000 - x$. Сумма новых чисел должна быть как можно меньше, то есть ее разность с изначальной суммой — как можно больше. Итак, $30 - x$ должно быть как можно больше, следовательно, x — как можно меньше. Пример для $x = 15$ уже построен в пункте б).

Уравнение $101A + 10B = 3000 - x$ можно переписать в виде

$$A + x = 3000 - 100A - 10B,$$

откуда $A + x$ кратно 10. Тогда $C = A + x - 30$ также кратно 10, откуда $A + x \geq 40$ (поскольку $C \neq 0$). При этом $101A < 3000$ и потому $A \leq 29$, значит, $x \geq 11$.

Пусть $A = 29$, $x = 11$, тогда $29 \cdot 29 + 10B = 3000 - 11$, откуда $B = 6$, и $C = A + x - 30 = 10$. Такие числа можно подобрать, например, подойдут 912, 912, 912, 234. Для них сумма новых чисел равна $99 \cdot 11 = 1089$.

Ответ: а) нет; б) да; в) 1089.

№ 189.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да. Например, можно взять $x^2 + 5x + 2$.

б) Нет. Если бы это было возможно, то выполнялось бы равенство $m^2 - 4n = 54$, откуда $m^2 = 54 + 4n$. Если m четно, то m^2 кратно 4, а $54 + 4n$ не кратно 4. Если же m нечетно, то m^2 тоже нечетно, а $54 + 4n$ четно.

в) Дискриминант равен

$$\begin{aligned}(3m+n)^2 - 4(3n+m) &= (3m+n)^2 - 12n - 4m = (3m+n)^2 - 12(3m+n) + 32m \\ &= (3m+n)^2 - 12(3m+n) + 32m \\ &= (3m+n)^2 - 12(3m+n) + 36 + 32m - 36 = (3m+n-6)^2 + 32m - 36. \\ &= (3m+n-6)^2 + 32m - 36.\end{aligned}$$

Пусть $m = 1$, тогда

$$(n-3)^2 + 32 - 36 = (n-3)^2 - 4 = n^2 - 6n + 5 = (n-1)(n-5).$$

При $n \in [1; 5]$ это выражение неположительно, а при $n \geq 6$ оно возрастает, поэтому оптимальный вариант будет при $n = 6$. В этом случае дискриминант будет равен 5 и трехчлен будет иметь вид: $x^2 + 9x + 19$.

Пусть $m \geq 2$, то это выражение будет не меньше $0^2 + 32 \cdot 2 - 36 = 28$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

№ 190.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2

Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть $a_1 = 3$ и $a_2 = 1$. Тогда $a_3 = 3 + 1 = 4$, $a_4 = 1 + 4 = 5$, $a_5 = 4 + 5 = 9$ и $5a_5 = 9a_4$.

б) Предположим, что $5a_5 = 7a_4$. Тогда $a_5 = 7a$ и $a_4 = 5a$, где $a = \frac{a_5}{7} > 0$. Имеем $a_3 = a_5 - a_4 = 2a$, $a_2 = a_4 - a_3 = 3a$ и $a_1 = a_3 - a_2 = -a < 0$. Получаем противоречие.

в) Пример последовательности 3, 3, 6, 9, 15, 24, ... показывает, что равенство $3na_{n+1} = (n^2 - 1)a_n$ может выполняться при $n = 5$. Действительно, для такой последовательности выполнены условия задачи и $15a_6 = 24a_5$.

Пусть $n \geq 6$ и $3na_{n+1} = (n^2 - 1)a_n$. Положим $a = \frac{a_n}{3n} > 0$. Тогда $a_n = 3na$ и $a_{n+1} = (n^2 - 1)a$. Имеем

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = (n^2 - 3n - 1)a;$$

$$a_{n-2} = a_n - a_{n-1} = (-n^2 + 6n + 1)a;$$

$$a_{n-3} = a_{n-1} - a_{n-2} = (2n^2 - 9n - 2)a;$$

$$a_{n-4} = a_{n-2} - a_{n-3} = -3(n^2 - 5n - 1)a.$$

$a_{n-4} > 0$, поэтому $n^2 - 5n - 1 < 0$. Следовательно, $n < 6$. Полученное противоречие показывает, что при $n \geq 6$ равенство $3na_{n+1} = (n^2 - 1)a_n$ выполняться не может.

Ответ: а) да; б) нет; в) при $n = 5$.

Приведём идею решения п. в) Леонида Колмогорцева.

Если равенство выполняется то $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 - 1}{3n}$, откуда в силу того, что $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, после почленного деления получаем:

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{n}{3} - \frac{1}{3n},$$

Левая часть полученного равенства меньше 2 для всех n , так как $a_{n-1} < a_n$. Правая часть равенства является возрастающей функций от n . Поэтому решениями неравенства могут быть только такие значения переменной, для которых правая часть меньше 2. Следовательно, $n \leq 6$. Далее рассмотрим возможность существования решения при $n = 5$ и $n = 6$ аналогично пунктам а) и б).