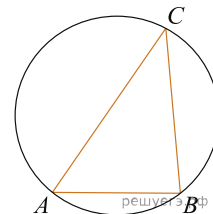


Вариант 230

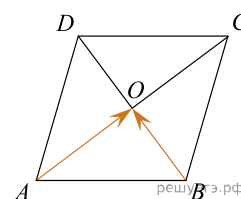
№ 1.

Одна сторона треугольника равна $\sqrt{2}$, радиус описанной окружности равен 1. Найдите острый угол треугольника, противолежащий этой стороне. Ответ дайте в градусах.



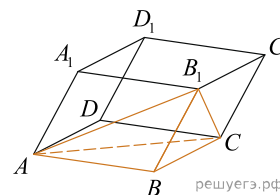
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AO} - \vec{BO}$.



№ 3.

Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 12. Найдите объем треугольной пирамиды $B_1 ABC$.



№ 4.

Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1.

№ 5.

В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя не глядя переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

№ 6.

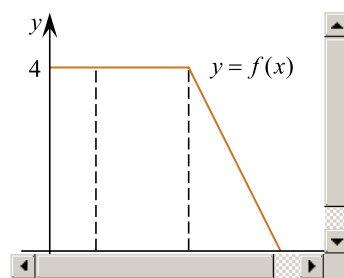
Найдите корень уравнения $\log_8 2^{8x-4} = 4$.

№ 7.

Найдите значение выражения $5(p(2x) - 2p(x+5))$, если $p(x) = x - 10$.

№ 8.

На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int_1^5 f(x) dx$.



№ 9.

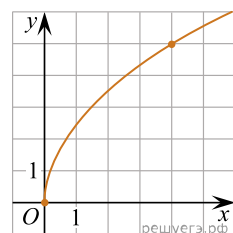
Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку (в Н·м), определяется формулой $M = NIBl^2 \sin \alpha$, где $I = 2$ А — сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл — значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м — размер рамки, $N = 1000$ — число витков провода в рамке, α — острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше $0,75$ Н·м?

№ 10.

По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 90 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 1 минуте. Ответ дайте в метрах.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(6,76)$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке $[-3; 3]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\sin 6\pi x - \cos 3\pi x = \sqrt{2} \cos \left(3\pi x - \frac{\pi}{4} \right) - 1$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[1 - \sqrt{2}; \sqrt{2} - 1]$.

№ 14.

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость α проходит через ребро AB и пересекает ребра SC и SD в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 5MN$.

а) Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$.

б) Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.

№ 15.

Решите неравенство $5 \cdot 4^{\log_2^2(4x)} - 9 \cdot (4x)^{\log_2(4x)} - 2 \leq 0$.

№ 16.

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 900 000 рублей на 13 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа с 1 по 12 месяц долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму;
- 15-го числа 13 месяца долг должен быть погашен.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 12 месяца, если всего было выплачено 1134 тысяч рублей?

№ 17.

Первая окружность с центром O , вписанная в равнобедренный треугольник KLM , касается боковой стороны KL в точке B , а основания ML — в точке A . Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и $AK = 16$.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y| + x^2 - 4)(|x| + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - |x| - |y|) = 0, \\ y - x = a \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

№ 19.

а) Существуют ли натуральные числа m и n , такие, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + mx + n$ равен 17?

- б) Существуют ли натуральные числа m и n , такие, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + mx + n$ равен 54?
- в) Какое наименьшее значение принимает дискриминант D квадратного трехчлена $x^2 + (3m+n)x + (3n+m)$, если известно, что числа m , n и D — натуральные?

Ответы

Номер Задание Ответ

1	522916	45
2	27718	10
3	27182	2
4	320209	0,25
5	500998	0,6
6	315120	2
7	26821	0
8	500890	12
9	27999	30
10	99611	400
11	509113	6,5
12	77446	11

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а),	
ИЛИ	1
получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, тогда:

$$\begin{aligned}
 2\cos^2 x + \sin^2 x &= 2\cos^3 x \Leftrightarrow \cos^2 x + 1 = 2\cos^3 x \Leftrightarrow 2\cos^3 x - \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\cos^2 x + \cos x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 2\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \cos^2 x + 1 = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\cos^3 x - \cos^2 x - 1 &= 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\cos^2 x + \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 2\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \cos^2 x + 1 = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\cos^3 x - \cos^2 x - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\cos^2 x + \cos x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 2\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \cos^2 x + 1 = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\cos^3 x - \cos^2 x - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\cos^2 x + \cos x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

б) Отберем корни уравнения на заданном отрезке. Имеем:

$$-\frac{7\pi}{2} \leq 2\pi k \leq -2\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{4} \leq k \leq -1 \Leftrightarrow_{k \in \mathbb{Z}} k = -1.$$

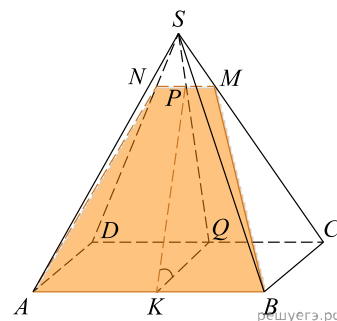
Единственным корнем, принадлежащим заданному отрезку, является число -2π .

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б)	
ИЛИ	2
имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	
Имеется верное доказательство утверждения пункта а),	
ИЛИ	
при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,	1
ИЛИ	
обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Основанием правильной четырехугольной пирамиды является квадрат, значит, ребра AB и DC параллельны, а потому и плоскость AMN параллельна ребру DC . Следовательно, лежащая в плоскости прямая MN также параллельна ребру DC . Тогда треугольники SNM и SDC подобны по двум углам с коэффициентом $\frac{1}{5}$. Таким образом, $SN:SD=1:5$, а потому $SN:ND=1:4$. Поскольку боковые ребра правильной пирамиды равны, $SM:MC = 1:4$.

б) Пусть $MN = x$ и $SM = y$, тогда $MC = 4y$ и $AB = AN = BM = 5x$, и пусть точки K, P и Q — середины отрезков AB, MN и DC соответственно.



Рассмотрим прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен PK , а гипотенуза равна BM . Тогда второй катет такого треугольника будет равен $BK - MP$. Аналогично получается прямоугольный треугольник с катетами $PQ, QC - PM$ и гипотенузой MC . Применим к обоим фигурам теорему Пифагора:

$$PK^2 = BM^2 - (BK - MP)^2 = (5x)^2 - \left(\frac{5x}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 = 21x^2,$$

$$PQ^2 = MC^2 - (QC - PM)^2 = (4y)^2 - \left(\frac{5x}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 = 16y^2 - 4x^2.$$

Косинус искомого угла равен косинусу угла между прямыми, перпендикулярными линии пересечения этих плоскостей, то есть $\cos \angle PKQ$ — искомый. Воспользуемся теоремой косинусов в треугольнике PKQ :

$$\begin{aligned} \cos \angle PKQ &= \frac{PK^2 + KQ^2 - PQ^2}{2 \cdot PK \cdot KQ} = \frac{21x^2 + 25x^2 - 16y^2 + 4x^2}{2 \cdot \sqrt{21}x \cdot 5x} = \frac{50x^2 - 16y^2}{10\sqrt{21}x^2} \cdot \cos \angle PKQ = \frac{PK^2 + KQ^2 - PQ^2}{2 \cdot PK \cdot KQ} = \\ &= \frac{21x^2 + 25x^2 - 16y^2 + 4x^2}{2 \cdot \sqrt{21}x \cdot 5x} = \frac{50x^2 - 16y^2}{10\sqrt{21}x^2}. \end{aligned}$$

В равнобедренном треугольнике SBC найдем косинус угла SCB :

$$\cos \angle SCB = \frac{25x^2 + 25y^2 - 25y^2}{2 \cdot 5x \cdot 5y} = \frac{25x^2}{50xy} = \frac{x}{2y}.$$

Косинус этого же угла выразим из треугольника MBC :

$$\cos \angle SCB = \frac{16y^2 + 25x^2 - 25x^2}{2 \cdot 5x \cdot 4y} = \frac{16y^2}{40xy} = \frac{2y}{5x}.$$

Приравняем полученные значения:

$$\frac{x}{2y} = \frac{2y}{5x} \Leftrightarrow 5x^2 = 4y^2 \Leftrightarrow x^2 = 0,8y^2.$$

Наконец, подставим в выражение для косинуса искомого угла:

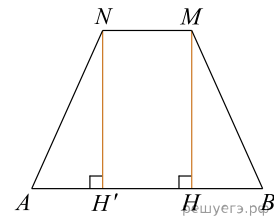
$$\cos \angle PKQ = \frac{40y^2 - 16y^2}{\sqrt{21} \cdot 8y^2} = \frac{24y^2}{\sqrt{21} \cdot 8y^2} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Приведем другое решение пункта б) Александра Турбанова (Липецк)

Пусть $MN = x$, опустим на основание равнобедренной трапеции $ANMB$ две высоты — MN и NH . Тогда $BH = AH = 2x$. Из прямоугольного треугольника BMH по теореме Пифагора $MH = \sqrt{21}x$. Следовательно, площадь трапеции равна

$$S_{ANMB} = \frac{MN + AB}{2} \cdot MH = 3x \cdot \sqrt{21}x = 3\sqrt{21}x^2.$$



Спроектируем трапецию $ANMB$ на плоскость основания и получим равнобедренную трапецию $AN'MB$, диагонали которой перпендикулярны. Значит, ее площадь равна половине произведения диагоналей, то есть

$$S_{AN'M'B} = \frac{1}{2} \cdot BN' \cdot AM' = \frac{1}{2} \cdot (3x\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot 18x^2 = 9x^2.$$

Площадь ортогональной проекции трапеции на плоскость равна площади этой трапеции, умноженной на косинус угла между плоскостями трапеции и ее проекции, а потому

$$\cos \alpha = \frac{S_{AN'M'B}}{S_{ANMB}} = \frac{9x^2}{3\sqrt{21}x^2} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек,	
ИЛИ	1
получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Выполним преобразования:

$$4^{\log_2^2(4x)} = \left(4^{\log_2(4x)}\right)^{\log_2(4x)} = (4x)^{2\log_2(4x)} = \left((4x)^{\log_2(4x)}\right)^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & 5 \cdot 4^{\log_2^2(4x)} - 9 \cdot (4x)^{\log_2(4x)} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & 5 \left((4x)^{\log_2(4x)} \right)^2 - 9 \cdot (4x)^{\log_2(4x)} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq (4x)^{\log_2(4x)} \leq 2 \Leftrightarrow 5 \cdot 4^{\log_2^2(4x)} - 9 \cdot (4x)^{\log_2(4x)} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & 5 \left((4x)^{\log_2(4x)} \right)^2 - 9 \cdot (4x)^{\log_2(4x)} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{5} \leq (4x)^{\log_2(4x)} \leq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (4x)^{\log_2(4x)} \leq 2 \Leftrightarrow \log_2(4x)^{\log_2(4x)} \leq \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2^2(4x) \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & -1 \leq \log_2(4x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 4x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (4x)^{\log_2(4x)} \leq 2 \Leftrightarrow \log_2(4x)^{\log_2(4x)} \leq \log_2 2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2(4x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \log_2(4x) \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 4x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Ответ: $\left[\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>

Решение. Пусть 15-го числа 12-го месяца долг составит x тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$900; \frac{11 \cdot 900 + x}{12}; \frac{10 \cdot 900 + 2x}{12}; \dots \frac{900 + 11x}{12}; x; 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$927; 1,03 \cdot \frac{11 \cdot 900 + x}{12}; \dots 1,03 \cdot \frac{900 + 11x}{12}; 1,03x.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$27 + \frac{900 - x}{12}; 0,03 \cdot \frac{11 \cdot 900 + x}{12} + \frac{900 - x}{12}; \dots 0,03 \cdot \frac{900 + 11x}{12} + \frac{900 - x}{12}; 1,03x. \quad 27 + \frac{900 - x}{12}; 0,03 \cdot \frac{11 \cdot 900 + x}{12} + \frac{900 - x}{12}; \dots 0,03 \cdot \frac{900 + 11x}{12} + \frac{900 - x}{12}; 1,03x.$$

Всего следует выплатить

$$27 + 0,03 \cdot \frac{900 + x}{2} \cdot 11 + 900 - x + 1,03x = 0,195x + 1075,5 \text{ (тыс.рублей)}, \quad 27 + 0,03 \cdot \frac{900 + x}{2} \cdot 11 + 900 - x + 1,03x = 0,195x + 1075,5 \text{ (тыс.рублей)},$$

откуда $0,195x + 1075,5 = 1134 \Leftrightarrow 0,195x = 58,5 \Leftrightarrow x = 300$. Значит, 15-го числа 12-го месяца долг составит 300 тыс. рублей.

Ответ: 300.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б)	
ИЛИ	2
имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	

Имеется верное доказательство утверждения пункта а)

ИЛИ

при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,

1

ИЛИ

обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше

0

Максимальный балл

3

Решение. а) Пусть окружность с центром O_1 касается продолжения боковой стороны KL в точке C . Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому LO и LO_1 — биссектрисы смежных углов KLM и CLM . Следовательно, $\angle OLO_1 = 90^\circ$.

б) Прямоугольные треугольники KBO и KAL подобны, поэтому

$$\frac{AL}{OB} = \frac{AK}{KB}.$$

Значит,

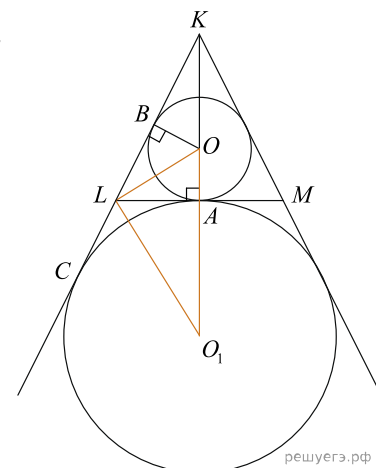
$$AL = \frac{AK \cdot OB}{KB} = \frac{AK \cdot OB}{\sqrt{OK^2 - OB^2}} = \frac{16 \cdot 6}{\sqrt{10^2 - 6^2}} = \frac{16 \cdot 6}{8} = 12.$$

Пусть радиус окружности с центром O_1 равен r_1 . Треугольник KLM

равнобедренный, поэтому окружности с центрами O и O_1 касаются основания ML в одной и той же точке A . Значит, точка A лежит на отрезке OO_1 , причём LA — высота прямоугольного треугольника OLO_1 , проведённая из вершины прямого угла. Следовательно,

$$r_1 = O_1A = \frac{AL^2}{OA} = \frac{12^2}{6} = 24.$$

Ответ: б) 24.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения,	
ИЛИ	2
в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений,	
ИЛИ	1
в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. График первого уравнения симметричен относительно осей координат, поэтому построим его при $x \geq 0$ и $y \geq 0$, а затем достроим график, используя симметрию. Имеем:

$$\begin{cases} (|y| + x^2 - 4)(|x| + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - |x| - |y|) = 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = \sqrt{4 - x}, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, график первого уравнения исходной системы представляет собой объединение частей парабол и дуг окружностей (выделено оранжевым). Заметим, что полученный график также симметричен относительно прямых $y = x$ и $y = -x$. Графиком второго уравнения исходной системы является семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом 1. Проанализируем построенные графики.

Прямая $y = x + a$ является касательной к части графика первого уравнения, задаваемой функцией $y = x^2 - 4$ в точке с абсциссой

$$(x^2 - 4)' = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = 0,5,$$

а именно в точке $A(0,5; -3,75)$, то есть при

$$-3,75 = 0,5 + a \Leftrightarrow a = -4,25.$$

В силу симметрии эта же прямая (выделена синим) является касательной к графику первого уравнения в точке $B(3,75; -0,5)$.

Найдём координаты точки C — точки пересечения графиков $y = x^2 - 4$ и $x = y^2 - 4$ при положительных значениях x и отрицательных значениях y :

$$x^2 - 4 = -x \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$$

Прямая $y = x + a$ (выделено зелёным) проходит через точку $C\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right)$ при

$$\frac{1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} + a \Leftrightarrow a = 1 - \sqrt{17}.$$

Прямая $y = x + a$ (выделена красным) является касательной к дуге окружности $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ в точке $D(1; -1)$ при

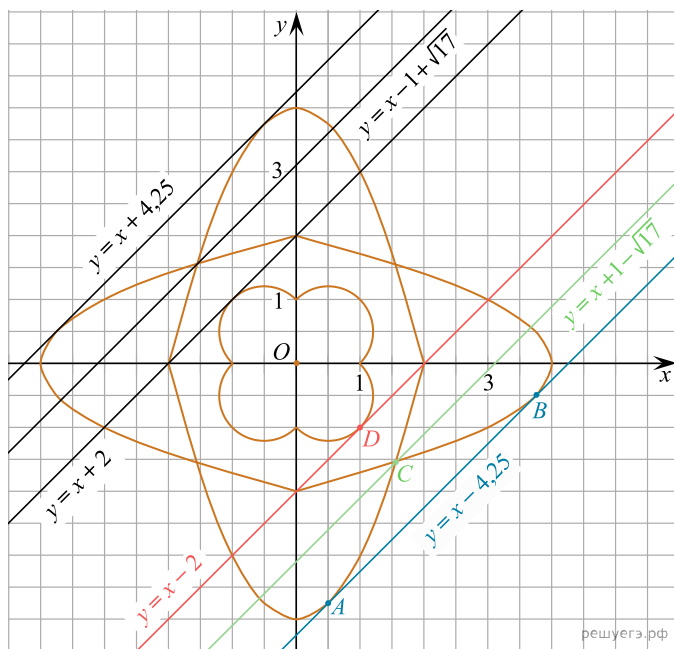
$$-1 = 1 + a \Leftrightarrow a = -2.$$

Найдём количество решений системы при неположительных значениях параметра a . Получаем, что исходная система

- при $a < -4,25$ не имеет решений;
- при $a = -4,25$ имеет два решения;
- при $-4,25 < a < 1 - \sqrt{17}$ — **четыре решения**;
- при $a = 1 - \sqrt{17}$ — три решения;
- при $1 - \sqrt{17} < a < -2$ — **четыре решения**;
- при $-2 \leq a \leq 0$ — более четырёх решений.

В силу симметричности четыре решения исходная система будет иметь также при $2 < a < \sqrt{17} - 1$ и $\sqrt{17} - 1 < a < 4,25$.

Ответ: $(-4,25; 1 - \sqrt{17}) \cup (1 - \sqrt{17}; -2) \cup (2; \sqrt{17} - 1) \cup (\sqrt{17} - 1; 4,25)$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б)	
ИЛИ	2
обоснованно получен верный ответ в пункте в)	
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да. Например, можно взять $x^2 + 5x + 2$.

б) Нет. Если бы это было возможно, то выполнялось бы равенство $m^2 - 4n = 54$, откуда $m^2 = 54 + 4n$. Если m четно, то m^2 кратно 4, а $54 + 4n$ не кратно 4. Если же m нечетно, то m^2 тоже нечетно, а $54 + 4n$ четно.

в) Дискриминант равен

$$\begin{aligned}
 (3m+n)^2 - 4(3n+m) &= (3m+n)^2 - 12n - 4m = (3m+n)^2 - 12(3m+n) + 32m \quad (3m+n)^2 - 4(3n+m) = (3m+n)^2 - 12n - 4m = \\
 &= (3m+n)^2 - 12(3m+n) + 32m \\
 &= (3m+n)^2 - 12(3m+n) + 36 + 32m - 36 = (3m+n-6)^2 + 32m - 36. = (3m+n)^2 - 12(3m+n) + 36 + 32m - 36 = \\
 &= (3m+n-6)^2 + 32m - 36.
 \end{aligned}$$

Пусть $m = 1$, тогда

$$(n-3)^2 + 32 - 36 = (n-3)^2 - 4 = n^2 - 6n + 5 = (n-1)(n-5).$$

При $n \in [1; 5]$ это выражение неположительно, а при $n \geq 6$ оно возрастает, поэтому оптимальный вариант будет при $n = 6$. В этом случае дискриминант будет равен 5 и трехчлен будет иметь вид: $x^2 + 9x + 19$.

Пусть $m \geq 2$, то это выражение будет не меньше $0^2 + 32 \cdot 2 - 36 = 28$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.
