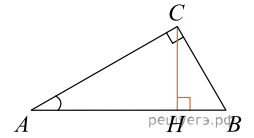


Вариант 233

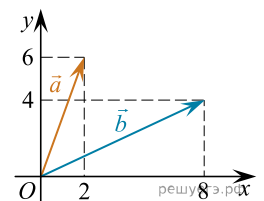
№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота,
 $AH = 12$,
 $\cos A = \frac{2}{3}$.
Найдите
 AB .



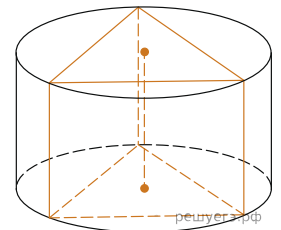
№ 2.

Найдите сумму координат вектора
 $\vec{a} - \vec{b}$.



№ 3.

Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 2.



№ 4.

Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1.

№ 5.

В аэропорту два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится чай, равна 0,3. Такова же вероятность, что чай закончится во втором автомате. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,13. Найдите вероятность того, что к концу дня в одном из автоматов чай закончится, а в другом — нет.

№ 6.

Найдите корень уравнения

$$\sqrt{-32-x}=2.$$

№ 7.

Найдите значение выражения

$$\frac{2^{3,5} \cdot 3^{5,5}}{6^{4,5}}.$$

№ 8.

На рисунке изображён график

$$y = f'(x)$$

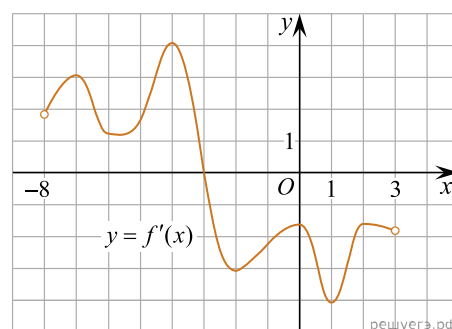
— производной функции

$$f(x),$$

определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция

$$f(x)$$

принимает наибольшее значение?

**№ 9.**

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объем и давление связаны соотношением

$$pV^{1,4} = const,$$

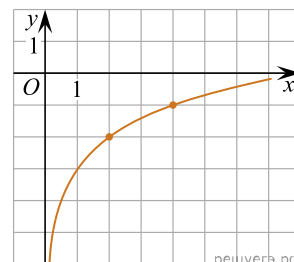
где p (атм.) — давление газа, V — объем газа в литрах. Изначально объем газа равен 1,6 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128 атмосфер. Определите, до какого минимального объема можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

№ 10.

Вова и Гоша решают задачи. За час Вова может решить на две задачи больше, чем Гоша (при этом оба за час решают целое количество задач). Известно, что вместе они решат 33 задачи на 1 час 15 минут быстрее, чем это сделал бы один Вова. За какое время Гоша может решить 20 задач? Ответ дайте в часах.

№ 11.

На рисунке изображён график функции
 $f(x) = b + \log_a x$.
Найдите значение x , при котором
 $f(x) = 1$.

**№ 12.**

Найдите точку минимума функции
 $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36}$.

№ 13.

- а) Решите уравнение
 $2\cos 2x - 12\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 7 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
 $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

№ 14.

Длина диагонали куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равна 3. На луче A_1C отмечена точка P так, что $A_1P = 4$.

- а) Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.
- б) Найдите длину отрезка AP .

№ 15.

Решите неравенство
$$\frac{6^x - 4 \cdot 3^x}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20} \leq \frac{1}{x-5}.$$

№ 16.

В июле 2026 года планируется взять кредит на сумму 1,5миллиона рублей на 10 лет (до июля 2036 года). Условия его возврата таковы:

- в январе каждого года долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в нечетные годы погашения (2027, 2029, 2031, 2033, 2035) долг должен уменьшаться на одну и ту же величину X по сравнению с предыдущим годом;
- в четные годы погашения (2028, 2030, 2032, 2034, 2036) долг должен уменьшаться на одну и ту же величину Y по сравнению с предыдущим годом;
- известно, что X в два раза больше Y ;
- к июлю 2036 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 2,3 млн руб.

№ 17.

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. На боковой стороне AB и большем основании AD взяты соответственно точки K и L так, что прямые KL и CD параллельны и $CK = DL$.

а) Докажите, что $\angle BCK = \angle AKL$.

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $KL = 12$, $DL = 2,5BK$ и $S_{CDLK} = 26\sqrt{6}$.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$9^x - 3^x \cdot (4^a + 4) = 3^x \cdot (16 - 2^a) + (4^a + 4)(2^a - 16)$$

имеет единственное решение.

№ 19.

Для набора 30 различных натуральных чисел выполнено, что сумма любых трёх чисел из этого набора меньше суммы любых четырёх чисел из этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 999?

б) Может ли одним из этих чисел быть число 66?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел этого набора?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27432	27
2	27732	-4
3	27170	36

4	320209	0,25
5	320452	0,34
6	510839	-36
7	26741	1,5
8	27491	-3
9	27993	0,05
10	501213	2
11	509026	16
12	26723	10

№ 13.

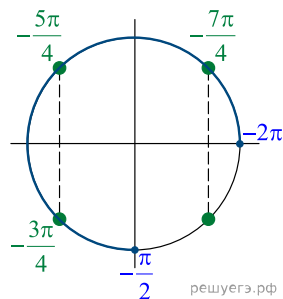
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Применим формулу косинуса двойного угла:

$$\cos 2x + \frac{1}{2} = \cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \frac{1}{2} = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$, при помощи тригонометрической окружности. Получаем: $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Введём систему координат, как показано на рисунке. Поскольку ребро куба в корень $\sqrt{3}$ меньше его диагонали, ребро данного куба равно $\sqrt{3}$. Тогда точки B, D, C_1 имеют координаты $(0; \sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; 0; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \sqrt{3}; 0)$ соответственно.

P лежит на продолжении A_1C , поэтому отрезок A_1P можно рассматривать как диагональ куба с ребром $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Тогда точка P имеет координаты $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

Найдём расстояние от P до точек D, B и C_1 :

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{6}.$$

Отрезки C_1B, DB и DC_1 — диагонали граней куба, поэтому по теореме Пифагора $C_1B = DB = DC_1 = \sqrt{6}$. Тогда $PD = PC_1 = PB = C_1B = DB = DC_1$. Значит, все рёбра тетраэдра DBC_1P равны, поэтому он правильный.

б) Координаты точки A : $(0; 0; \sqrt{3})$. Расстояние от точки P до точки A равно

$$\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{11}.$$

Ответ: $\sqrt{11}$.

Приведем решение Дениса Чернышева.

а) Найдём длины боковых рёбер тетраэдра как длины векторов $\vec{PD}$, $\vec{PB}$ и $\vec{PC_1}$:

$\vec{PD} = \vec{PC} + \vec{a}$, $\vec{PB} = \vec{PC} + \vec{b}$ и $\vec{PC_1} = \vec{PC} + \vec{c}$. Отсюда вычислим $\vec{PD}$:

$$\begin{aligned} \vec{PD} &= \frac{4}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c} \Leftrightarrow (\vec{PD})^2 = \left(\frac{16}{9}\right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{9}\right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{9}\right) \cdot 3 \Leftrightarrow (\vec{PD})^2 = \frac{16+1+1}{3} = 6. \\ \vec{PD} &= \frac{4}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c} \Leftrightarrow (\vec{PD})^2 = \left(\frac{16}{9}\right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{9}\right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{9}\right) \cdot 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\vec{PD})^2 = \frac{16+1+1}{3} = 6. \vec{PD} = \frac{4}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\vec{PD})^2 = \left(\frac{16}{9}\right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{9}\right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{9}\right) \cdot 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\vec{PD})^2 = \frac{16+1+1}{3} = 6. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются $(\vec{PB})^2$ и $(\vec{PC})^2$.

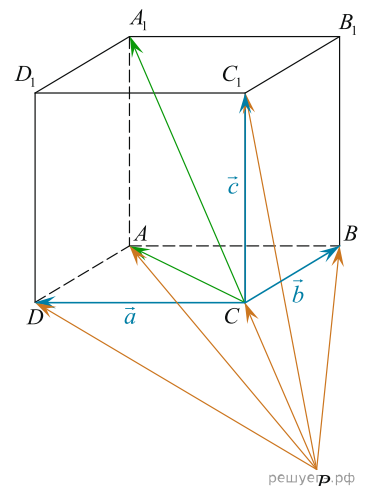
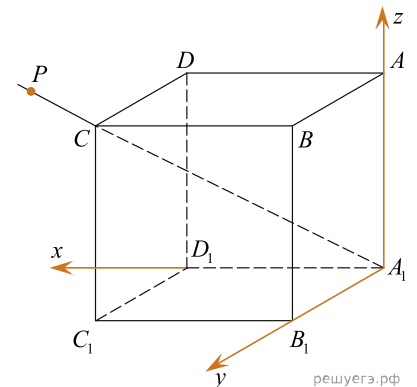
Найдём длины рёбер основания тетраэдра как длины векторов $\vec{DB} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{DC_1} = -\vec{a} + \vec{c}$ и $\vec{BC_1} = -\vec{b} + \vec{c}$:

$$(\vec{DB})^2 = (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 = 3 + 3 = 6.$$

Аналогично вычисляются $(\vec{DC_1})^2$ и $(\vec{BC_1})^2$. Все рёбра равны, значит, $PDBC_1$ — правильный тетраэдр.

б) Найдём длину вектора $\vec{PA}$:

$$\vec{PA} = \vec{PC} + \vec{CA}, \quad \vec{CA} = \vec{a} + \vec{b},$$



$$\vec{PC} = \frac{1}{3}\vec{CA_1}, \quad \vec{CA_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$

тогда

$$\vec{PA} = \frac{4}{3} \cdot \vec{a} + \frac{4}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c} \Leftrightarrow (\vec{PA})^2 = \frac{16+16+1}{3} = 11 \Leftrightarrow \vec{PA} = \sqrt{11}.$$

Ответ: $\sqrt{11}$.

Приведём другое решение.

а) Диагональ куба в $\sqrt{3}$ больше его ребра: $A_1C = \sqrt{3}AB$. Следовательно,
 $AB = \frac{A_1C}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Заметим, что $BC_1 = C_1D = BD = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ как диагонали квадратов со стороной AB . Тогда треугольник BC_1D правильный.

Пусть $BD \cap AC = O$, $C_1O \cap A_1C = M$. $ABCD$ — квадрат, поэтому имеем:
 $AO = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Поскольку $\angle C_1A_1C = \angle A_1CA$ как накрест лежащие и $\angle A_1MC_1 = \angle OMC$ как вертикальные, получаем: $\triangle A_1MC_1 \sim \triangle CMO$ по двум углам, тогда $\frac{OM}{C_1M} = \frac{OC}{A_1C_1} = \frac{A_1M}{CM} = \frac{1}{2}$.

Заметим, что треугольник C_1CO прямоугольный, тогда $C_1O = \sqrt{\frac{6}{4} + 3} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, откуда

$$OM = \frac{1}{3}C_1O = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad C_1M = \frac{2}{3}C_1O = \sqrt{2}, \quad CM = \frac{1}{3}A_1C = 1.$$

В треугольнике OMC имеем: $OC^2 = OM^2 + MC^2$, поскольку $\frac{6}{4} = \frac{1}{2} + 1$ верно. Тогда, по теореме, обратной теореме Пифагора, $\triangle OMC$ прямоугольный, $\angle M = 90^\circ$.

$BO = OD$ (C_1O — медиана), $\frac{C_1M}{OM} = \frac{2}{1}$ и $\triangle BDC_1$ — правильный, поэтому M — точка пересечения медиан, биссектрис и высот $\triangle BDC_1$, то есть центр описанной окружности.

M — центр описанной окружности треугольника BC_1D и $\angle C_1MC = 90^\circ$, поэтому проекция точки P — точка M , тогда $PB = PC_1 = PD$.

Заметим, что $\cos \angle C_1A_1C = \frac{\sqrt{6}}{3}$, по теореме косинусов

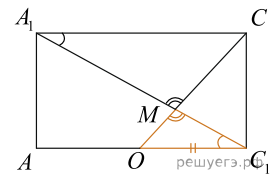
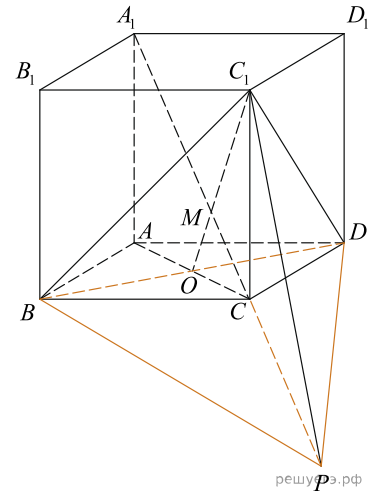
$$PC_1^2 = A_1C_1^2 + A_1P^2 - 2A_1C_1 \cdot A_1P \cos \angle C_1A_1C \Leftrightarrow PC_1 = \sqrt{16 + 6 - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot 4} = \sqrt{22 - 16} = \sqrt{6}. \quad PC_1^2 = A_1C_1^2 + A_1P^2 - 2A_1C_1 \cdot A_1P \cos \angle C_1A_1C \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow PC_1 = \sqrt{16 + 6 - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot 4} = \sqrt{22 - 16} = \sqrt{6}.$$

$PD = PC_1 = BP = BC_1 = C_1D = BD = \sqrt{6}$, поэтому PBC_1D — правильный тетраэдр, что и требовалось доказать.

б) $\cos \angle AA_1C = \frac{AA_1}{A_1C} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, по теореме косинусов

$$AP^2 = AA_1^2 + A_1P^2 - 2AA_1 \cdot A_1P \cos \angle AA_1C_1 \Leftrightarrow AP = \sqrt{3 + 16 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 4} = \sqrt{19 - 8} = \sqrt{11}. \quad AP^2 = AA_1^2 + A_1P^2 - 2AA_1 \cdot A_1P \cos \angle AA_1C_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow AP = \sqrt{3 + 16 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 4} = \sqrt{19 - 8} = \sqrt{11}.$$

Ответ: $\sqrt{11}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Разложим числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства, на множители:

$$6^x - 4 \cdot 3^x = 3^x(2^x - 4),$$

$$x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20 = (x - 5) \cdot 2^x - 4(x - 5) = (x - 5)(2^x - 4).$$

Тогда при условии $2^x - 4 \neq 0$, то есть при $x \neq 2$, дробь можно сократить:

$$\frac{6^x - 4 \cdot 3^x}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20} = \frac{3^x(2^x - 4)}{(x - 5)(2^x - 4)} = \frac{3^x}{x - 5}.$$

Осталось решить неравенство $\frac{3^x}{x - 5} \leq \frac{1}{x - 5}$ или $\frac{3^x - 1}{x - 5} \leq 0$.

Применим обобщенный метод интервалов: числитель и знаменатель обращаются в нуль в точках 0 и 5 соответственно, на промежутках $(-\infty; 0)$, $(0; 5)$, $(5; +\infty)$ дробь сохраняет знак. Взяв пробные точки, устанавливаем, что отрицательные значения дробь принимает на интервале $(0; 5)$. Присоединим число 0 — корень числителя, получим полуинтервал $[0; 5)$.

С учетом ограничения $x \neq 2$, находим ответ: $[0; 2) \cup (2; 5)$.

Ответ: $[0; 2) \cup (2; 5)$.

Примечание 1.

Применяя метод интервалов, можно было бы ограничиться рисунком.

Примечание 2.

Можно было применить теорему о знаке $\operatorname{sgn}(a^x - 1) = \operatorname{sgn}(a - 1)x$ и свести неравенство к рациональному:

$$\frac{3^x - 1}{x - 5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(3 - 1)x}{x - 5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x - 5} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 5.$$

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть S — сумма кредита, $S = 1500$ тыс. руб. Так как известно, что X в два раза больше Y , $X = 2Y$, тогда

$$5 \cdot 2Y + 5Y = 1500 \Leftrightarrow 15Y = 1500 \Leftrightarrow Y = 100.$$

Следовательно, долг уменьшается ежегодно или на 100тыс.руб., или на 200тыс.руб. Составим график погашения кредита:

Год	Долг, тыс. руб.	Выплата по кредиту, тыс. руб.	Остаток долга, тыс. руб.
2027	$S + S \cdot \frac{r}{100}$	$200 + S \cdot \frac{r}{100}$	$S - 200$
2028	$S - 200 + (S - 200) \cdot \frac{r}{100}$	$100 + (S - 200) \cdot \frac{r}{100}$	$S - 300$
2029	$S - 300 + (S - 300) \cdot \frac{r}{100}$	$200 + (S - 300) \cdot \frac{r}{100}$	$S - 500$
...	...	...	...
2036	$S - 1400 + (S - 1400) \cdot \frac{r}{100}$	$100 + (S - 1400) \cdot \frac{r}{100}$	$S - 1500$

Находим сумму выплат по кредиту:

$$\begin{aligned}
 & 5 \cdot 200 + 5 \cdot 100 + S \cdot \frac{r}{100} + (S - 200) \cdot \frac{r}{100} + (S - 300) \cdot \frac{r}{100} + (S - 500) \cdot \frac{r}{100} + \dots + (S - 1400) \cdot \frac{r}{100} = \\
 & = 1500 + \frac{r}{100} (S + S - 200 + S - 300 + S - 500 + \dots + S - 1400) = 1500 + \frac{r}{100} (10S - 7000).
 \end{aligned}$$

Подставляя значение $S = 1500$ и зная, что сумма выплат равна 2300 тыс. руб., находим значение r :

$$\begin{aligned}
 1500 + \frac{r}{100} (10 \cdot 1500 - 7000) &= 2300 \Leftrightarrow 1500 + 8000 \cdot \frac{r}{100} = 2300 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 8000 \cdot \frac{r}{100} &= 800 \Leftrightarrow 80r = 800 \Leftrightarrow r = 10.
 \end{aligned}$$

Ответ: 10.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что четырехугольник $KCDL$ — равнобедренная трапеция, поэтому $\angle KCD = \angle CDL$. Основания KL и CD параллельны, поэтому

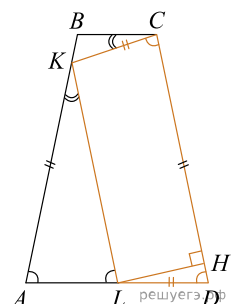
$$\angle CDL = \angle KLA = \angle KAL,$$

откуда

$$\begin{aligned}
 \angle BCK &= \angle BCD - \angle KCD = \angle ABC - \angle KLA, \\
 \angle AKL &= 180^\circ - 2\angle KAL = (180^\circ - \angle KAL) - \angle KAL = \angle ABC - \angle KLA.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $\angle BCK = \angle AKL$.

б) Пусть $BK = 2x$, тогда $DL = 5x = CK$ и $CD = AB = 2x + 12$. Пусть отрезок LH — высота трапеции $KCDL$, следовательно,



$$LH^2 = (5x)^2 - \left(\frac{2x+12-12}{2}\right)^2 = 24x^2,$$

откуда $LH = 2\sqrt{6}x$. Тогда

$$S_{CDLK} = \frac{1}{2}(12+2x+12) \cdot 2\sqrt{6}x = 26\sqrt{6},$$

откуда $x(x+12) = 13$, то есть $x = 1$, а значит, $CD = 14$.

Заметим, что

$$\sin \angle LDH = \frac{LH}{LD} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

следовательно, в трапеции трапеции $ABCD$ высота $h = 14 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Тогда

$$\cos \angle KAL = \cos \angle LDH = \sqrt{1 - \frac{24}{25}} = \frac{1}{5},$$

откуда $AL = 2 \cdot 12 \cdot \cos \angle KAL = \frac{24}{5}$ и $AD = \frac{24}{5} + 5 = \frac{49}{5}$. Находим основание BC :

$$BC = AD - 2 \cdot CD \cdot \cos \angle CDA = \frac{49}{5} - \frac{28}{5} = \frac{21}{5}.$$

Таким образом, для площади равнобедренной трапеции $ABCD$ получаем:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (BC + AD) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{70}{5} \cdot \frac{28\sqrt{6}}{5} = \frac{196\sqrt{6}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{196\sqrt{6}}{5}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} 9^x - 3^x \cdot (4^a + 4) &= 3^x \cdot (16 - 2^a) + (4^a + 4)(2^a - 16) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9^x - 3^x \cdot (4^a + 4) - 3^x \cdot (16 - 2^a) - (4^a + 4)(2^a - 16) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9^x - 3^x \cdot ((4^a + 4) + (16 - 2^a)) + (4^a + 4)(16 - 2^a) &= 0, \end{aligned}$$

откуда $3^x = 4^a + 4$ или $3^x = 16 - 2^a$.

Уравнение $3^x = 4^a + 4$ при любом значении a имеет один корень. Значит, исходное уравнение имеет единственное ре-

шение в одном из двух случаев:
— уравнение $3^x = 16 - 2^a$ корней не имеет;
— корни уравнений $3^x = 4^a + 4$ и $3^x = 16 - 2^a$ равны.
Уравнение $3^x = 16 - 2^a$ не имеет корней при $16 - 2^a \leq 0$ или $a \geq 4$. Уравнения $3^x = 4^a + 4$ и $3^x = 16 - 2^a$ имеют равные корни при

$$4^a + 4 = 16 - 2^a \Leftrightarrow 4^a + 2^a - 12 = 0 \Leftrightarrow 2^a = 3 \Leftrightarrow a = \log_2 3.$$

Ответ: $\{\log_2 3\} \cup [4; +\infty)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а, б и в.	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а и б, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах а и в.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте в, пункты а и б не решены.	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Упорядочим числа по возрастанию $x_1 < x_2 < \dots < x_{30}$. Заметим сразу, что достаточно проверять условие только для трех самых больших и четырех самых маленьких чисел.

- а) В наборе 999, 1000, ..., 1028 выполнено
 $999 + 1000 + 1001 + 1002 > 1026 + 1027 + 1028.$
б) Если там есть число 66, то

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 66 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 66 + (x_{28} - 26) + \\ + (x_{29} - 26) + (x_{30} - 26) &= x_{28} + x_{29} + x_{30} - 12 < x_{28} + x_{29} + x_{30}, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 66 + \\ + (x_{28} - 26) + (x_{29} - 26) + (x_{30} - 26) &= x_{28} + \\ + x_{29} + x_{30} - 12 < x_{28} + x_{29} + x_{30}, \end{aligned}$$

получаем противоречие.

- в) Будем говорить, что с набором чисел можно сделать какую-то операцию, если после ее выполнения условие

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > x_{28} + x_{29} + x_{30}$$

не может нарушиться, числа останутся разными, а сумма чисел во всем наборе не становится больше.

Если $x_{30} \neq x_{29} + 1$, то можно заменить x_{30} на $x_{29} + 1$. Если после этого $x_{29} \neq x_{28} + 1$, то можно заменить x_{29} на $x_{28} + 1$ и x_{30} на $x_{28} + 2$. Продолжая эти действия (сдвиг больших чисел вниз), мы в итоге получим набор чисел, идущих подряд (даже все числа от x_2 до x_{30} можно синхронно уменьшать, поскольку обе части неравенства

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > x_{28} + x_{29} + x_{30}$$

будут уменьшаться одинаково). Итак, оптимальный набор— это числа $x, x + 1, x + 2, \dots, x + 29$, причем $4x + 6 > 3x + 84$, откуда $x > 78$. Значит, минимальная сумма равна

$$(2x + 29) \cdot 15 \geq (2 \cdot 79 + 29) \cdot 15 = 2805,$$

а примером могут служить числа от 79 до 108.

Ответ: а) да; б) нет; в) 2805.

