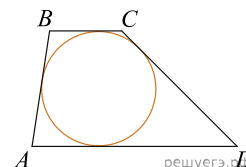


Вариант 235

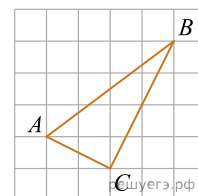
№ 1.

Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите длину её средней линии.



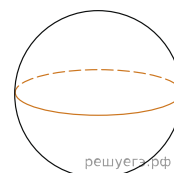
№ 2.

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен треугольник ABC . Найдите скалярное произведение $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



№ 3.

Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?



№ 4.

За круглый стол на 5 стульев в случайном порядке рассаживаются 3 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки будут сидеть рядом.

№ 5.

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

№ 6.

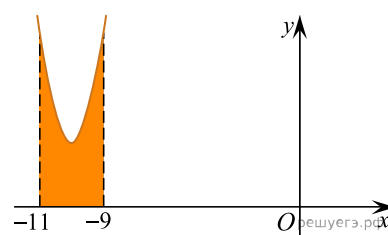
Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{5-2x}} = \frac{1}{3}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $46 \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \operatorname{tg} 83^\circ$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



№ 9.

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1) \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}},$$

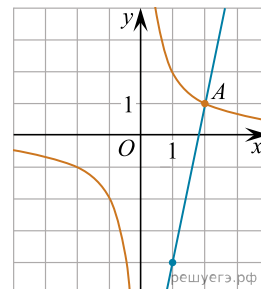
где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Бета», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,65, а оценка экспертов равна 0,37.

№ 10.

Смешали равные массы двух растворов кислоты, концентрации которых относятся как 2:5, и получили новый раствор, содержащий 49% кислоты. Найдите разность концентраций второго и первого растворов. Ответ дайте в процентах.

№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = (x+3)^2(x+5) - 1$ на отрезке $[-4; -1]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№ 14.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P , а на продолжении ребра SB за точку B — точка Q , причём $AP = BQ = SA$.

а) Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ .

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x} + \frac{7x - 19}{x - 3} \leq \frac{8x + 1}{x}$.

№ 16.

3 января 2020 года Георгий планирует положить на депозит вклад размером 2 миллиона рублей. 1 января каждого года банк начисляет 10% на сумму вклада, 2 января каждого года Георгий делает дополнительный взнос на вклад так, чтобы после этого разности между величиной вклада на 3 января и величиной вклада на 3 января прошлого года образовывали арифметическую прогрессию с разностью 1 млн руб. Определите общий размер начислений банка, если 3 января 2027 года на вкладе будет лежать 30 млн руб.

№ 17.

В треугольник ABC , в котором длина стороны AC меньше длины стороны BC , вписана окружность с центром O . Точка B_1 симметрична точке B относительно CO .

- а) Докажите, что A , B , O и B_1 лежат на одной окружности.
 - б) Найдите площадь четырёхугольника $AOBB_1$, если $AB = 10$, $AC = 6$ и $BC = 8$.
-

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 - 2x - 6a = |6x - 2a|$$

имеет ровно два различных корня.

№ 19.

На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 7, а среднее арифметическое шести наибольших равно 16.

- а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 5?
 - б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?
 - в) Пусть B — шестое по величине число, а S — среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S - B$.
-

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27937	10
2	654451	5
3	27097	27
4	325905	0,5
5	319353	0,019
6	77374	-2
7	502285	46
8	323079	6
9	317098	0,625
10	676853	42
11	509182	-10
12	282861	-1

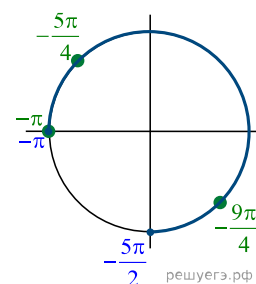
№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\operatorname{tg} x + \cos x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1)(\operatorname{tg} x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \pi + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$



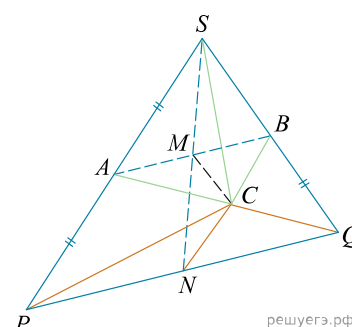
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$. Получим $-\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4}$ и $-\pi$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k; \pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4}$ и $-\pi$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть M — середина ребра AB , N — середина отрезка PQ . В равнобедренных треугольниках ASB и PSQ медианы SM и SN являются биссектрисами и высотами. Следовательно, точки S , M и N лежат на одной прямой. Треугольник PCQ равнобедренный, так как треугольники PAC и QBC равны, а значит, $PC = CQ$. В треугольниках ABC и PCQ высотами служат отрезки CM и CN соответственно. Из того, что отрезок PQ перпендикулярен отрезку SN и отрезку CN следует, что прямая PQ перпендикулярна плоскости SNC , но перпендикуляр к плоскости перпендикулярен любой прямой, лежащей в ней, следовательно, прямые PQ и SC перпендикулярны.



б) Из решения предыдущего пункта видно, что плоскость NSC перпендикулярна плоскостям ABC и PCQ , а потому $\angle MCN = \alpha$ искомый. Найдём стороны треугольника MCN :

$$MN = SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = 2\sqrt{10},$$

$$CM = AM \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

В треугольнике SBC имеем:

$$\cos \angle CSB = \frac{SB^2 + SC^2 - CB^2}{2 \cdot SB \cdot SC} = \frac{31}{49}.$$

Из треугольника SCQ по теореме косинусов находим

$$CQ^2 = CS^2 + SQ^2 - 2 \cdot CS \cdot SQ \cdot \cos \angle CSB = 121.$$

Следовательно,

$$CN = \sqrt{CQ^2 - NQ^2} = \sqrt{121 - 36} = \sqrt{85}.$$

Из треугольника MCN по теореме косинусов находим

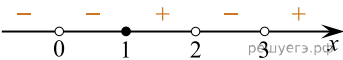
$$\cos \alpha = \frac{27 + 85 - 40}{2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{85}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{85}}.$$

Ответ: $\arccos \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{85}}.$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Решим неравенство методом интервалов:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-2x-2}{x^2-2x} + \frac{7x-19}{x-3} &\leq \frac{8x+1}{x} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2-2x} + 7 + \frac{2}{x-3} - 8 - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-2}{x^2-2x} + \frac{7x-19}{x-3} \leq \frac{8x+1}{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2-2x} + 7 + \frac{2}{x-3} - 8 - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{x^2-2x} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x(x-3)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 0 < x \leq 1, \\ 2 < x < 3. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2-2x} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x(x-3)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 0 < x \leq 1, \\ 2 < x < 3. \end{cases} \end{aligned}$$



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 1] \cup (2; 3)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть 3 января 2021 года величина вклада будет составлять $2+x$ млн руб. Тогда изменение величины вклада будет происходить согласно таблице.

Год	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
Размер вклада 3 января, млн руб.	2	$2+x$	$2+2x+1$	$2+3x+3$	$2+4x+6$	$2+5x+10$	$2+6x+15$	$2+7x+21$

По условию 3 января 2027 года на вкладе будет лежать 30 млн руб., тогда $2+7x+21=30$, откуда $x=1$. Составим таблицу начислений.

Год	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
Размер начисления , млн руб.	$2 \cdot 0,1$	$3 \cdot 0,1$	$5 \cdot 0,1$	$8 \cdot 0,1$	$12 \cdot 0,1$	$17 \cdot 0,1$	$23 \cdot 0,1$

Из таблицы находим, что общий размер начислений банка к 3 января 2027 года составит

$$0,1 \cdot (2 + 3 + 5 + 8 + 12 + 17 + 23) = 0,1 \cdot 70 = 7 \text{ млн руб.}$$

Ответ: 7 млн руб.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть CO пересекает AB в точке F , OB_1 пересекает AB в точке E , CO пересекает BB_1 в точке G , а углы A , B и C соответственно α , β и γ . Покажем, что отрезок AB_1 виден из точек O и B под одним и тем же углом — это будет означать, что точки A , B_1 , B , O лежат на одной окружности.

В треугольнике CGB имеем:

$$\angle CGB = 90^\circ, \angle GCB = \frac{\gamma}{2}, \angle CBG = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

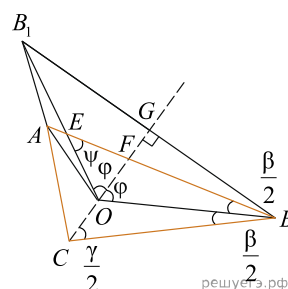
Тогда $\angle ABB_1 = \angle CBG - \angle CBA = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \beta$.

В треугольнике OGB имеем: $\angle GBO = \angle GBC - \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$, тогда $\varphi = \angle GOB = 90^\circ - \angle GBO = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}$.

Треугольник B_1OB равнобедренный, поскольку GO — серединный перпендикуляр к BB_1 . Поэтому $\angle B_1OB = 2\varphi = \gamma + \beta$.

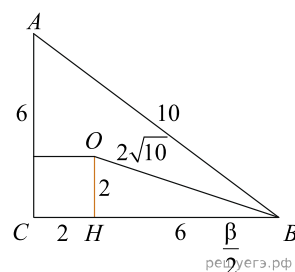
В треугольнике ABC точка O — инцентр, поэтому $\angle AOB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Следовательно,

$$\angle AOB_1 = \angle AOB - 2\varphi = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \beta = \angle ABB_1.$$



б) Площадь четырехугольника $AOBB_1$ найдем по формуле $S = \frac{1}{2} AB \cdot OB_1 \sin \psi$. Заметим, что $B_1O = OB$, поскольку треугольник B_1OB равнобедренный, и что $\psi = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - 2\varphi = 180^\circ - \left(\gamma + \frac{3}{2}\beta\right)$ из треугольника EOB .

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC , в нем $\cos \beta = \frac{4}{5}$, $\sin \beta = \frac{3}{5}$. Далее опустим перпендикуляр OH на сторону BC . Тогда $OH = \frac{AC + BC - AB}{2} = 2$ как радиус вписанной окружности. Тогда $CH = 2$, $BH = 6$, $OB = 2\sqrt{10}$, откуда $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos \frac{\beta}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.



Далее имеем:

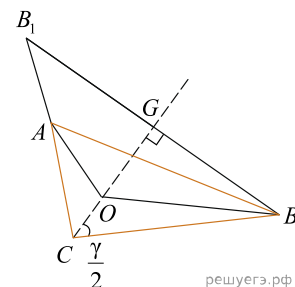
$$\begin{aligned} \sin \psi &= \sin \left(180^\circ - \left(\gamma + \frac{3}{2}\beta \right) \right) = \sin \left(\gamma + \frac{3}{2}\beta \right) \stackrel{\gamma=90^\circ}{=} \cos \frac{3}{2}\beta = \cos \left(\beta + \frac{\beta}{2} \right) = \sin \psi = \sin \left(180^\circ - \left(\gamma + \frac{3}{2}\beta \right) \right) = \\ &= \sin \left(\gamma + \frac{3}{2}\beta \right) \stackrel{\gamma=90^\circ}{=} \cos \frac{3}{2}\beta = \cos \left(\beta + \frac{\beta}{2} \right) = \\ &= \cos \beta \cos \frac{\beta}{2} - \sin \beta \sin \frac{\beta}{2} = \frac{9}{5\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OB \cdot \sin \psi = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{9}{5\sqrt{10}} = 18.$$

Ответ: б) 18.

Приведем другое решение.

а) Пусть CO пересекает BB_1 в точке G , а угол C равен γ . В треугольнике B_1CB отрезок CG является высотой и медианой, тогда треугольник B_1CB равнобедренный, отрезок CG является биссектрисой, следовательно, луч CB_1 совпадает с лучом CA , и точка A лежит на отрезке CB_1 . В треугольнике CGB_1 имеем:



$$\angle CGB_1 = 90^\circ, \quad \angle GCB = \frac{\gamma}{2}, \quad \angle CBG = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

В треугольнике ABC точка O — инцентр, поэтому $\angle AOB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$.

Следовательно, в четырехугольнике B_1AOB имеем:

$$\angle AB_1B + \angle AOB = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} + 90^\circ + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ,$$

а потому четырехугольник B_1AOB вписанный, и точки B_1, A, O, B лежат на одной окружности.

б) Площадь четырехугольника $AOBB_1$ найдем как сумму площадей треугольников: $S_{AOBB_1} = S_{AOB} + S_{ABB_1}$. Причём $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC . Для сторон треугольника ABC выполнено соотношение $AB^2 = AC^2 + BC^2$, следовательно, угол C прямой. Тогда

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = 2,$$

$$\text{откуда } S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 = 10.$$

Площадь треугольника ABB_1 найдем как разность площадей треугольников BCB_1 и ABC :

$$\begin{aligned} S_{ABB_1} &= S_{BCB_1} - S_{ABC} = \frac{1}{2} CB^2 - \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 8^2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 32 - 24 = 8. \quad S_{ABB_1} = S_{BCB_1} - S_{ABC} = \frac{1}{2} CB^2 - \frac{1}{2} AC \cdot CB = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8^2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 32 - 24 = 8. \end{aligned}$$

В результате получим $S_{AOBB_1} = 10 + 8 = 18$.

Приведем решение пункта б) Натальи Лесниченко.

Заметим, что $S_{AOBB_1} = S_{BCB_1} - (S_{AOC} + S_{COB})$.

Высоты треугольников AOC и AOB равны радиусу окружности, вписанной в треугольник ABC .

Для сторон треугольника ABC выполнено соотношение $AB^2 = AC^2 + BC^2$, следовательно, угол C прямой. Тогда

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = 2,$$

Следовательно,

$$S_{AOBB_1} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 - \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \right) = 32 - (6 + 8) = 18.$$

№ 18.

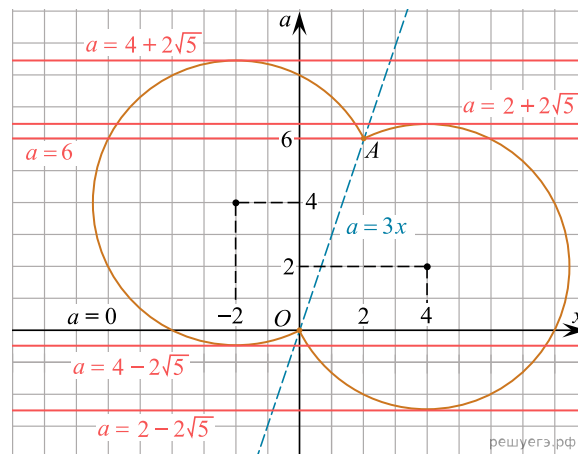
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}
 x^2 + a^2 - 2x - 6a = |6x - 2a| &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + a^2 - 2x - 6a = 6x - 2a, \\ 6x - 2a \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + a^2 - 4a = 0, \\ a \leq 3x, \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + a^2 - 2x - 6a = -6x + 2a, \\ 6x - 2a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + a^2 - 8a = 0, \\ a > 3x \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 16 + a^2 - 4a + 4 = 16 + 4, \\ a \leq 3x, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (a-2)^2 = (2\sqrt{5})^2, \\ a \leq 3x, \end{cases} &x^2 + a^2 - 2x - 6a = |6x - 2a| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + a^2 - 2x - 6a = 6x - 2a, \\ 6x - 2a \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + a^2 - 8a + 16 = 4 + 16, \\ a > 3x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + (a-4)^2 = (2\sqrt{5})^2, \\ a > 3x. \end{cases} &\begin{cases} x^2 + a^2 - 2x - 6a = -6x + 2a, \\ 6x - 2a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + a^2 - 4a = 0, \\ a \leq 3x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + a^2 - 8a = 0, \\ a > 3x \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 16 + a^2 - 4a + 4 = 16 + 4, \\ a \leq 3x, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (a-2)^2 = (2\sqrt{5})^2, \\ a \leq 3x, \end{cases} &x^2 + a^2 - 2x - 6a = |6x - 2a| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + a^2 - 2x - 6a = 6x - 2a, \\ 6x - 2a \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + a^2 - 8a + 16 = 4 + 16, \\ a > 3x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + (a-4)^2 = (2\sqrt{5})^2, \\ a > 3x. \end{cases} &\begin{cases} x^2 + a^2 - 2x - 6a = -6x + 2a, \\ 6x - 2a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + a^2 - 4a = 0, \\ a \leq 3x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + a^2 - 8a = 0, \\ a > 3x \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x-4)^2 + (a-2)^2 = (2\sqrt{5})^2, \\ a \leq 3x, \end{cases} & x^2 + a^2 - 2x - 6a = |6x - 2a| \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + a^2 - 2x - 6a = 6x - 2a, \\ 6x - 2a \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + a^2 - 2x - 6a = -6x + 2a, \\ 6x - 2a < 0 \end{cases} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 8x + a^2 - 4a = 0, \\ a \leq 3x, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + 4x + a^2 - 8a = 0, \\ a > 3x \end{cases} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 8x + 16 + a^2 - 4a + 4 = 16 + 4, \\ a \leq 3x, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + a^2 - 8a + 16 = 4 + 16, \\ a > 3x \end{cases} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x-4)^2 + (a-2)^2 = (2\sqrt{5})^2, \\ a \leq 3x, \end{cases} & x^2 + a^2 - 2x - 6a = |6x - 2a| \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + a^2 - 2x - 6a = 6x - 2a, \\ 6x - 2a \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + a^2 - 2x - 6a = -6x + 2a, \\ 6x - 2a < 0 \end{cases} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 8x + a^2 - 4a = 0, \\ a \leq 3x, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + 4x + a^2 - 8a = 0, \\ a > 3x \end{cases} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 8x + 16 + a^2 - 4a + 4 = 16 + 4, \\ a \leq 3x, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + a^2 - 8a + 16 = 4 + 16, \\ a > 3x \end{cases} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x-4)^2 + (a-2)^2 = (2\sqrt{5})^2, \\ a \leq 3x, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x+2)^2 + (a-4)^2 = (2\sqrt{5})^2, \\ a > 3x. \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}$$

Тем самым в системе координат xOa исходное уравнение задаёт объединение дуг окружностей радиуса $2\sqrt{5}$ с центрами в точках $(4; 2)$ и $(-2; 4)$, лежащих ниже и выше прямой $a = 3x$ соответственно (см.рис.), пересекающихся в точках $A(2; 6)$ и $O(0; 0)$. Количество корней уравнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с горизонтальной прямой при соответствующем значении a .



Пользуясь построенным рисунком, получаем:

- при $a < 2 - 2\sqrt{5}$ уравнение не имеет корней;
- при $a = 2 - 2\sqrt{5}$ уравнение имеет один корень;
- при $2 - 2\sqrt{5} < a < 4 - 2\sqrt{5}$ уравнение имеет **два корня**;
- при $a = 4 - 2\sqrt{5}$ уравнение имеет три корня;
- при $4 - 2\sqrt{5} < a < 0$ уравнение имеет четыре корня;
- при $a = 0$ уравнение имеет три корня;
- при $0 < a < 6$ уравнение имеет **два корня**;
- при $a = 6$ уравнение имеет три корня;
- при $6 < a < 2 + 2\sqrt{5}$ уравнение имеет четыре корня;

— при $a = 2 + 2\sqrt{5}$ уравнение имеет три корня;
 — при $2 + 2\sqrt{5} < a < 4 + 2\sqrt{5}$ уравнение имеет **два корня**;
 — при $a = 4 + 2\sqrt{5}$ уравнение имеет один корень;
 — при $a > 4 + 2\sqrt{5}$ уравнение не имеет корней.
 Таким образом, уравнение имеет ровно два различных корня при $2 - 2\sqrt{5} < a < 4 - 2\sqrt{5}$, при $0 < a < 6$ или при $2 + 2\sqrt{5} < a < 4 + 2\sqrt{5}$.

Ответ: $(2 - 2\sqrt{5}; 4 - 2\sqrt{5}) \cup (0; 6) \cup (2 + 2\sqrt{5}; 4 + 2\sqrt{5})$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в пункте а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а)Если наименьшее число равно 5, то сумма шести наименьших чисел не меньше $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$, а их среднее арифметическое больше 7.
 б)Пусть сумма пяти наименьших чисел равна A , шестое по величине число равно B , а сумма пяти наибольших чисел равна C . Предположим, что среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равно 10. Тогда получаем:

$$B + C = 96, A + B + C = 110,$$

откуда $A = 14$. Это невозможно, поскольку должно выполняться неравенство $A \geq 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

в) Имеем: $A + B = 42, B + C = 96$. Получаем:

$$S - B = \frac{A + B + C}{11} - B = \frac{(A + B) + (B + C) - 12B}{11} = \frac{138 - 12B}{11}.$$

Значит, нужно найти наименьшее значение B .

Пусть числа, написанные на доске, равны $a_1, a_2, \dots, a_{11}$, причем $a_1 < a_2 < \dots < a_{11}$. Тогда $a_1 + 5 \leq a_2 + 4 \leq a_3 + 3 \leq a_4 + 2 \leq a_5 + 1 \leq a_6 = B$, откуда

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + 15 \leq 6B \Leftrightarrow 57 \leq 6B \Leftrightarrow B \geq 9,5.$$

Значит, $B \geq 10$, поскольку B целое.

Покажем, что число B может равняться 10. Например, если на доске написаны числа 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 36,

то условия задачи выполнены и $B = 10$. Таким образом, $S - B = \frac{138 - 12B}{11} = \frac{18}{11}$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) $\frac{18}{11}$.
