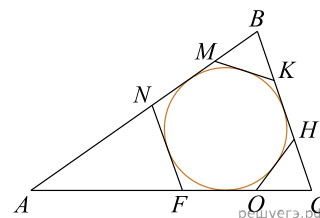


Вариант 232

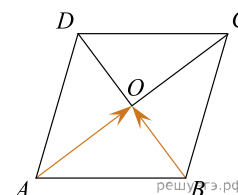
№ 1.

К окружности, вписанной в треугольник ABC , проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



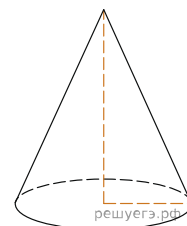
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AO} + \vec{BO}$.



№ 3.

Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь полной поверхности конуса, деленную на π .



№ 4.

Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений— по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

№ 5.

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

№ 6.

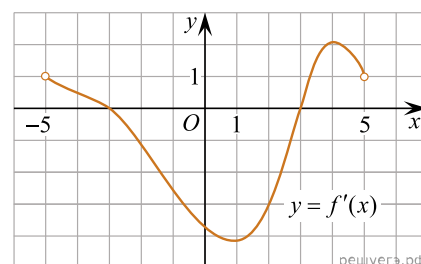
Решите уравнение
 $\log_x 32 = 5$.

№ 7.

Найдите значение выражения
 $2^{3\sqrt{7}-1} \cdot 8^{1-\sqrt{7}}$.

№ 8.

Функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-5; 5]$. На рисунке изображён график её производной. Найдите точку x_0 , в которой функция принимает наименьшее значение, если $f(-5) \geq f(5)$.



№ 9.

При сближении источника и приёмника звуковых сигналов движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала
 $f_0 = 150$

Гц и определяется следующим выражением:

$$f = f_0 \frac{c+u}{c-v}$$

(Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а

$$u = 10$$

м/с и

$$v = 15$$

м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 160 Гц?

№ 10.

Две трубы наполняют бассейн за 3 часа 36 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 6 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

№ 11.

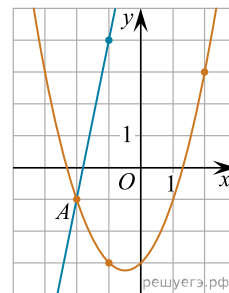
На рисунке изображены графики функций

$$f(x) = 5x + 9$$

и

$$g(x) = ax^2 + bx + c,$$

которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

**№ 12.**

Найдите наименьшее значение функции

$$y = -14x + 7 \operatorname{tg} x + \frac{7\pi}{2} + 11$$

на отрезке

$$\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right].$$

№ 13.

а) Решите уравнение

$$(x^2 + 2x - 1) \left(\log_2(x^2 - 3) + \log_{0,5}(\sqrt{3} - x) \right) = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2,5; -1,5]$.

№ 14.

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении $8 : 3$, считая от вершины B_1 .

а) Докажите, что точки A и C равноудалены от плоскости, проходящей через точки B , D и K .

б) Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B , D и K .

№ 15.

Решите неравенство:

$$3x - |x + 8| - |1 - x| \leq -6.$$

№ 16.

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 1400 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть полностью погашен.

Найдите платёж в 2026 году, если общая сумма выплат по кредиту составила 2120 тыс. рублей.

№ 17.

В параллелограмме $ABCD$ расположены две равные непересекающиеся окружности. Первая касается сторон AD , AB и BC , вторая — сторон AD , CD и BC .

а) Докажите, что общая внутренняя касательная l окружностей проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

б) Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а прямая l касается окружностей в точках M и N . Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках M , N и в центрах окружностей, если $AD=16$, а расстояние между центрами окружностей равно 10.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$|\cos^2 x + 0,5 \sin 2x + (1 - a) \sin^2 x| \leq 1,5$$

выполняется для любого действительного числа x .

№ 19.

Последовательность натуральных чисел (a_n) состоит из 400 членов. Каждый член последовательности, начиная со второго, либо вдвое больше предыдущего, либо на 98 меньше предыдущего.

а) Может ли последовательность (a_n) содержать ровно 5 различных чисел?

б) Чему может равняться a_1 , если $a_{100} = 75$?

в) Какое наименьшее значение может принимать наибольший член последовательности (a_n) ?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27943	24
2	27717	10

3	27167	24
4	285923	0,225
5	320175	0,91
6	525399	2
7	77407	4
8	505119	3
9	27980	390
10	99618	9
11	509149	6
12	77495	18

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$(x^2 + 2x - 1) \left(\log_2(x^2 - 3) + \log_{0,5}(\sqrt{3} - x) \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 0, \\ x^2 - 3 > 0, \sqrt{3} - x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 1) \left(\log_2(x^2 - 3) + \log_{0,5}(\sqrt{3} - x) \right) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 3) - \log_2(\sqrt{3} - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 0, \\ x^2 - 3 > 0, \sqrt{3} - x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 3) - \log_2(\sqrt{3} - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{3}, \\ \log_2(x^2 - 3) = \log_2(\sqrt{3} - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2}, \\ x < -\sqrt{3}, \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3} + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2}, \\ x < -\sqrt{3}, \\ \begin{cases} x = \sqrt{3}, \\ x = -\sqrt{3} - 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2}, \\ x = -\sqrt{3} - 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{3}, \\ \log_2(x^2 - 3) = \log_2(\sqrt{3} - x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2}, \\ x < -\sqrt{3}, \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3} + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2}, \\ \begin{cases} x < -\sqrt{3}, \\ x = \sqrt{3}, \\ x = -\sqrt{3} - 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2}, \\ x = -\sqrt{3} - 1. \end{cases}$$

б) Проверим корни на отрезке $[-2, 5; -1, 5]$:

$$1 < 8 < 9 \Rightarrow 1 < 2\sqrt{2} < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < -\sqrt{2} < -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} < -1 - \sqrt{2} < -\frac{3}{2}. \quad 1 < 8 < 9 \Rightarrow 1 < 2\sqrt{2} < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < -\sqrt{2} < -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2} < -1 - \sqrt{2} < -\frac{3}{2}.$$

Таким образом, значение $-1 - \sqrt{2}$ подходит и войдет в ответ.

Проверим следующее значение x :

$$9 < 12 \Rightarrow 3 < 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{3}{2} < \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} < -\frac{3}{2} \Rightarrow -\sqrt{3} - 1 < -\frac{5}{2}.$$

Значит, значение $-\sqrt{3} - 1$ не войдет в ответ.

Ответ: а) $\{-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{3}\}$; б) $-1 - \sqrt{2}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение.

а) Плоскость BDK пересекает отрезок AC в его середине (центре квадрата $ABCD$). Обозначим эту середину O .

Пусть H_1 — проекция A на плоскость BDK , H_2 — проекция C на плоскость BDK . Треугольники AOH_1 и COH_2 равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $AH_1 = CH_2$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть точка L — точка, в которой плоскость сечения пересекает ребро C_1D_1 . Плоскости $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны, поэтому плоскость сечения пересекает их по параллельным прямым, следовательно, отрезок KL параллелен диагонали BD . Искомое сечение — трапеция $BDLK$ (рис.1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD , параллельной B_1D_1 , значит, KL параллельно B_1D_1 .

Треугольники LC_1K и $D_1C_1B_1$ подобны, следовательно,

$$C_1L : C_1D_1 = C_1K : C_1B_1 = KL : B_1D_1 = 3 : 11.$$

Значит, $BD = B_1D_1 = 11\sqrt{2}$ и $KL = 3\sqrt{2}$.

В равных прямоугольных треугольниках DD_1L и BB_1K имеем

$$BK = DL = \sqrt{DD_1^2 + D_1L^2} = \sqrt{113},$$

значит, трапеция $BDLK$ равнобедренная.

Пусть отрезок LH — высота трапеции $BDLK$, проведённая к основанию BD (рис. 2), тогда:

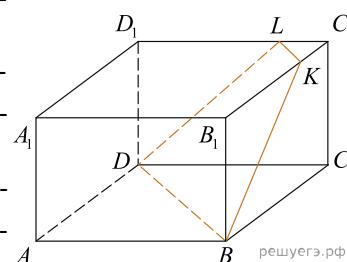


Рис. 1

$$DH = \frac{BD - KL}{2} = 4\sqrt{2},$$

$$LH = \sqrt{DL^2 - DH^2} = 9.$$

Таким образом, находим площадь сечения призмы:

$$S_{BDLK} = \frac{BD + KL}{2} \cdot LH = 63\sqrt{2}.$$

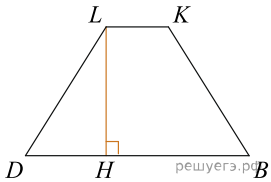


Рис. 2

Ответ: б) $63\sqrt{2}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство:

$$-|x + 8| - |1 - x| \leq -3x - 6 \Leftrightarrow |x + 8| + |1 - x| \geq 3x + 6.$$

Последнее неравенство заведомо выполняется, если правая часть отрицательна, то есть при $x < -2$.
Если $x \geq -2$, то

$$x + 8 + |x - 1| \geq 3x + 6 \Leftrightarrow |x - 1| \geq 2(x - 1).$$

Это верно тогда и только тогда, когда $x - 1 \leq 0$. Решение неравенства: $x \leq 1$.

Ответ: $(-\infty; 1]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Обозначим для удобства изначальную сумму кредита за $S=1400$ тыс.руб. Пусть x тыс.руб.— постоянная сумма на которую уменьшается долг каждый июль с 2026 по 2030 год, а y тыс.руб.— с 2031 по 2035 год. Тогда суммы долга в июле по годам с 2025 по 2035 составят:

$$S, S - x, S - 2x, S - 3x, S - 4x, S - 5x, S - 5x - y, S - 5x - 2y, S - 5x - 3y, S - 5x - 4y, S - 5x - 5y = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $x + y = 280$, откуда $y = 280 - x$.

Пусть $k = 0,1$, тогда проценты начисленные с 2026 по 2035 год составят:

$$kS, k(S-x), k(S-2x), k(S-3x), k(S-4x), k(S-5x), k(S-5x-y), k(S-5x-2y), k(S-5x-3y), k(S-5x-4y),$$

а выплаты в соответствующие годы будут:

$$kS+x, k(S-x)+x, k(S-2x)+x, k(S-3x)+x, k(S-4x)+x, k(S-5x)+y, k(S-5x-y)+y, k(S-5x-2y)+y, k(S-5x-3y)+y, k(S-5x-4y)+y.$$

Тогда сумма выплат является суммой двух различных арифметических прогрессий по пять членов в каждой и составит:

$$\begin{aligned} & \frac{kS+x+k(S-4x)+x}{2} \cdot 5 + \frac{k(S-5x)+y+k(S-5x-4y)+y}{2} \cdot 5 = 2120 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 10kS+5x-35kx+5y-10yk = 2120 \Leftrightarrow 1400+5x-3,5x+5y-y = 2120 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 1,5x+4y = 720 \Leftrightarrow 1,5x+4(280-x) = 720 \Leftrightarrow x = 160. \quad \frac{kS+x+k(S-4x)+x}{2} \cdot 5 + \frac{k(S-5x)+y+k(S-5x-4y)+y}{2} \cdot 5 = 2120 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 10kS+5x-35kx+5y-10yk = 2120 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 1400+5x-3,5x+5y-y = 2120 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 1,5x+4y = 720 \Leftrightarrow 1,5x+4(280-x) = 720 \Leftrightarrow x = 160. \quad \frac{kS+x+k(S-4x)+x}{2} \cdot 5 + \frac{k(S-5x)+y+k(S-5x-4y)+y}{2} \cdot 5 = 2120 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 10kS+5x-35kx+5y-10yk = 2120 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 1400+5x-3,5x+5y-y = 2120 \Leftrightarrow 1,5x+4y = 720 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 1,5x+4(280-x) = 720 \Leftrightarrow x = 160. \quad \frac{kS+x+k(S-4x)+x}{2} \cdot 5 + \frac{k(S-5x)+y+k(S-5x-4y)+y}{2} \cdot 5 = 2120 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 10kS+5x-35kx+5y-10yk = 2120 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 1400+5x-3,5x+5y-y = 2120 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 1,5x+4y = 720 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 1,5x+4(280-x) = 720 \Leftrightarrow x = 160. \end{aligned}$$

Тогда выплата за 2026 год составит: $kS+x = 300$ тыс. руб.

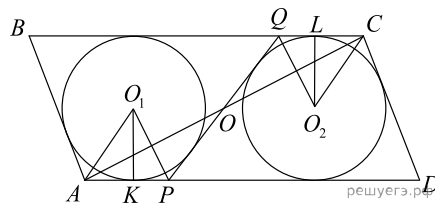
Ответ: 300 тыс. руб.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагонали AC параллелограмма с общей внутренней касательной l к данным окружностям, P и Q — точки пересечения прямой l со сторонами AD и BC соответственно. Достаточно доказать, что O — середина диагонали AC .

Пусть O_1 и O_2 — центры первой и второй окружностей соответственно. Первая окружность касается стороны AD в точке K , вторая окружность касается стороны BC в точке L .



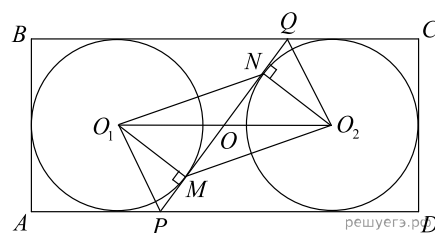
Лучи AO_1 и CO_2 — биссектрисы равных углов BAD и BCD , значит, прямоугольные треугольники AKO_1 и CLO_2 равны по катету (радиусы равных окружностей) и противолежащему острому углу. Тогда $AK = CL$. Аналогично $KP = LQ$. Следовательно,

$$AP = AK + KP = CL + LQ = CQ.$$

Значит, треугольники AOP и COQ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $AO = OC$, а точка O — середина диагонали AC , то есть центр параллелограмма $ABCD$.

б) $ABCD$ — прямоугольник, поэтому его сторона AD равна сумме диаметра окружности и отрезка O_1O_2 , то есть $2r + O_1O_2 = AD$, $2r + 10 = 16$, следовательно, $r = 3$.

Четырёхугольник O_1MO_2N — параллелограмм, поскольку его противоположные стороны O_1M и O_2N равны и параллельны. Диагонали O_1O_2 и MN параллелограмма O_1MO_2N пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.



Площадь параллелограмма O_1MO_2N в четыре раза больше площади треугольника OO_1M , в котором $OO_1 = \frac{1}{2}O_1O_2 = 5$, $O_1M = r = 3$. По теореме Пифагора

$$OM = \sqrt{OO_1^2 - O_1M^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Следовательно,

$$S_{O_1MO_2N} = 4S_{OO_1M} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot OM \cdot O_1M = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24.$$

Ответ: б) 24.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Заметим, что если $\sin x = 0$, то неравенство верно при любом значении параметра a . Рассмотрим случай $\sin x \neq 0$:

$$|\cos^2 x + 0,5 \sin 2x + (1-a) \sin^2 x| \leq 1,5 \Leftrightarrow |1 + \sin x \cos x - a \sin^2 x| \leq 1,5 \Leftrightarrow |\cos^2 x + 0,5 \sin 2x + (1-a) \sin^2 x| \leq 1,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1 + \sin x \cos x - a \sin^2 x| \leq 1,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin x \cos x - a \sin^2 x \leq 1,5, \\ 1 + \sin x \cos x - a \sin^2 x \geq -1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sin^2 x \geq \sin x \cos x - 0,5, \\ a \sin^2 x \leq \sin x \cos x + 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow_{\sin x \neq 0} \begin{cases} 2a \geq 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin^2 x}, \\ 2a \leq 2 \operatorname{ctg} x + \frac{5}{\sin^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \geq 2 \operatorname{ctg} x - 1 - \operatorname{ctg}^2 x, \\ 2a \leq 2 \operatorname{ctg} x + 5 + 5 \operatorname{ctg}^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \geq -(\operatorname{ctg} x - 1)^2, \\ 2a \leq 5 \left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{24}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow_{\sin x \neq 0} \begin{cases} 2a \geq 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin^2 x}, \\ 2a \leq 2 \operatorname{ctg} x + \frac{5}{\sin^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \geq 2 \operatorname{ctg} x - 1 - \operatorname{ctg}^2 x, \\ 2a \leq 2 \operatorname{ctg} x + 5 + 5 \operatorname{ctg}^2 x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a \geq -(\operatorname{ctg} x - 1)^2, \\ 2a \leq 5 \left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{24}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow_{\sin x \neq 0} \begin{cases} 2a \geq 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin^2 x}, \\ 2a \leq 2 \operatorname{ctg} x + \frac{5}{\sin^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a \geq 2 \operatorname{ctg} x - 1 - \operatorname{ctg}^2 x, \\ 2a \leq 2 \operatorname{ctg} x + 5 + 5 \operatorname{ctg}^2 x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a \geq -(\operatorname{ctg} x - 1)^2, \\ 2a \leq 5 \left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{24}{5}. \end{cases}$$

При $0 \leq 2a \leq \frac{24}{5}$ и первое, и второе неравенства системы имеют решения для любого значения переменной, удовлетворяющего условию $\sin x \neq 0$, причем правая часть второго неравенства не меньше правой части первого, а потому и вся система в целом имеет решения.

Таким образом, исходное неравенство выполняется для любого действительного числа x , если $0 \leq a \leq \frac{12}{5}$.

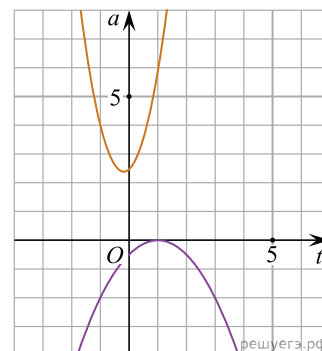
Ответ: $0 \leq a \leq \frac{12}{5}$.

Примечание Ирины Шраго.

Нагляднее было бы изобразить множество решений системы

$$\begin{cases} 2a \geq -(\operatorname{ctg} x - 1)^2, \\ 2a \leq 5 \left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{24}{5} \end{cases}$$

в координатах (a, t) , где $t = \operatorname{ctg} x$. Это часть плоскости между двумя параболой с разнонаправленными ветвями. Параметр принимает значения от ординаты нижней вершины до ординаты верхней, поэтому $0 \leq a \leq \frac{12}{5}$.



№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть a — первое число. Постараемся найти цепочку вида:

$$a \rightarrow 2a \rightarrow 4a \rightarrow 8a \rightarrow 8a - 98 \rightarrow 8a - 98 - 98.$$

Для зацикливания требуется, чтобы $a = 8a - 196$. Это уравнение имеет натуральное решение: $a = 28$. Действительно, имеем цепочку, состоящую из пяти чисел:

$$28 \rightarrow 56 \rightarrow 112 \rightarrow 224 \rightarrow 126 \rightarrow 28 \rightarrow \dots$$

б) По условию или $a_{99} = \frac{a_{100}}{2}$, или $a_{99} = a_{100} + 98$. Но a_{100} — нечетное число, поэтому есть ровно одна возможность: $a_{99} = 75 + 98$. a_{99} — снова нечетное число, поэтому для a_{98} снова ровно одна возможность. Так всякий раз будут получаться нечетные числа, поскольку сумма нечетного и четного чисел является нечетным числом. Рассуждая аналогично, получаем: $a_1 = 75 + 98 \cdot 99 = 9777$.

в) Заметим, что цепочка $7 \rightarrow 14 \rightarrow 28 \rightarrow 56 \rightarrow 112 \rightarrow 14 \rightarrow \dots$ удовлетворяет условиям. Докажем, что наибольший член последовательности не может быть меньше 112.

Пусть a — наибольший член последовательности (начиная с момента, когда впервые произошло умножение на 2; заметим, что в нашем случае 98 не может вычитаться дважды подряд). Тогда предыдущее число — это $\frac{a}{2}$. Следовательно, a — четное.

Ясно, что значение 98 и меньше a быть не может, так как это бы означало, что в нашей цепочке, начиная с первого умножения на 2, ни разу не вычиталось 98. Следовательно, с этого момента были только умножения на 2. Но тогда, очевидно, нашелся бы член последовательности, который больше 112. Поэтому достаточно рассмотреть случаи, когда a равно 110, 108, 106, 104, 102, 100.

Переберем эти значения. Рассмотрим момент, когда a появился впервые (очевидно, номер этого члена последовательности заведомо не превзойдет, например, 10). В случае значений a , равных 100, 102, 106, после вычитания 98 (на следующем шаге), мы попадем в элемент цепочки

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow \dots$$

и найдется член, который превзойдет 112 (и будет равен по крайней мере 128).

Значения a , равные 104 и 110, приведут нас в элемент цепочки

$$6 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow 48 \rightarrow 96 \rightarrow 192 \rightarrow \dots$$

Значение $a = 108$ приведет нас к цепочке

$$10 \rightarrow 20 \rightarrow 40 \rightarrow 80 \rightarrow 160 \rightarrow \dots$$

и вновь найдется член, который превзойдет 112 (и будет равен по крайней мере 160).

Ответ: а) да; б) 9777; в) 112.

Примечание.

Как можно было догадаться, что в пункте в) цепочку надо начинать с 7 (или 14)? Кстати, эта цепочка подходит и для пункта а). Дело в том, что в результате наших операций образуются числа вида $2^k \cdot m$, где m — нечетное число. Это число должно быть больше 98, но не сильно. Можно перебрать маленькие значения k и подобрать m как раз с этим условием ($2^k \cdot m$ больше 98, но не сильно). Так мы довольно быстро получаем число $112 = 2^4 \cdot 7$, которое хорошо тем, что при вычитании 98 дает 14. Это хорошее число, потому что $14 = 2 \cdot 7$ и после нескольких умножений на 2 мы вновь попадем в 112. (Например, $13 \cdot 2^3 - 98 = 104 - 98 = 6$, 6 — это далеко не такое хорошее число, хоть оно и меньше 14, т.к. после серии умножений 6 на 2, наименьшее число, которое будет больше 98, это 192.)

Можно было также думать: $98 = 14 \cdot 7$. Следовательно, если начать с 14, то через три операции мы получим $14 \cdot 2^3 = 14 \cdot 8$. И при вычитании 98 мы получим $14 \cdot 8 - 14 \cdot 7$, т. е. снова 14, а это для нас очень хорошо!
