

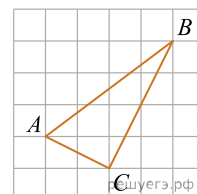
Вариант 239

№ 1.

Углы треугольника относятся как 2:3:4. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

№ 2.

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен треугольник ABC . Найдите скалярное произведение $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



№ 3.

Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.



№ 4.

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.

№ 5.

Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов—математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов—математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент $\mathcal{I}$. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку— 0,8, по иностранному языку— 0,7 и по обществознанию— 0,5.

Найдите вероятность того, что $\mathcal{I}$. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

№ 6.

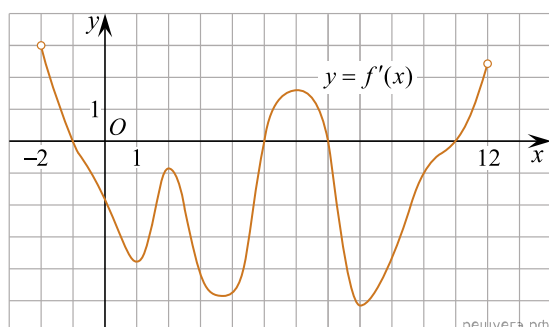
Найдите корень уравнения: $\frac{1}{4x-1} = 5$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}} \cdot \frac{16}{a^{-1}b^{-4}}$.

№ 8.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;12)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



№ 9.

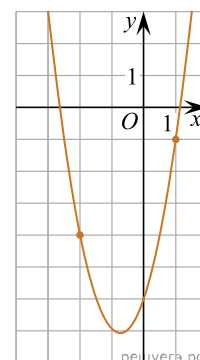
Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 2\text{В}$, частота $\omega = 120^\circ/\text{с}$, фаза $\varphi = -30^\circ$. Датчик настроен так, что если напряжение в нем не ниже чем 1В , загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

№ 10.

Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй— 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200кг , содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx - 6$. Найдите $f(-6)$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = 16 \tan x - 16x + 4\pi - 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

№ 14.

Основание $ABCD$ призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — трапеция с основаниями $AB = 2CD$.

а) Докажите, что плоскость $BA_1 D_1$ проходит через середину бокового ребра CC_1 .

б) Найдите угол между боковым ребром AA_1 и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция $ABCD$ прямоугольная с прямым углом при вершине B , а $BC = CD$ и $AA_1 = \sqrt{6}CD$.

№ 15.

Решите неравенство $4^{x-3} - 2^{x-3}(16 - x^2) - 16x^2 \geq 0$.

№ 16.

При налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $12000 - 2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе. Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог на 60% (до величины $1,6t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов?

№ 17.

Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и E и пересекает сторону CD в точках K и D .

а) Докажите, что $AE = AK$.

б) Найдите AD , если $CE = 10$, $DK = 9$ и $\cos \angle BAD = 0,2$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x + 3|y| + 5 = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет четыре решения?

№ 19.

Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1 b_1 + a_3 b_3 = 3a_2 b_2$?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1 b_1 + 2a_4 b_4 = 3a_3 b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение $a_3 b_3$, если $a_1 b_1 + 2a_4 b_4 \leq 300$?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27752	40
2	654451	5
3	27118	1.125
4	285928	0.36.
5	320199	0.408
6	77384	0.3
7	26801	0.25
8	27500	6
9	28000	50
10	99575	100
11	508927	48
12	26704	11

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

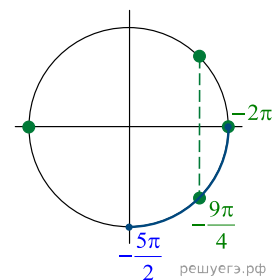
$$\sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{5x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \Leftrightarrow \sin \left(\frac{5x-3x}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \Leftrightarrow \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{5x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{5x-3x}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin x \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin x \left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin x \left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$



б) Отберем корни при помощи единичной окружности. найдём: $-\frac{9\pi}{4}$ и -2π .

Ответ: а) $\left\{ \pi k, \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{9\pi}{4}, -2\pi$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

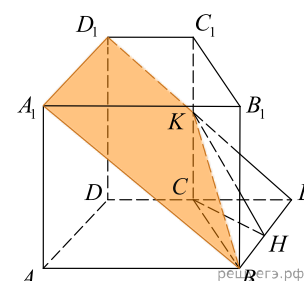
Решение. а) Пусть плоскость BA_1D_1 пересекает ребро CC_1 в точке K . Параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым, поэтому параллельные грани AA_1B_1B и CC_1D_1D сечение пересекает по параллельным прямым A_1B и D_1K .

Следовательно, углы BA_1B_1 и KD_1C_1 равны и треугольники B_1A_1B и C_1D_1K подобны и коэффициент подобия $k = \frac{1}{2}$, то есть $C_1K = \frac{1}{2}BB_1$ и K — середина CC_1 .

б) Пусть L — точка пересечения D_1K и CD , тогда BL — прямая пересечения плоскостей $ABCD$ и BA_1D_1 . Опустим из K и C перпендикуляры KH и CH на BL . Они попадут в одну точку по теореме о трех перпендикулярах. BL параллельно A_1D_1 и параллельно AD . Следовательно, $ABLD$ — параллелограмм. Тогда $CL = CD = BC$ и треугольник BCL — прямоугольный и равнобедренный и его высота равна $CH = \frac{CD}{\sqrt{2}}$, при этом $CK = \frac{\sqrt{6}}{2}CD$. Следовательно, $\operatorname{tg} \angle KHC = \sqrt{3}$.

Тогда $\angle KHC = 60^\circ$ и равен углу между плоскостью BA_1D_1 и плоскостью основания. AA_1 перпендикулярно $ABCD$, следовательно, угол между AA_1 и BA_1D_1 равен $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Ответ: б) 30° .



Приведём решение п. б) Ирины Шраго.

Решим задание координатно-векторным методом. Начало координат в точке C , ось Ox вдоль луча CB , ось Oy вдоль луча CL , ось Oz вдоль луча CC_1 . Уравнение плоскости (BA_1D_1) в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{2z}{a\sqrt{6}} = 1,$$

где $CB = CL = a$ и

$$CK = \frac{1}{2}CC_1 = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Таким образом, вектор нормали $\left\{\frac{1}{a}; \frac{1}{a}; \frac{2}{a\sqrt{6}}\right\}$, а вектор $AA_1\{0; 0; 1\}$, поскольку он сонаправлен с осью Oz . Синус искомого угла равен модулю косинуса угла между этими векторами, то есть

$$\sin x = \frac{\left(\frac{2}{a\sqrt{6}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{a^2} + \frac{4}{6a^2}\right)}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $x = 30^\circ$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Запишем исходное неравенство в виде

$$\begin{aligned} &4^{x-3} - 16 \cdot 2^{x-3} + 2^{x-3}x^2 - 16x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{x-3}(2^{x-3} + x^2) - 16(2^{x-3} + x^2) \geq 0 \Leftrightarrow (2^{x-3} + x^2)(2^{x-3} - 16) \geq 0 \Leftrightarrow 4^{x-3} - 16 \cdot 2^{x-3} + 2^{x-3}x^2 - 16x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{x-3}(2^{x-3} + x^2) - 16(2^{x-3} + x^2) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2^{x-3} + x^2)(2^{x-3} - 16) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{x-3} - 16 \geq 0 \Leftrightarrow x - 3 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 7. \end{aligned}$$

Ответ: $[7; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Сумма отличных от нуля налоговых сборов равна произведению величины налога за единицу продукции на количество произведенных единиц, то есть дается функцией $f(t) = (12000 - 2t)t$, где $0 < t < 6000$. Функция $f(t)$ — квадратичная с отрицательным старшим коэффициентом. На интервале $(0; 6000)$ она достигает наибольшего значения в точке максимума t_{max} . По условию $f(t_0) = f(1,6t_0)$, значит,

$$t_{max} = \frac{t_0 + 1,6t_0}{2} = 1,3t_0.$$

Составим пропорцию:

$$\text{налог } 1,6t_0 \quad - \quad 100\%$$

$$\text{налог } 1,3t_0 \quad - \quad x\%$$

откуда

$$x = \frac{1,3t_0 \cdot 100}{1,6t_0} = \frac{1300}{16} = 81,25.$$

Значит, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, государству следует уменьшить налог на $100\% - 81,25\% = 18,75\%$.

Ответ: 18,75.

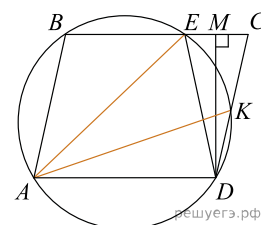
№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что $\angle ABE = \angle ABC = \angle ADC = \angle ADK$. Значит, хорды окружности AE и AK стягивают равные дуги. Поэтому эти хорды равны.

б) Поскольку прямые BC и AD параллельны, $\angle EAD = \angle AEB$, поэтому $DE = AB = DC$.

Пусть DM — медиана равнобедренного треугольника CDE . Тогда



$$CD = \frac{CM}{\cos \angle ECD} = \frac{CE}{2 \cos \angle BAD} = 25,$$

$$CK = CD - DK = 16.$$

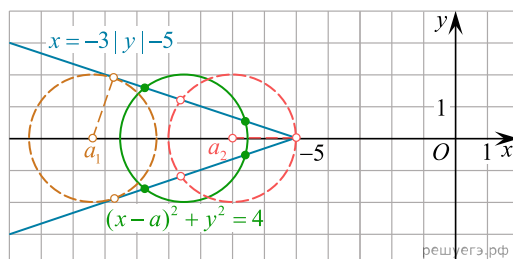
По свойству секущей $CK \cdot CD = CE \cdot CB$, откуда $AD = CB = \frac{CK \cdot CD}{CE} = 40$.

Ответ: б) 40.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Решим систему графически. В системе координат xOy графиком первого уравнения является ломаная— совокупность двух лучей, выходящих из точки $(-5; 0)$ с угловым коэффициентом $k = \pm \frac{1}{3}$ (см. рис., выделено синим). Графиком второго уравнения является семейство окружностей с центром в точке $(a; 0)$ и радиусом 2. В зависимости от значения параметра a окружность и ломаная могут не иметь общих точек или иметь одну, две (на рисунке выделено оранжевым), три (выделено красным) или четыре общие точки (на рисунке выделено зелёным).



Система имеет четыре решения при $a_1 < a < a_2$, где a_1 — абсцисса центра окружности, касающейся ломаной; a_2 — абсцисса центра окружности, проходящей через точку $(-5; 0)$ и имеющей с ломаной три общих точки. Очевидно, что $a_2 = -7$. Найдём a_1 , используя формулу расстояния от точки до прямой. Расстояние от точки $(a_1; 0)$ до прямой $x + 3y + 5 = 0$ должно равняться радиусу окружности:

$$\frac{|a_1 + 3 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = 2 \Leftrightarrow |a_1 + 5| = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow a_1 = -5 \pm 2\sqrt{10}.$$

По смыслу задачи, $a_1 < -5$, поэтому $a_1 = -5 - 2\sqrt{10}$.

Тем самым система имеет четыре решения при $-5 - 2\sqrt{10} < a < -7$.

Ответ: $(-5 - 2\sqrt{10}; -7)$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Подходящим примером являются прогрессии $1, 3, 5, \dots$ и $1, 4, 7, \dots$ соответственно. Для этих прогрессий имеем $a_1b_1 + a_3b_3 = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 36 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 3a_2b_2$.

б) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ соответственно. Тогда

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 = a_1b_1 + 2(a_1 + 3c)(b_1 + 3d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 18cd, \quad a_1b_1 + 2a_4b_4 = a_1b_1 + 2(a_1 + 3c)(b_1 + 3d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 18cd,$$

$$3a_3b_3 = 3(a_1 + 2c)(b_1 + 2d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 12cd$$

$$\text{и} \quad a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd.$$

Если $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$, то $cd = 0$. Пришли к противоречию, ведь по условию $c > 0$ и $d > 0$.

в) Как и ранее, обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ соответственно. Тогда по условию $c \geq 1$ и $d \geq 1$. По доказанному в пункте б) имеем $a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd$. Значит,

$$a_3b_3 = \frac{a_1b_1 + 2a_4b_4 - 6cd}{3} \leq \frac{300 - 6}{3} = 98.$$

Если прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ являются прогрессиями $5, 6, 7, 8, \dots$ и $12, 13, 14, 15, \dots$ соответственно, то

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 = 5 \cdot 12 + 2 \cdot 8 \cdot 15 = 300 \quad \text{и} \quad a_3b_3 = 7 \cdot 14 = 98.$$

Этот пример показывает, что наибольшее возможное значение произведения a_3b_3 равно 98.

Ответ: а) да, например $1, 3, 5, \dots$ и $1, 4, 7, \dots$ соответственно; б) нет; в) 98.