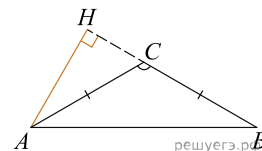


Вариант 24

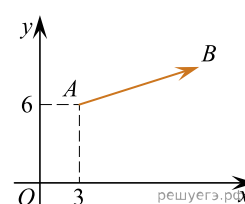
№ 1.

В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 24, $CH = 7$. Найдите $\cos ACB$.



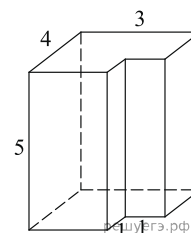
№ 2.

Вектор $\vec{AB}$ началом в точке $A(3;6)$ имеет координаты $(9;3)$. Найдите сумму координат точки B .



№ 3.

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



№ 4.

В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по теме «Ботаника». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Ботаника».

№ 5.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

№ 6.

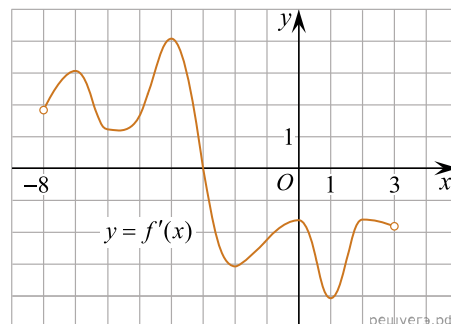
Решите уравнение $\log_2 \frac{x}{6} = \log_{0,5}(x+1)$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{50 \sin 19^\circ \cdot \cos 19^\circ}{\sin 38^\circ}$.

№ 8.

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



№ 9.

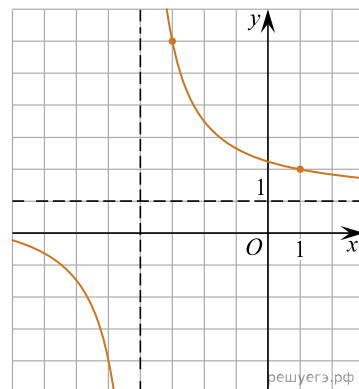
Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 6,4 километров?

№ 10.

Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx+a}{x+b}$. Найдите a .



№ 12.

Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 8x + 8)e^{6-x}$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $3 \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{4} = \frac{1 - \operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}$.
- б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие интервалу $\left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$.
-

№ 14.

Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб с тупым углом B , равным 120° . Все ребра этой призмы равны 10. Точки P и K — середины ребер CC_1 и CD соответственно.

- а) Докажите, что прямые PK и PB_1 взаимно перпендикулярны.
- б) Найдите угол между плоскостями PKB_1 и $C_1 B_1 B$.
-

№ 15.

Решите неравенство: $2 \log_7(x\sqrt{2}) - \log_7\left(\frac{x}{1-x}\right) \leq \log_7\left(8x^2 + \frac{1}{x} - 5\right)$.

№ 16.

Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может определить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

№ 17.

Дана окружность с диаметром AB . Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую окружность в точках C и D , а диаметр AB в точке E . На дуге CE , не содержащей точки D , взята точка M , отличная от точек C и E . Луч BM пересекает первую окружность в точке N , а вторую в точке M_1 .

- а) Докажите, что точка N — середина отрезка MM_1 .
- б) Найдите длину отрезка MN , если известно, что $CN = 6$, $DN = 13,5$.
-

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - 2x + 12) \cdot \sqrt{y - 2x + 12} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

№ 19.

Сергей, Аня и Дима играют в числа. Сергей и Аня записывают в блокноте по двузначному натуральному числу, а Дима находит произведение этих чисел.

а) Может ли у Димы в результате перемножения чисел Ани и Сергея получиться трёхзначное число, записанное одинаковыми цифрами и кратное 4?

б) Может ли у Димы получиться в результате четырёхзначное число, записанное одинаковыми цифрами?

в) Сколько всего различных неупорядоченных пар двузначных чисел могут подобрать Сергей и Аня, чтобы у Димы получилось число, записанное одинаковыми цифрами?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27352	-0,28
2	27726	21
3	25581	92
4	285926	0,2
5	508887	0,8
6	639943	2
7	510312	25
8	27491	-3
9	27985	1,4
10	26585	3
11	509001	9
12	26732	2

№ 13.

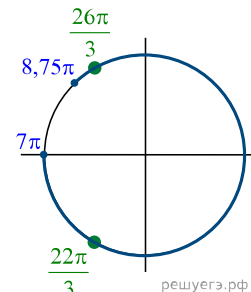
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Упростим правую часть уравнения:

$$\frac{1 - \sin^2\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)}{\sin 2x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin 2x} = \frac{\sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{2 \cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

сокращать на $\sin x$ можно при условии $\sin x \neq 0$. Далее получаем:

$$\begin{aligned} \sin(3\pi - x) - \operatorname{tg}(\pi - x) &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \sin x + \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \Leftrightarrow 2 \sin x = -\operatorname{tg} x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin x &= -\frac{\sin x}{\cos x \sin x \neq 0} \Leftrightarrow 2 = -\frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ \sin(3\pi - x) - \operatorname{tg}(\pi - x) &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \sin x + \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin x &= -\operatorname{tg} x \Leftrightarrow 2 \sin x = -\frac{\sin x}{\cos x \sin x \neq 0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 &= -\frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \sin(3\pi - x) - \operatorname{tg}(\pi - x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin x + \operatorname{tg} x &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \Leftrightarrow 2 \sin x = -\operatorname{tg} x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin x &= -\frac{\sin x}{\cos x \sin x \neq 0} \Leftrightarrow 2 = -\frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos x &= -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



б) Отберём корни при помощи тригонометрической окружности. Подходят $\frac{22\pi}{3}, \frac{26\pi}{3}$.

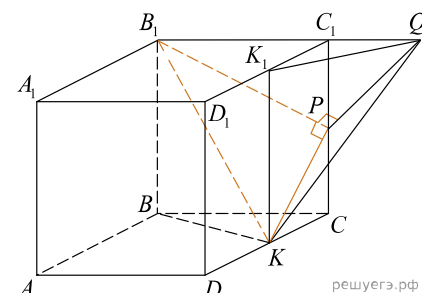
Ответ: а) $\left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{22\pi}{3}, \frac{26\pi}{3}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Вычислим стороны треугольника B_1PK :

$$\begin{aligned} B_1P &= \sqrt{B_1C_1^2 + C_1P^2} = 5\sqrt{5}, & PK &= \sqrt{CK^2 + CP^2} = 5\sqrt{2}, & \angle BCK &= 60^\circ, \\ B_1P &= \sqrt{B_1C_1^2 + C_1P^2} = 5\sqrt{5}, \\ PK &= \sqrt{CK^2 + CP^2} = 5\sqrt{2}, & \angle BCK &= 60^\circ, \\ BK &= BC \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}, & B_1K &= \sqrt{BK^2 + BB_1^2} = 5\sqrt{7}, \\ B_1P^2 + PK^2 &= (5\sqrt{5})^2 + (5\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{7})^2 = B_1K^2. \end{aligned}$$



Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник B_1PK — прямоугольный, а значит, прямые PK и PB_1 взаимно перпендикулярны.

б) Заметим, что B_1P — линия пересечения плоскостей PKB_1 и C_1B_1B . Из п. а), прямые PK и PB_1 перпендикулярны, в плоскости C_1B_1B из точки P восстановим перпендикуляр к прямой B_1P , пусть он пересекает B_1C_1 в точке Q . Тогда KPQ — линейный угол одного из двугранных углов, образованных пересечением плоскостей PKB и C_1B_1B . Найдём его. Треугольники B_1PC , PC_1Q и B_1PQ — подобны, следовательно,

$$\frac{PQ}{B_1P} = \frac{C_1Q}{C_1P} = \frac{1}{2}, \quad PQ = \frac{1}{2}B_1P = \frac{5}{2}\sqrt{5}, \quad C_1Q = \frac{1}{2}C_1P = \frac{5}{2}, \quad \frac{PQ}{B_1P} = \frac{C_1Q}{C_1P} = \frac{1}{2}, \quad PQ = \frac{1}{2}B_1P = \frac{5}{2}\sqrt{5},$$

$$C_1Q = \frac{1}{2}C_1P = \frac{5}{2},$$

$$K_1Q^2 = K_1C^2 + C_1Q^2 - 2K_1C \cdot C_1Q \cos 120^\circ = \frac{175}{4},$$

$$KQ^2 = KK_1^2 + K_1Q^2 = \frac{575}{4}.$$

Тогда получаем:

$$KQ^2 = KP^2 + PQ^2 - 2KP \cdot PQ \cos \angle KPQ \Leftrightarrow \frac{575}{4} = 50 + \frac{125}{4} - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2} \cos \angle KPQ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{250}{4} = -25\sqrt{10} \cdot \cos \angle KPQ \Leftrightarrow \cos \angle KPQ = -\frac{\sqrt{10}}{4}. \quad KQ^2 = KP^2 + PQ^2 - 2KP \cdot PQ \cos \angle KPQ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{575}{4} = 50 + \frac{125}{4} - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2} \cos \angle KPQ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{250}{4} = -25\sqrt{10} \cdot \cos \angle KPQ \Leftrightarrow \cos \angle KPQ = -\frac{\sqrt{10}}{4}. \quad KQ^2 = KP^2 + PQ^2 - 2KP \cdot PQ \cos \angle KPQ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{575}{4} = 50 + \frac{125}{4} - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2} \cos \angle KPQ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{250}{4} = -25\sqrt{10} \cdot \cos \angle KPQ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle KPQ = -\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Следовательно, угол между плоскостями PKB_1 и C_1B_1B равен $\arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Ответ: б) $\arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеет- ся верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Решим неравенство, перейдя к равносильной системе:

$$\begin{cases} x\sqrt{2} > 0, \\ \frac{x}{1-x} > 0, \\ \frac{2x^2(1-x)}{x} \leq 8x^2 + \frac{1}{x} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{2x^2 - 2x^3 - 8x^3 - 1 + 5x}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{10x^3 - 2x^2 - 5x + 1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\sqrt{2} > 0, \\ \frac{x}{1-x} > 0, \\ \frac{2x^2(1-x)}{x} \leq 8x^2 + \frac{1}{x} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{2x^2 - 2x^3 - 8x^3 - 1 + 5x}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{10x^3 - 2x^2 - 5x + 1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{2} > 0, \\ \frac{x}{1-x} > 0, \\ \frac{2x^2(1-x)}{x} \leq 8x^2 + \frac{1}{x} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{2x^2 - 2x^3 - 8x^3 - 1 + 5x}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{10x^3 - 2x^2 - 5x + 1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \frac{(5x-1)(2x^2-1)}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 1, \\ \begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0 < x \leq \frac{1}{5}, \\ x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{5}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Условий существования логарифмов в левой части неравенства достаточно для соблюдения ОДЗ ввиду знака неравенства.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>

Решение. Пусть в отеле будет x номеров площадью 30 кв. м и y номеров площадью 40 кв.м. Тогда $30x + 40y \leq 940$ или $3x + 4y \leq 94$ (*). Прибыль, которую будут приносить эти номера, равна $4000x + 5000y$ или $1000(4x + 5y)$. Прибыль будет наибольшей при наибольшем значении суммы $4x + 5y$. Пусть $s = 4x + 5y$, тогда $x = 0,25(s - 5y)$, откуда, подставляя в (*), получаем:

$$0,75(s - 5y) + 4y \leq 94 \Leftrightarrow 3s \leq 376 - y.$$

В случае точного равенства $3s = 376 - y$ наибольшему значению суммы s соответствовало бы наименьшее значение величины y . В случае строгого неравенства необходимо найти наименьшее возможное значение y и проверить большие значения, уменьшающие количество пустого пространства.

Наименьшее возможное значение y равно 0. Поскольку $940 = 30 \cdot 31 + 10$, в гостинице можно открыть 31 стандартный номер и не открывать номера люкс. В этом случае номера будут приносить предпринимателю доход $4000 \cdot 31 = 124\,000$ руб. в сутки, и при этом останется 10 кв.м незанятого пространства. Уменьшим на 1 количество стандартных номеров. Если в гостинице 30 стандартных номеров и 1 люкс, незанятого пространства не остается: $940 = 30 \cdot 30 + 40$. В этом случае доход будет равен $4000 \cdot 30 + 5000 = 125\,000$ руб. Дальнейшее уменьшение количества стандартных номеров в пользу люксов приведет к уменьшению прибыли.

Ответ: 125 000 руб.

Приведем другое решение.

Найдем доходность на единицу занимаемой площади. Для номера «люкс» она составляет $\frac{5000}{40} = 125$ руб./кв.м. Для обычного номера доходность равна $\frac{4000}{30} > 133$ руб./кв.м. Таким образом, обычный номер приносит больший доход с квадратного метра площади, поэтому размещать обычные номера выгоднее, чем номера «люкс».

На площади 940 кв.м можно разместить 31 обычный номер, при этом доход составит $31 \cdot 4000 = 124000$ руб., и останется 10 кв. м свободной площади.

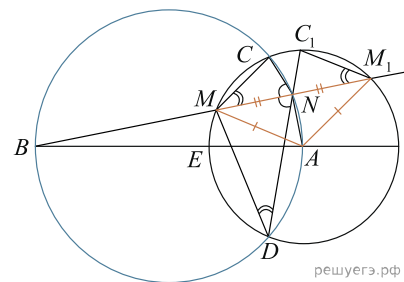
Будем уменьшать количество остающейся свободной площади, размещая номера «люкс» и уменьшая количество обычных номеров. Для одного номера «люкс» и 30 обычных занимаемая площадь 940 кв.м., доход 125000 руб. Для двух номеров «люкс» и 28 обычных занимаемая площадь 920 кв.м, доход 122000 руб. Размещать три и более номера «люкс» нет смысла, поскольку на той площади (120 кв.м), где могут разместиться три номера «люкс», приносящие доход $3 \cdot 5000 = 15000$ руб., можно разместить четыре обычных номера с доходом $4 \cdot 4000 = 16000$ руб.

Таким образом, максимальный доход будет получен при размещении 30 обычного номера и 1 номера «люкс», которые займут всю доступную площадь 940 кв. м. Этот максимальный доход составляет 125 000 руб. в сутки.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б.	3
Получен обоснованный ответ в пункте б. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а. ИЛИ При обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте б и использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что угол $\angle ANB$ прямой, так как опирается на диаметр AB первой окружности. Следовательно, отрезок AN — высота треугольника AMM_1 . При этом $AM = AM_1$, треугольник равнобедренный, следовательно, отрезок AN является также медианой этого треугольника, а значит, $MN = NM_1$. Что требовалось доказать.



б) Заметим, что дуги CB и BD равны, значит, $\angle BNC = \angle BND$. Пусть DN пересекает вторую окружность в точке C_1 . Из симметрии заключаем, что $\angle MNC = \angle M_1NC_1$, следовательно, $\angle CMN = \angle C_1M_1N = \angle C_1DM_1$ (последнее равенство вытекает из свойств вписанных углов). Тогда треугольники CMN и MDN подобны, значит, $\frac{CN}{MN} = \frac{MN}{DN}$, то есть $MN^2 = CN \cdot DN = 81$, откуда $MN = 9$.

Ответ: б) 9.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4

С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Решим задачу графоаналитическим способом. В системе координат xOy построим график первого уравнения исходной системы. Для этого преобразуем уравнение:

$$(xy - 2x + 12) \cdot \sqrt{y - 2x + 12} = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 2x + 12 = 0, \\ y - 2x + 12 \geq 0, \\ y - 2x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{12}{x} + 2, \\ y \geq 2x - 12, \\ y = 2x - 12. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения исходной системы является объединение прямой $y = 2x - 12$ и части гиперболы $y = -\frac{12}{x} + 2$, лежащей не ниже этой прямой (выделено синим). Найдём точки пересечения прямой и гиперболы:

$$\begin{cases} y = -\frac{12}{x} + 2, \\ y = 2x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{12}{x} + 2 = 2x - 12, \\ y = 2x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0, \\ y = 2x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -10, \\ x = 6, \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким образом, прямая и гипербола пересекаются в точках $A(1; -10)$ и $B(6; 0)$.

Графиком уравнения $y = 3x + a$ является семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом 3, пересекающих ось ординат в точке $(0; a)$. Количество решений системы равно числу общих точек графиков уравнений исходной системы.

Найдём граничные положения прямой $y = 3x + a$. Прямая $y = 3x + a$ проходит через точку $B(6; 0)$ (выделено пурпурным) при

$$0 = 3 \cdot 6 + a \Leftrightarrow a = -18.$$

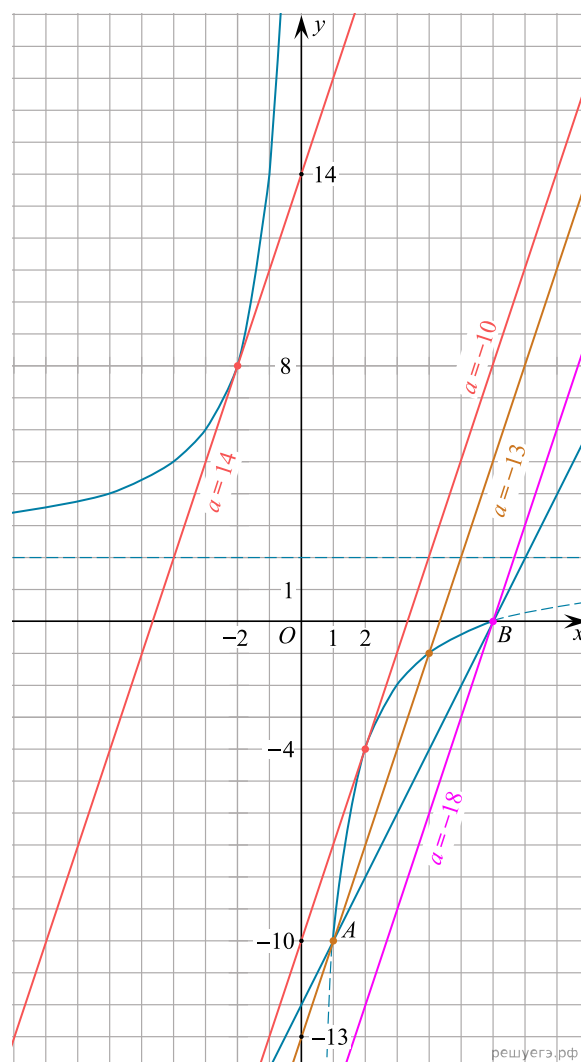
Прямая $y = 3x + a$ проходит через точку $A(1; -10)$ (выделено оранжевым) при

$$-10 = 3 \cdot 1 + a \Leftrightarrow a = -13.$$

Прямая $y = 3x + a$ касается гиперболы $y = -\frac{12}{x} + 2$ (выделено красным) при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} \left(-\frac{12}{x} + 2\right)' = 3, \\ y = -\frac{12}{x} + 2, \\ y = 3x + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 2 \\ y = -\frac{12}{x} + 2, \\ y = 3x + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 8, \\ a = 14, \\ x = 2, \\ y = -4, \\ a = -10. \end{cases}$$

Таким образом, при $a = 14$ прямая $y = 3x + a$ касается гиперболы $y = -\frac{12}{x} + 2$ в точке $(-2; 8)$, при $a = -10$ — в точке $(2; -4)$. Анализируя графики получаем, что исходная система:
— при $a \leq -18$ имеет одно решение;



- при $-18 < a \leq -13$ — **два решения**;
- при $-13 < a < -10$ — **три решения**;
- при $a = -10$ — **два решения**;
- при $-10 < a < 14$ — **одно решение**;
- при $a = 14$ — **два решения**;
- при $a > 14$ — **три решения**.

Ответ: $(-18; -13] \cup \{-10, 14\}$.

Приведем аналитический способ решения.

Подставим второе уравнение системы $y = 3x + a$ в первое уравнение. Получим $(3x^2 + ax - 2x + 12)\sqrt{x + a + 12} = 0$. Заметим, что одним из корней полученного уравнения, будет $x = -a - 12$. Далее возможны три варианта, в которых уравнение $3x^2 + (a - 2)x + 12 = 0$ даст ровно один корень.

1. Уравнение $3x^2 + (a - 2)x + 12 = 0$ имеет единственный корень, причем выражение под корнем $x + a + 12$ положительно. Тогда дискриминант равен нулю, откуда

$$(a - 2)^2 - 12^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2 = \pm 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14, \\ a = -10. \end{cases}$$

Единственный корень при этом равен $\frac{2-a}{6}$, то есть -2 или 2 соответственно. И в том и в другом случае выражение $x + a + 12$ получается положительным.

2. Уравнение $3x^2 + (a - 2)x + 12 = 0$ имеет два корня, но один из них равен $-a - 12$, а для второго выражение $x + a + 12$ положительно. Подставляя, получим

$$\begin{aligned} 3(-a - 12)^2 + (a - 2)(-a - 12) + 12 &= 0 \Leftrightarrow 3a^2 + 72a + 432 - a^2 + 2a - 12a + 24 + 12 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 62a + 468 &= 0 \Leftrightarrow a^2 + 31a + 234 = 0 \Leftrightarrow (a + 13)(a + 18) = 0. 3(-a - 12)^2 + (a - 2)(-a - 12) + 12 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3a^2 + 72a + 432 - a^2 + 2a - 12a + 24 + 12 &= 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 62a + 468 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + 31a + 234 &= 0 \Leftrightarrow (a + 13)(a + 18) = 0. 3(-a - 12)^2 + (a - 2)(-a - 12) + 12 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3a^2 + 72a + 432 - a^2 + 2a - 12a + 24 + 12 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 62a + 468 &= 0 \Leftrightarrow a^2 + 31a + 234 = 0 \Leftrightarrow (a + 13)(a + 18) = 0. 3(-a - 12)^2 + (a - 2)(-a - 12) + 12 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3a^2 + 72a + 432 - a^2 + 2a - 12a + 24 + 12 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 62a + 468 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + 31a + 234 &= 0 \Leftrightarrow (a + 13)(a + 18) = 0. \end{aligned}$$

При $a = -13$ получаем уравнение $3x^2 - 15x + 12 = 0$ с корнями $1 = -a - 12$ и 4 ($4 - 13 + 12 > 0$) — этот вариант подходит. При $a = -18$ получаем уравнение $3x^2 - 20x + 12 = 0$ с корнями $6 = -a - 12$ и $\frac{2}{3}$ ($\frac{2}{3} - 18 + 12 < 0$) — этот вариант не подходит.

3. Уравнение $3x^2 + (a - 2)x + 12 = 0$ имеет два корня, для одного из них выражение $x + a + 12$ положительно, а для другого отрицательно, то есть $x = -a - 12$ лежит между корнями этого уравнения. То есть значение функции $3x^2 + (a - 2)x + 12$ в точке $x = -a - 12$ отрицательно. Оно уже вычислено в предыдущем пункте и мы получаем $2(a + 13)(a + 18) < 0$, откуда $a \in (-18; -13)$.

Окончательный ответ: $a \in (-18; -13] \cup \{-10, 14\}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да, например, $12 \cdot 37 = 444$.

б) Заметим, что четырехзначное число, записанное только цифрами x , равно $x \cdot 1111 = x \cdot 11 \cdot 101$ и потому кратно про-

стому числу 101. Но ни одно двузначное число не может быть кратно 101.

в) Произведение двух двузначных чисел не меньше $10 \cdot 10 = 100$ и не больше $99 \cdot 99 < 100 \cdot 100 = 10\,000$, а кроме того (по пункту б), не четырехзначное. Значит, оно трехзначное. Если оно состоит из цифр x , то оно равно $x \cdot 111 = x \cdot 3 \cdot 37$, поэтому один из множителей кратен 37. Значит, он равен 37 или 74.

Если это 37, то второй множитель равен $3x$, что будет двузначным при $x = 4, 5, \dots, 9$. Итого 6 вариантов. Если это 74, то второй множитель равен $\frac{3x}{2}$, что будет целым только при четных x , причем даже при $x=6$ получается только 9. Значит, двузначным оно будет только при $x = 8$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 7.
