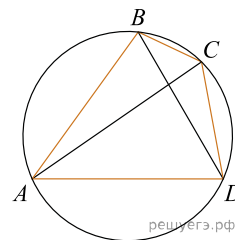


Вариант 234

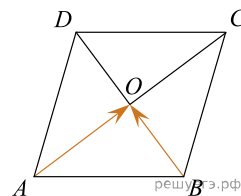
№ 1.

Угол ABD равен 53° . Угол BCA равен 38° . Найдите вписанный угол BCD . Ответ дайте в градусах.



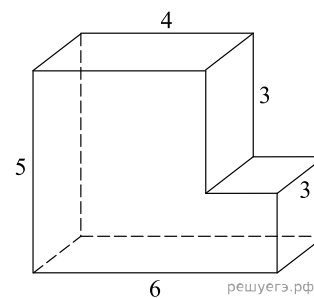
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AO} + \vec{BO}$.



№ 3.

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



№ 4.

В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

№ 5.

Вероятность того, что на тестировании по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

№ 6.

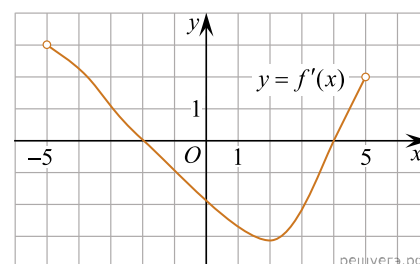
Решите уравнение $x^2 + 9 = (x + 9)^2$.

№ 7.

Найдите значение выражения $(4a)^3 : a^7 \cdot a^4$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



№ 9.

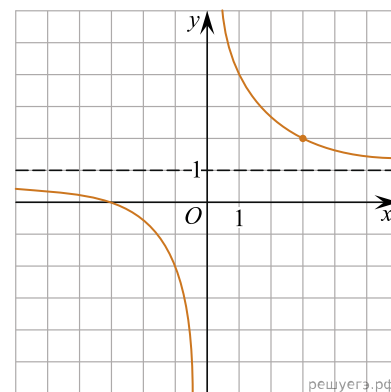
Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 256 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

№ 10.

Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(-12)$.

**№ 12.**

Найдите точку максимума функции $y = 7 + 12x - x^3$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $(4\cos^2 x - 1)\sqrt{49\pi^2 - x^2} = 0$.
б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[20; 25]$.

№ 14.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AD=14$, высота $SH=24$. Точка P — середина бокового ребра SD , а точка N — середина ребра CD . Плоскость ABP пересекает боковое ребро SC в точке K .

- а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.
б) Найдите расстояние от точки K до плоскости ABS .

№ 15.

Решите неравенство $\log_3^2(x-4) - \log_3^2(x-6) \leq 0$.

№ 16.

В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на блет в размере S тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо одним платежом выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Дата	Июль 2023	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в тыс. руб.)	S	$0,9S$	$0,8S$	$0,7S$	$0,6S$	$0,5S$	0

Найдите, на сколько процентов общая сумма платежей после полного погашения кредита превысит сумму взятого кредита.

№ 17.

Окружность проходит через вершину C прямоугольника $ABCD$ и касается его сторон AB и AD в точках K и P соответственно. К хорде KP проведен перпендикуляр CH .

- а) Докажите, что треугольники CBK и CHP подобны.
- б) Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $CH = 7$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3xy + 3ax - ay - a^2 - 3 = 0, \\ 9x^2 + 9y^2 - 6ax + 18ay + 7a^2 - 2a - 17 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

№ 19.

Можно ли из последовательности $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ выделить арифметическую прогрессию

- а) длиной 4;
- б) длиной 5;
- в) длиной k , где k — любое натуральное число?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	525131	91
2	27717	10

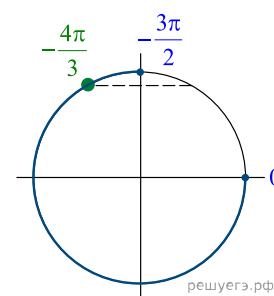
3	642290	114
4	282855	0,25
5	320198	0,07
6	77370	-4
7	26816	64
8	526007	4
9	525114	8
10	99577	60
11	508951	0,75
12	77435	2

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Правая часть уравнения неотрицательна, если $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. При таких значениях переменной обе части, возводя обе части уравнения в квадрат, получим равносильное уравнение. Решим его, разложив на множители:

$$\begin{aligned}
 & 2 + \sqrt{6} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \sin x = (2 \sin x - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2 + \sqrt{6} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \sin x = 4 \sin^2 x - 4\sqrt{2} \sin x + 2 \Leftrightarrow 4 \sin^2 x + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \\
 & 2 + \sqrt{6} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \sin x = (2 \sin x - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2 + \sqrt{6} - (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \sin x = 4 \sin^2 x - 4\sqrt{2} \sin x + 2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 4 \sin^2 x + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2 \sin x (2 \sin x + \sqrt{2}) - \sqrt{3} (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x - \sqrt{3})(2 \sin x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x - \sqrt{3} = 0, \\ 2 \sin x + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \\
 & \Leftrightarrow 2 \sin x (2 \sin x + \sqrt{2}) - \sqrt{3} (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (2 \sin x - \sqrt{3})(2 \sin x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x - \sqrt{3} = 0, \\ 2 \sin x + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \Leftrightarrow 2 \sin x (2 \sin x + \sqrt{2}) - \sqrt{3} (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (2 \sin x - \sqrt{3})(2 \sin x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x - \sqrt{3} = 0, \\ 2 \sin x + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



б) Отберем корни при помощи тригонометрической окружности (см. рис.). На заданном отрезке дежит корень $-\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$.

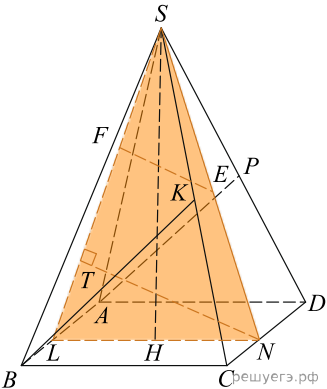
№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Поскольку $ABCD$ — квадрат, то $AB \parallel CD$, а значит, прямая CD параллельна плоскости ABP и поэтому CD не имеет общих точек с прямой PK , лежащей в плоскости сечения. Так как PK и CD не имеют общих точек и лежат в плоскости SCD , они параллельны.

В треугольнике SND прямая PK проходит через середину SD параллельно ND , то есть содержит среднюю линию треугольника, а значит, пересекает SN в её середине. Это и требовалось доказать.

б)Из того, что $PK \parallel CD$ и $CD \parallel AB$, следует, прямая PK параллельна прямой AB , а следовательно, и всей плоскости ABS . Значит, расстояние от любой точки прямой PK до плоскости ABS будет одинаковым. Найдём это расстояние от точки пересечения PK и SN — точки E .



$ABCD$ — квадрат, поэтому его диагонали равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому треугольник CHD прямоугольный и равнобедренный, а медиана HN перпендикулярна CD . Через точки S , N и H проведём плоскость, которая пересекает ребро AB в точке L . LN содержит HN , поэтому $LN \perp CD$ и $LN \perp AB$, откуда следует, что четырёхугольник $ADNL$ — прямоугольник и $LA = ND = \frac{1}{2}CD$, то есть L — середина AB .

Отрезок SL — медиана в равнобедренном треугольнике SAB с основанием AB , поэтому $SL \perp AB$. Поскольку прямая AB перпендикулярна пересекающимся прямым LN и SL , она перпендикулярна плоскости SNL , а раз AB лежит в плоскости ABS , плоскости ABS и SNL перпендикулярны. Тогда перпендикуляры NT и EF к плоскости ABS из точек N и E плоскости SNL попадут на прямую их пересечения SL .

Прямоугольные треугольники SAL и SDN равны по гипотенузе ($SA = SD$) и катету ($LA = ND$), поэтому другие катеты SN и SL также равны. Рассмотрим равнобедренный треугольник SNL , в котором $SN = SL$, основание $NL = AD = 14$, а высота и медиана к нему $SH = 24$. По теореме Пифагора для треугольника LHS найдём

$$SL = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25.$$

Теперь найдём высоту NT треугольника SNL , для чего выразим его площадь двумя способами: $\frac{1}{2}SH \cdot NL = \frac{1}{2}NT \cdot SL$, откуда $24 \cdot 14 = NT \cdot 25$, поэтому $NT = \frac{336}{25}$. В прямоугольном треугольнике SNT с прямым углом T отрезок EF перпендикулярен ST и проходит через середину SN , а значит, является средней линией треугольника SNT , поэтому $EF = \frac{1}{2}NT = \frac{168}{25}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство, применив формулу разности квадратов:

$$\begin{aligned} \log_3^2(x-4) - \log_3^2(x-6) \leq 0 &\Leftrightarrow (\log_3(x-4) - \log_3(x-6))(\log_3(x-4) + \log_3(x-6)) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log_3(x-4) - \log_3(x-6)) \left(\log_3(x-4) - \log_3 \frac{1}{x-6} \right) \leq 0. \log_3^2(x-4) - \log_3^2(x-6) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log_3(x-4) - \log_3(x-6))(\log_3(x-4) + \log_3(x-6)) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log_3(x-4) - \log_3(x-6)) \left(\log_3(x-4) - \log_3 \frac{1}{x-6} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Воспользуемся методом рационализации и заменим разность логарифмов на разность их аргументов, учитывая, что основание логарифма больше 1:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x-4 - (x-6)) \left(x-4 - \left(\frac{1}{x-6} \right) \right) \leq 0, \\ x-4 > 0, \\ x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 10x + 23}{x-6} \leq 0, \\ x > 4, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 - \sqrt{2}, \\ 6 < x \leq 5 + \sqrt{2}, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4 - (x-6)) \left(x-4 - \left(\frac{1}{x-6} \right) \right) \leq 0, \\ x-4 > 0, \\ x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 10x + 23}{x-6} \leq 0, \\ x > 4, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 - \sqrt{2}, \\ 6 < x \leq 5 + \sqrt{2}, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 - \sqrt{2}, \\ 6 < x \leq 5 + \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(6; 5 + \sqrt{2}]$.

Приведём другой способ.

$$\begin{aligned} \log_3^2(x-4) - \log_3^2(x-6) \leq 0 &\Leftrightarrow (\log_3(x-4) - \log_3(x-6))(\log_3(x-4) + \log_3(x-6)) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) - \log_3(x-6) \leq 0, \\ \log_3(x-4) + \log_3(x-6) \geq 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) \leq \log_3(x-6), \\ \log_3(x-4) \geq -\log_3(x-6) \end{cases} \log_3^2(x-4) - \log_3^2(x-6) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) - \log_3(x-6) \geq 0, \\ \log_3(x-4) + \log_3(x-6) \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) \geq \log_3(x-6), \\ \log_3(x-4) \leq -\log_3(x-6). \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (\log_3(x-4) - \log_3(x-6))(\log_3(x-4) + \log_3(x-6)) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) - \log_3(x-6) \leq 0, \\ \log_3(x-4) + \log_3(x-6) \geq 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) \leq \log_3(x-6), \\ \log_3(x-4) \geq -\log_3(x-6) \end{cases} \log_3^2(x-4) - \log_3^2(x-6) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) - \log_3(x-6) \geq 0, \\ \log_3(x-4) + \log_3(x-6) \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) \geq \log_3(x-6), \\ \log_3(x-4) \leq -\log_3(x-6). \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (\log_3(x-4) - \log_3(x-6))(\log_3(x-4) + \log_3(x-6)) \leq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) - \log_3(x-6) \leq 0, \\ \log_3(x-4) + \log_3(x-6) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) - \log_3(x-6) \geq 0, \\ \log_3(x-4) + \log_3(x-6) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) \leq \log_3(x-6), \\ \log_3(x-4) \geq -\log_3(x-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) \geq \log_3(x-6), \\ \log_3(x-4) \leq -\log_3(x-6). \end{cases}$$

Первое неравенство первой системы не имеет решений, значит, совокупность равносильна второй системе:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \log_3(x-4) \geq \log_3(x-6), \\ \log_3(x-4) \leq -\log_3(x-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq x-6 > 0, \\ 0 < x-4 \leq \frac{1}{x-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6 > 0, \\ x-4 \leq \frac{1}{x-6} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x > 6, \\ x^2 - 10x + 23 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6, \\ 5 - \sqrt{2} \leq x \leq 5 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 6 < x \leq 5 + \sqrt{2}. \quad \begin{cases} \log_3(x-4) \geq \log_3(x-6), \\ \log_3(x-4) \leq -\log_3(x-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq x-6 > 0, \\ 0 < x-4 \leq \frac{1}{x-6} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x-6 > 0, \\ x-4 \leq \frac{1}{x-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6, \\ x^2 - 10x + 23 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6, \\ 5 - \sqrt{2} \leq x \leq 5 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 6 < x \leq 5 + \sqrt{2}. \quad \begin{cases} \log_3(x-4) \geq \log_3(x-6), \\ \log_3(x-4) \leq -\log_3(x-6) \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq x-6 > 0, \\ 0 < x-4 \leq \frac{1}{x-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6 > 0, \\ x-4 \leq \frac{1}{x-6} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6, \\ x^2 - 10x + 23 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6, \\ 5 - \sqrt{2} \leq x \leq 5 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 6 < x \leq 5 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $(6; 5 + \sqrt{2}]$.

Приведём ещё один способ.

Решим неравенство методом интервалов.

1. Найдём ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x-4 > 0, \\ x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6.$$

2. Найдём корни, решив соответствующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \log_3^2(x-4) - \log_3^2(x-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) = \log_3(x-6), \\ \log_3(x-4) = -\log_3(x-6) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \log_3(x-4) = \log_3 \frac{1}{x-6} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = \frac{1}{x-6}, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \pm \sqrt{2}, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{2}. \quad \log_3^2(x-4) - \log_3^2(x-6) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) = \log_3(x-6), \\ \log_3(x-4) = -\log_3(x-6) \end{cases} \Leftrightarrow \log_3(x-4) = \log_3 \frac{1}{x-6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x-4 = \frac{1}{x-6}, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \pm \sqrt{2}, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{2}. \quad \log_3^2(x-4) - \log_3^2(x-6) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-4) = \log_3(x-6), \\ \log_3(x-4) = -\log_3(x-6) \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \log_3(x-4) = \log_3 \frac{1}{x-6} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = \frac{1}{x-6}, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \pm \sqrt{2}, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

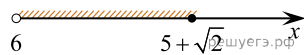
3. Отметим ОДЗ и корень на одной оси и проверим каждый из получившихся интервалов:

Из интервала $(5 + \sqrt{2}; +\infty)$ подставим в исходное неравенство $x = 9$:

$$\log_3^2(9-4) - \log_3^2(9-6) \leq 0 \Leftrightarrow \log_3^2 5 \leq 1 \text{ — неверно.}$$

Из интервала $(6; 5 + \sqrt{2})$ подставим в исходное неравенство $x = 6\frac{1}{3}$:

$$\log_3^2(6\frac{1}{3}-4) - \log_3^2(6\frac{1}{3}-6) \leq 0 \Leftrightarrow \log_3^2 2\frac{1}{3} \leq 1 \text{ — верно.}$$



Таким образом, получаем ответ $6 < x \leq 5 + \sqrt{2}$.

Ответ: $(6; 5 + \sqrt{2}]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Переплата по кредиту представляет собой сумму всех начисленных процентов и равна

$$S \cdot 0,16 + 0,9S \cdot 0,16 + 0,8S \cdot 0,16 + 0,7S \cdot 0,16 + 0,6S \cdot 0,16 + 0,5S \cdot 0,16 = \\ = (1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5)S \cdot 0,16 = 0,72S.$$

Значит, общая сумма платежей после полного погашения кредита превысит сумму взятого кредита на 72%.

Ответ: 72.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) По теореме об угле между касательной и хордой $\angle BKC = \angle KPC$. Из этого следует, что прямоугольные треугольники CBK и CHP подобны по двум углам.

б) Аналогично пункту а) доказывается подобие прямоугольных треугольников CHK и CDP . Тогда верны равенства:

$$\frac{CB}{CK} = \frac{CH}{CP},$$

$$\frac{CH}{CK} = \frac{CD}{CP},$$

откуда

$$CB \cdot CP = CH \cdot CK,$$

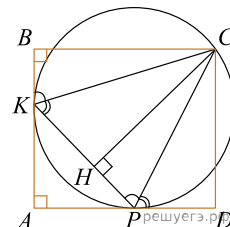
$$CK \cdot CD = CH \cdot CP.$$

Перемножая полученные выражения, получаем

$$CB \cdot CP \cdot CK \cdot CD = CH^2 \cdot CK \cdot CP \Leftrightarrow CB \cdot CD = CH^2,$$

откуда $S_{ABCD} = 49$.

Ответ: б) 49.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем систему:

$$\begin{cases} 3x(y+a) - a(y+a) - 3 = 0, \\ (3x-a)^2 + 9(y+a)^2 - 3a^2 - 2a - 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-a)(y+a) = 3, \\ (3x-a)^2 + 9(y+a)^2 = 3a^2 + 2a + 17. \end{cases} \begin{cases} 3x(y+a) - a(y+a) - 3 = 0, \\ (3x-a)^2 + 9(y+a)^2 - 3a^2 - 2a - 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-a)(y+a) = 3, \\ (3x-a)^2 + 9(y+a)^2 = 3a^2 + 2a + 17. \end{cases}$$

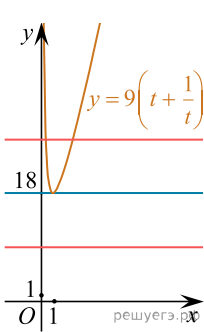
Обозначив $u = 3x - a$ и $v = y + a$, получим равносильную систему с таким же количеством решений, так как u и v суть линейные выражения. Тогда:

$$\begin{cases} u \cdot v = 3, \\ u^2 + 9v^2 = 3a^2 + 2a + 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{3}{v}, \\ \frac{9}{v^2} + 9v^2 = 3a^2 + 2a + 17. \end{cases}$$

На последнем шаге мы воспользовались тем, что $u \neq 0$ и $v \neq 0$, поскольку произведение этих величин равно 3.

Обозначим $t = v^2, t > 0$, получим: $\frac{9}{t} + 9t = 3a^2 + 2a + 17$. Чтобы найти, при каких значениях параметра исходная система имеет ровно два различных решения, нужно найти, при каких a последнее уравнение имеет единственное решение.

Решим эту часть графическим методом. График функции $f(t) = t + \frac{1}{t}$ известен, наименьшее значение этой функции при $t > 0$ равно 2. График функции $y = 9\left(t + \frac{1}{t}\right)$ получается из него растяжением в 9 раз вдоль оси ординат (см.рис.). Поэтому $\min_{t>0} y(t) = 18$. Прямая $y = 3a^2 + 2a + 17$ имеет единственное пересечение с этим графиком при $y = 18$. Таким образом,



$$3a^2 + 2a + 17 = 18 \Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + \frac{2}{3}a - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ a = \frac{1}{3}. \end{cases} \quad 3a^2 + 2a + 17 = 18 \Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + \frac{2}{3}a - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ a = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{-1; \frac{1}{3}\right\}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Например, годится такая прогрессия: $\frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}; \frac{1}{24}$.
б) Например, годится такая прогрессия: $\frac{1}{24}; \frac{1}{30}; \frac{1}{40}; \frac{1}{60}; \frac{1}{120}$.
в) Ясно, что последовательность $\frac{k}{k!}; \frac{k-1}{k!}; \dots; \frac{1}{k!}$ является арифметической прогрессией с разностью $-\frac{1}{k!}$. Кроме того, каждый член такой последовательности можно сократить так, чтобы в числителе была единица. Значит, все они являются членами исходной последовательности.