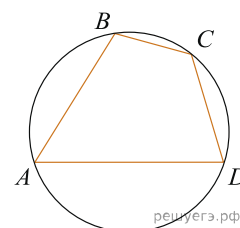


Вариант 238

№ 1.

Стороны четырехугольника $ABCD$ AB , BC , CD и AD стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 95° , 49° , 71° , 145° . Найдите угол B этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.

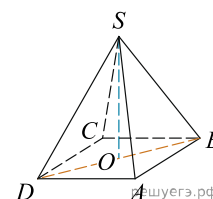


№ 2.

Даны векторы $\vec{a}(-10; 3)$, $\vec{b}(-1; -6)$ и $\vec{c}(-2; 6)$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}$.

№ 3.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 15$, $BD = 16$. Найдите боковое ребро SA .



№ 4.

В коробке лежат красные пуговицы, столько же белых, 18 жёлтых и 36 зелёных — всего 100 пуговиц. Портной достаёт из коробки одну случайную пуговицу. Какова вероятность того, что она окажется красной или жёлтой?

№ 5.

Агрофирма закупает куриные яйца только в двух домашних хозяйствах. Известно, что 5% яиц из первого хозяйства— яйца высшей категории, а из второго хозяйства— 30% яиц высшей категории. В этой агрофирме 15% яиц высшей категории. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

№ 6.

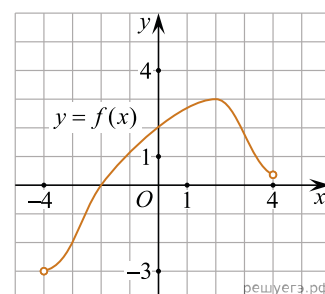
Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

№ 7.

Найдите значение выражения $\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a-10)^2}$ при $6 \leq a \leq 10$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 4)$. Найдите корень уравнения $f'(x) = 0$.



№ 9.

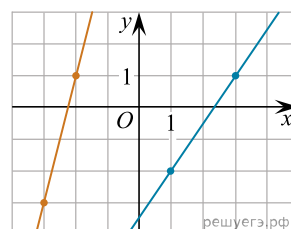
Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_n = 20^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_b = 60^\circ\text{C}$ до температуры $T(^\circ\text{C})$, причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_b - T_n}{T - T_n}$, где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м.

№ 10.

Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

№ 11.

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = 10 \sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$

№ 13.

а) Решите уравнение $2^{-\cos 2x} + 2\sqrt{2} = 5 \cdot 2^{\sin^2 x - \frac{3}{4}}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

№ 14.

Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10.

а) Докажите, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания.

б) Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1} 11} \geq \frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11}$.

№ 16.

IT-компания закупает кластер серверов за 212 миллионов рублей для обучения нейросети, генерирующей идеальные отговорки для невыполненных домашних. Затраты на обработку x петабайт данных равны $0,5x^2 + 2x + 10$ млн руб. в год. Прибыль с продажи обработанных данных по цене p млн руб. за петабайт составит $px - (0,5x^2 + 2x + 10)$. Важное ограничение: из-за слабой системы охлаждения (сисадмин поставил комнатный вентилятор), серверы физически не могут обрабатывать более 8 петабайт данных в год ($x \leq 8$). Компания настраивает нагрузку так, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p серверы окупятся не более чем за 2 года?

№ 17.

В четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O .

а) Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, если $AC = 10$ и $BD = 26$.

№ 18.

При каждом a решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2 + a^2 + 2 - 2x - 2a} + \sqrt{x^2 + a^2 - 6x + 9} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

№ 19.

Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$, в которой $a_5 = 4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из трёхзначных чисел?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27872	108
2	670261	4
3	911	17
4	680564	0.41
5	320751	0.6
6	26668	-9
7	26830	4
8	562751	2
9	27995	30
10	99568	27
11	509197	-5
12	26699	32

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Пусть $t = 16^{\sin x \cdot \cos x}$, тогда исходное уравнение примет вид:

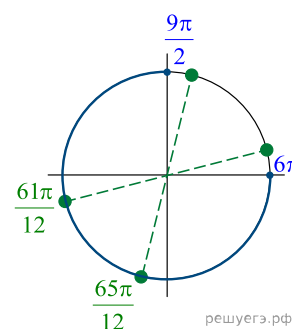
$$t^2 - 18t + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 16, \\ t = 2. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} 16^{\sin x \cdot \cos x} = 16, \\ 16^{\sin x \cdot \cos x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cdot \cos x = 1, \\ \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 2, \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \pi k, \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни при помощи единичной окружности.

Подходят $\frac{61\pi}{12}$, $\frac{65\pi}{12}$.



решуегэ.рф

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{12} + \pi k, \frac{5\pi}{12} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{61\pi}{12}$, $\frac{65\pi}{12}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Вспомним, что площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле $S = 2\pi RH$, где R — радиус основания, H — высота цилиндра. В данном случае $H = R/2$, поэтому $2\pi RH = \pi R^2$, откуда и следует требуемое.

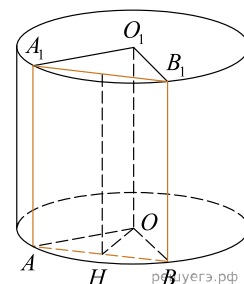
б) Сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно его оси OO_1 , — прямоугольник ABB_1A_1 (O и AB — соответственно центр и хорда нижнего основания цилиндра), $AA_1 = 5$. Расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения равно высоте OH треугольника OAB . $OA = OB = 10$, $OH = 6$, откуда

$$AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 16.$$

Площадь прямоугольника ABB_1A_1

$$S = AA_1 \cdot AB = 80.$$

Ответ: 80.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Используем формулу $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1} 11} \geq \frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \sqrt[4]{15} \log_{11}(x+1) \geq \log_{11} 123 \cdot \log_{11}(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \log_{11}(x+1)(\sqrt[4]{15} - \log_{11} 123) \geq 0. \end{cases} \frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1} 11} \geq \frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \sqrt[4]{15} \log_{11}(x+1) \geq \log_{11} 123 \cdot \log_{11}(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \log_{11}(x+1)(\sqrt[4]{15} - \log_{11} 123) \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\sqrt[4]{15} < \sqrt[4]{16} = 2 = \log_{11} 121 < \log_{11} 123,$$

а потому $\sqrt[4]{15} - \log_{11} 123 < 0$. Таким образом,

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ \log_{11}(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ 0 < x+1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

Ответ: $(-1; 0)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем выражение, задающее функцию, описывающую прибыль:

$$f(x) = px - (0,5x^2 + 2x + 10) \Leftrightarrow -0,5x^2 - (2 - p)x - 10.$$

Функция $f(x)$ достигает наибольшего значения в точке $x = p - 2$. При $p - 2 \leq 8$ ограничение на обработку данных выполнено и $x = p - 2$. Если $p - 2 > 8$, условие не выполняется и необходимо взять $x = 8$.

Рассмотрим первый случай: подставляя в уравнение прибыли значение $x = p - 2$, получаем, что годовая прибыль равна $0,5p^2 - 2p - 8$. Чтобы серверы окупались не более, чем за 2 года, годовое значение прибыли должно быть не меньше 106 млн руб. Имеем:

$$0,5p^2 - 2p - 8 \geq 106 \Leftrightarrow_{p>0} p \geq 2 + 2\sqrt{58},$$

что противоречит условию $p - 2 \leq 8$.

Рассмотрим второй случай. Подставим значение $x = 8$ в условие на прибыль, получим:

$$8p - (0,5 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 10) \geq 106 \Leftrightarrow 8p - 58 \geq 106 \Leftrightarrow p \geq 20,5.$$

Наименьшее значение p , при котором серверы окупятся, равно 20,5, что удовлетворяет условию $p - 2 > 8$.

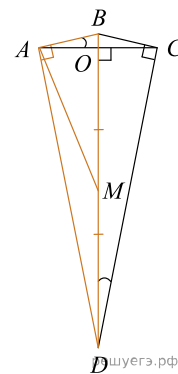
Ответ: 20,5.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Заметим, что углы $\angle BAO$ и $\angle DCO$ не равны, так как стороны AB и CD не параллельны. Значит, углы $\angle BAC$ и $\angle BDC$ равны, следовательно, четырехугольник $ABCD$ вписанный.

б) Треугольники AOB и AOD подобны. Пусть $\angle BAO = \angle DAO$, тогда из вписанности четырехугольника $ABCD$ следует, что $\angle DAO = \angle DBC = \angle BDC$, а значит, $AB = AD$ и $BC = CD$. Пусть теперь $\angle BAO = \angle ADO$, тогда $\angle ADO = \angle BDC = \angle ACB$, откуда $AB = BC$ и $AD = DC$. В любом случае $AB + CD = BC + AD$, следовательно, в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.



Пусть $AB = AD$ и $BC = CD$, тогда

$$\angle ABC = \angle ADC = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

и $BO = OD = 13$, следовательно, в треугольнике ABC высота BO больше гипотенузы, что невозможно. Таким образом, $AB = BC$ и $AD = DC$, откуда $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ и $AO = OC = 5$.

В треугольнике BAD медиана $AM = \frac{BD}{2} = 13$, из чего следует, что $OM = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ и $BO = 1$, тогда

$$AB = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26} = BC, \quad AD = \sqrt{5^2 + 25^2} = 5\sqrt{26}.$$

Пусть радиус вписанной окружности равен x , тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot P_{ABCD} = 6\sqrt{26}x.$$

С другой стороны, $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 130$, следовательно,

$$x = \frac{130}{6\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{6}.$$

Ответ: б) $\frac{5\sqrt{26}}{6}$.

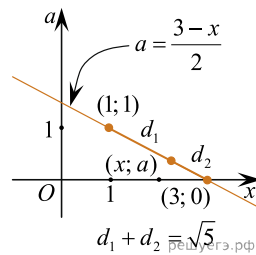
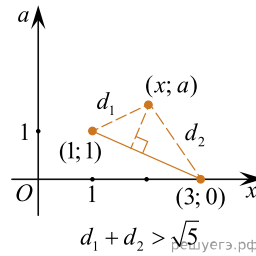
№ 18.

Критерии оценивания ответа на задание C5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Рассмотрены все возможные случаи. Получен верный ответ, но решение либо содержит пробелы, либо вычислительную ошибку или опisku.	3
Рассмотрены все возможные случаи. Получен ответ, но решение содержит ошибки.	2
Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.	1
Все прочие случаи.	0
Максимальное количество баллов	4

Решение. Запишем второе уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)^2 + (a-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + a^2} = \sqrt{5}.$$

Геометрический смысл уравнения состоит в том, что сумма расстояний от точек $(x; a)$ до точек $(1; 1)$ и $(3; 0)$ равно $\sqrt{5}$. Поскольку расстояние между точками $(1; 1)$ и $(3; 0)$ тоже равно $\sqrt{5}$, это означает, что точка $(x; a)$ должна лежать на отрезке, соединяющем точки $(1; 1)$ и $(3; 0)$. Другими словами, она удовлетворяет уравнению $a = \frac{3-x}{2}$ и условию $x \in [1; 3]$.



Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ 2a = 3-x, \quad x \in [1; 3]. \end{cases}$$

Подставив $2a$ в первое уравнение, получаем

$$2^{1+x} = 16(3-x)\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}} = 3-x \Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}} + x = 3.$$

Поскольку функция $y = 2^{x-\frac{7}{2}} + x$ возрастающая (как сумма двух возрастающих), каждое значение она принимает ровно один раз. Поэтому решение $x = \frac{5}{2}$ — единственное, ему соответствует $a = \frac{1}{4}$.

Ответ: если $a = \frac{1}{4}$, то $x = \frac{5}{2}$, при остальных a нет решений.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Например, 2, 4, 5, 5, 4.

б) Нет. Заметим, что $a_{k+2} - a_{k+1} = a_{k+1} - a_k - 1$, то есть разность между соседними членами последовательности уменьшается на 1. Поэтому последовательность с какого-то момента убывает, а до этого момента возможно возрастает (возрастающей части может и не быть, если разность сразу выбрать отрицательной). Очевидно, каждое число может не более одного раза встретиться на участке возрастания и на участке убывания.

в) Заметим, что если ко всем членам последовательности прибавить одно и то же число, она по-прежнему будет удовлетворять условию. Выберем максимальный ее член x и прибавим ко всем членам по $999 - x$. Теперь максимальный равен 999, а остальные остались трехзначными.

Изучим, сколько трехзначных чисел может содержать убывающая последовательность такого типа, начинающаяся с 999. Это будут числа

$$999 - 1, 999 - 1 - 2, \dots, 999 - 1 - 2 - \dots - n = 999 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для того чтобы они были трехзначными, нужно, чтобы $n(n+1) \leq 2 \cdot 899$, $n \leq 41$. Итак, может быть не более 42 чисел. Аналогично возрастающая часть последовательности содержит не более 42 чисел и общий ответ — 84.

Ответ: а) да; б) нет; в) 84.