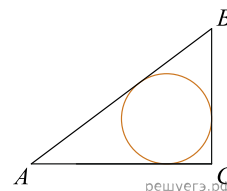


Вариант 237

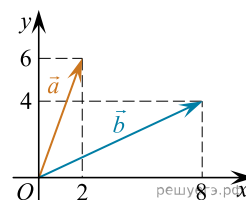
№ 1.

В треугольнике ABC стороны $AC=4$, $BC=3$, угол C равен 90° . Найдите радиус вписанной окружности.



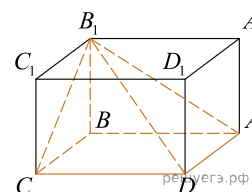
№ 2.

Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



№ 3.

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, D, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 9$, $BC = 3$, $BB_1 = 8$.



№ 4.

За круглый стол на 17 стульев в случайном порядке рассаживаются 15 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки будут сидеть рядом.

№ 5.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет нечётных чисел, а чётные числа 2, 4 и 6 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые.

Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

№ 6.

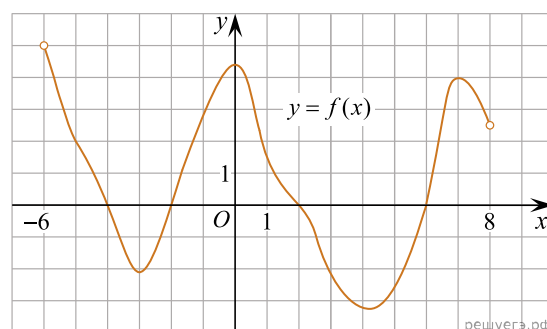
Найдите корень уравнения: $\frac{4}{7}x = 7\frac{3}{7}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt[3]{7a^2})^6}{a^4}$ при $a \neq 0$.

№ 8.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



№ 9.

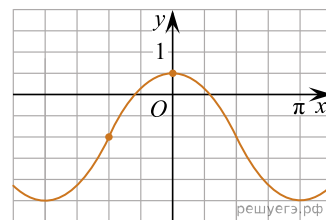
Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 4А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

№ 10.

Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 14 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите b .

**№ 12.**

Найдите наибольшее значение функции $y = -2 \operatorname{tg} x + 4x - \pi - 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $\log_{\sin x}(\sin 2x + 2\sqrt{3} \sin^2 x + \sin x) = 1$.
б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

№ 14.

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

- а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

№ 15.

Решите неравенство $6^{x^2} + 81 \cdot 4^x \leq 4^x \cdot 3^{x^2} + 81 \cdot 2^{x^2}$.

№ 16.

Анатолий решил взять кредит в банке 331000 рублей на 3 месяца под 10% в месяц. Существуют две схемы выплаты кредита.

По первой схеме банк в конце каждого месяца начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Анатолий переводит в банк фиксированную сумму и в результате выплачивает весь долг тремя равными платежами (аннуитетные платежи).

По второй схеме тоже сумма долга в конце каждого месяца увеличивается на 10%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Анатолием. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину (дифференцированные платежи). Какую схему выгоднее выбрать Анатолию? Сколько рублей будет составлять эта выгода?

№ 17.

На стороне AC равностороннего треугольника ABC взяли точку M . Серединный перпендикуляр к BM пересекает AB и BC в точках E и K соответственно.

- а) Докажите, что углы AEM и KMC равны.
 - б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и MKC , если $AM : CM = 2 : 5$.
-

№ 18.

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{x-2}{ax^2 - (a^2+1)x + a} \geq 0$$

является некоторый луч.

№ 19.

Из четырёхзначного натурального числа вычитают сумму всех его цифр, затем полученное число делят на 3.

- а) Могло ли в результате такой операции получиться число 3111?
- б) Могло ли в результате такой операций получиться число 2075?
- в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 5200 до 6000 включительно?

Ответы

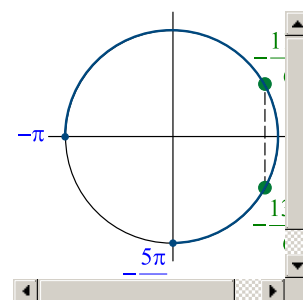
Номер	Задание	Ответ
1	27933	1
2	27732	-4
3	639664	72
4	325917	0,125
5	508891	0,8
6	26662	13
7	26832	49
8	27487	4
9	27973	55
10	323852	8,4
11	509130	-1
12	77494	-5

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Заметим, что уравнение определено при $\cos x > \frac{1}{2}$. Преобразуем его при этом условии:

$$\begin{aligned}
 \log_2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) + \log_2 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) &= -1 \Leftrightarrow \log_2 \left(\cos^2 x - \frac{1}{4} \right) = -1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos^2 x &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow_{\cos x > \frac{1}{2}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\
 \log_2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) + \log_2 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) &= -1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \log_2 \left(\cos^2 x - \frac{1}{4} \right) &= -1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow_{\cos x > \frac{1}{2}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \log_2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) + \log_2 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) &= -1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \log_2 \left(\cos^2 x - \frac{1}{4} \right) &= -1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow_{\cos x > \frac{1}{2}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



б) Отберем корни при помощи единичной окружности (см. рис.). Подходят: $-\frac{13\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{13\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка H — середина AC . Тогда

$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем,

$$BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$

а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M .

б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1 . Отметим, что прямые NP и A_1A взаимно перпендикулярны, поскольку ребро призмы перпендикулярно ее основанию. Следовательно, прямая NP перпендикулярна плоскости ABV_1 боковой грани призмы. Поэтому прямая MP — проекция прямой MN на плоскость ABV_1 .

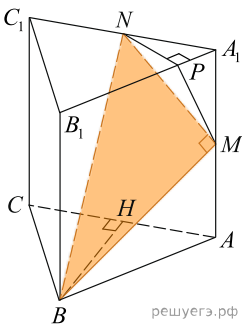
Прямые BM и MN взаимно перпендикулярны, поэтому, по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, прямые BM и MP также взаимно перпендикулярны. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого двугранного угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Поэтому

$$\sin \angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}.$$

Следовательно, $\angle NMP = \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Ответ: б) $\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Сгруппируем, разложим на множители, применим метод рационализации:

$$\begin{aligned}
6^{x^2} + 81 \cdot 4^x &\leq 4^x \cdot 3^{x^2} + 81 \cdot 2^{x^2} \Leftrightarrow 6^{x^2} - 4^x \cdot 3^{x^2} + 81 \cdot 4^x - 81 \cdot 2^{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3^{x^2} \left(2^{x^2} - 4^x \right) - 81 \left(2^{x^2} - 4^x \right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(2^{x^2} - 4^x \right) \left(3^{x^2} - 81 \right) \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(2^{x^2} - 2^{2x} \right) \left(3^{x^2} - 3^4 \right) \leq 0 \Leftrightarrow (2 - 1)(x^2 - 2x)(3 - 1)(x^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x(x - 2)^2(x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0, \\ x = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: $[-2; 0] \cup \{2\}$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Рассмотрим первую схему. Пусть x руб. — фиксированная сумма ежемесячных выплат.

Который от-четный месяц?	Долг к концу месяца с учетом на-численных процентов (руб.)	Анатолий перево-дит в банк (руб.)	Долг Анатолия на начало сле-дующего месяца (руб.)
Первый	$331000 \cdot 1,1 = 364100$	x	$364100 - x$
Второй	$(364100 - x) \cdot 1,1 = 400510 - 1,1x$	x	$400510 - 2,1x$
Третий	$(400510 - 2,1x) \cdot 1,1 = 440561 - 2,31x$	x	$440561 - 3,31x = 0$

$$3,31x = 440561 \Leftrightarrow x = 133100 \Leftrightarrow 3x = 399300.$$

Теперь рассмотрим вторую схему.

Который отчетный месяц?	Анатолий должен перевести в банк		
	Часть кредита по основному долгу (руб.)	Процентные ставки банка	Всего (руб.)
Первый	$\frac{331000}{3}$	$331000 \cdot 0,1 = 33100$	$\frac{331000}{3} + 33100 = \frac{430300}{3}$
Второй	$\frac{331000}{3}$	$\frac{331000 \cdot 0,1 \cdot 2}{3} = \frac{66200}{3}$	$\frac{331000}{3} + \frac{66200}{3} = 132400$
Третий	$\frac{331000}{3}$	$\frac{331000 \cdot 0,1}{3} = \frac{33100}{3}$	$\frac{331000}{3} + \frac{33100}{3} = \frac{364100}{3}$

Итак, если Анатолий воспользуется второй схемой, то он в банк должен будет вернуть сумму, равную

$$\frac{430300}{3} + 132400 + \frac{364100}{3} = \frac{794400}{3} + 132400 = 397200 \text{ (руб.)}$$

А эта сумма меньше, чем 399 300, на 2100 руб.

Замечание:

Эту разницу можно было бы вычислить и так:

- 1) $\Phi = \frac{331000 \cdot 1,1^3}{1,1^2 + 1,1 + 1} = \frac{331000 \cdot 1,331}{3,31} = 1,331 \cdot 100000 = 133100;$
- 2) $3\Phi = 399300;$
- 3) $331000 + 331000 \cdot 0,1 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = 331000 + 33100 \cdot 2 = 331000 + 66200 = 397200;$
- 4) $399300 - 397200 = 2100.$

Ответ: выгодна вторая схема; 2100 рублей.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Из симметрии относительно отрезка EK получаем, что треугольники EMK и EBK равны, следовательно, $\angle EMK = 60^\circ$. Пусть $\angle AEM = \alpha$. Тогда

$$\angle AME = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha.$$

Значит,

$$\angle KMC = 180^\circ - (120^\circ - \alpha) - 60^\circ = \alpha.$$

Таким образом, углы AEM и KMC равны.

б) Пусть $AM = 2x$, $MC = 5x$, $AE = y$ и $EM = EB = 7x - y$. По теореме косинусов:

$$EM^2 = AM^2 + AE^2 - 2 \cdot AE \cdot AM \cdot \frac{1}{2},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} (7x - y)^2 &= (2x)^2 + y^2 - 2x \cdot y \Leftrightarrow 49x^2 - 14xy + y^2 = 4x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 45x^2 = 12xy \Leftrightarrow y = \frac{45}{12}x = \frac{15}{4}x. \end{aligned}$$

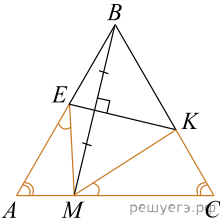
Треугольники AEM и CMK подобны (по двум углам). Коэффициент подобия равен:

$$\frac{AE}{MC} = \frac{y}{5x} = \frac{\frac{15}{4}x}{5x} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, отношение площадей треугольников AEM и MKC равно:

$$\frac{S_{AEM}}{S_{MKC}} = \frac{9}{16}.$$

Ответ: б) $\frac{9}{16}$.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено искомое значение параметра, но допущена одна вычислительная ошибка (описка).	3
С помощью верного рассуждения получено значение параметра (возможно неверное из-за одной вычислительной ошибки), но решение недостаточно обосновано (например, не обосновано наличие ровно одного значения a или не рассмотрен один из случаев $a = 2$ или $a = 0,5$).	2
Задача сведена к методу интервалов или исследованию графика, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Разложим знаменатель левой части данного неравенства на множители:

$$\begin{aligned} ax^2 - (a^2 + 1)x + a &= ax^2 - a^2x - x + a = ax(x - a) - (x - a) = (ax - 1)(x - a). \\ ax^2 - (a^2 + 1)x + a &= ax^2 - a^2x - x + a = \\ &= ax(x - a) - (x - a) = (ax - 1)(x - a). \end{aligned}$$

Способ 1 (метод интервалов).

$a > 0$, поэтому знаменатель исходной дроби имеет корни a и $\frac{1}{a}$. Если числа 2 , a и $\frac{1}{a}$ попарно различны, то искомое множество — объединение двух промежутков, а не луч. Значит, для того, чтобы множеством решений неравенства

являлся луч, необходимо, чтобы из трех чисел 2 , a и $\frac{1}{a}$ какие-то два совпали.

1. Если $a = 2$ или $a = 0,5$, то множеством решений данного неравенства также является не луч, а

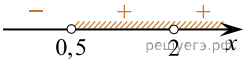


Рис. 1



объединение двух промежутков: $(0,5;2) \cup (2;+\infty)$ (см. рис. 1).
2. Если $a = \frac{1}{a}$, то $a = 1$, поскольку, согласно условию, $a > 0$.

В этом случае множеством решений данного неравенства является луч $[2;+\infty)$ (см. рис. 2).

Способ 2 (графоаналитический).

Данное неравенство при положительных a задает на координатной плоскости xOa три области (см. заштрихованные области на рис. 3).
Множество решений данного неравенства при каждом значении a есть множество абсцисс всех точек этих областей, ордината которых равна a .
Это множество является лучом только при $a = 1$.

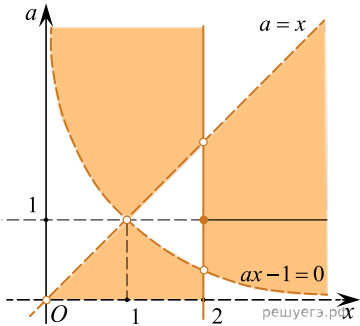


Рис. 3

Ответ: $a = 1$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Пусть число записывалось цифрами a, b, c, d . Тогда оно было равно $1000a + 100b + 10c + d$. Из него получи-

- лось
- $$\frac{1}{3}(1000a + 100b + 10c + d - a - b - c - d) = \frac{1}{3}(999a + 99b + 9c) = 3(111a + 11b + c).$$
- а) Уравнение $3(111a + 11b + c) = 3111$ сводится к $111a + 11b + c = 1037$. Взяв, например, $a = 9, b = 3, c = 5$ и любое d (напри-
мер, 0) получим $9350 \rightarrow 3111$.
б) Уравнение $3(111a + 11b + c) = 2075$ неразрешимо, поскольку 2075 не кратно трем.
в) Сразу заметим, что числа, отличающиеся лишь последней цифрой, дают одинаковый ответ. Кроме того,
 $6000 \rightarrow 1998$ и других таких чисел нет, поскольку для остальных чисел $a = 5, b \leq 9, c \leq 9$, а тогда

$$3(111a + 11b + c) \leq 3(555 + 99 + 9) = 3 \cdot 664 = 1992.$$

Теперь исследуем числа 5200, 5210, 5220, ... 5990. У всех у них $a = 5$, и потому они дают ответы $3(555 + 11b + c)$. Докажем,
что разные числа не могут дать одинаковый ответ. В самом деле, пусть $3(555 + 11b + c) = 3(555 + 11b_1 + c_1)$, тогда

$$11b + c = 11b_1 + c_1, \quad 11(b - b_1) = c_1 - c.$$

Разность двух цифр может быть кратна 11 только если эти цифры равны, то есть $c_1 = c$, а тогда и $b_1 = b$. Итак, все эти
числа (их $599 - 520 + 1 = 80$) дают разные ответы. Значит, всего ответов 81 (учитывая 1998).

Ответ: а) да; б) нет; в) 81.

