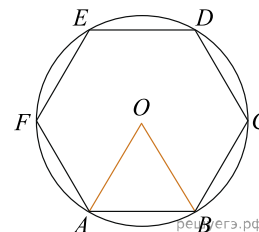


Вариант 240

№ 1.

Периметр правильного шестиугольника равен 72. Найдите диаметр описанной окружности.

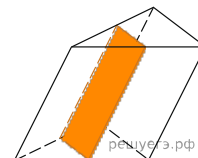


№ 2.

Даны векторы $\vec{a}(3; 4)$ и $\vec{b}(-4; -3)$. Найдите косинус угла между ними.

№ 3.

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем этой призмы, если объем отсеченной треугольной призмы равен 7.



№ 4.

Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

№ 5.

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

№ 6.

Найдите корень уравнения $\log_2(15+x) = \log_2 3$.

№ 7.

Найдите значение выражения: $\frac{32 \cos 26^\circ}{\sin 64^\circ}$.

№ 8.

Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

№ 9.

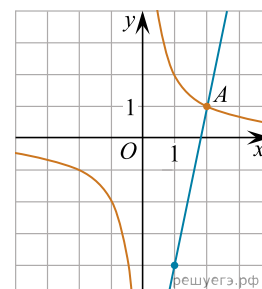
Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров?

№ 10.

Бере надо подписать 640 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вера подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за четвертый день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 1$ на отрезке $[1; 9]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x = \sqrt{6}\sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

№ 14.

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC$ и $AC = 16$. На ребре BB_1 выбрана точка F так, что $BF : B_1F = 3 : 5$. Угол между плоскостями AA_1C и AFC равен 45° .

а) Докажите, что расстояние между прямыми AB и A_1C_1 равно боковому ребру призмы.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и A_1C_1 , если $FC = 10$.

№ 15.

Решите неравенство: $\left|\log_x \frac{x}{4}\right| \cdot \log_{4x}(2x^2) \leq \left|\log_x \frac{x}{4}\right|$.

№ 16.

У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 500 ц/га.

Фермер может продать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 8000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

№ 17.

Две окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом. Из точки O_1 проведена касательная O_1K ко второй окружности (K — точка касания), а из точки O_2 проведена касательная O_2L к первой окружности (L — точка касания), точки K и L лежат по разные стороны от прямой O_1O_2 .

а) Докажите, что $\angle O_1KL = \angle O_1O_2L$.

б) Найдите радиус меньшей окружности, если дополнительно известно, что он в 4 раза меньше радиуса большей окружности, а площадь четырехугольника O_1KO_2L равна $54 + 9\sqrt{6}$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{a^2 - 3x^2 + 2ax + 2a + 8x + 1}{(\sqrt{2x+1})^2} = \log_p p,$$

где $p = \frac{5}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{a^2}{6}$, имеет ровно один корень.

№ 19.

На доске написано несколько различных натуральных чисел. Известно, что для любых двух различных чисел a и b из этого набора их сумма $a+b$ делится на модуль их разности $|a-b|$. Пусть S — сумма всех написанных на доске чисел.

а) Может ли на доске быть ровно 3 числа?

б) Может ли на доске быть ровно 100 чисел?

в) Найдите наименьшее значение S , если на доске написано 4 числа.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27929	24
2	649915	-0.96
3	541817	28
4	320195	0.006
5	319353	0.019
6	26649	-12
7	504410	32
8	27485	0.5
9	500252	2.4
10	99585	22
11	509167	-0.2
12	77466	10

№ 13.

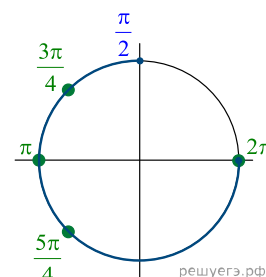
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow -\sin 2x - \sqrt{2}\sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \Leftrightarrow \sin x(2\cos x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$. Получим числа: $\pi, 2\pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

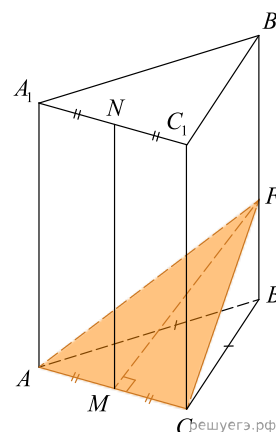
Ответ: а) $\left\{\pi k; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\pi, 2\pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, каждая из которых содержит одну из скрещивающихся прямых и параллельна другой. Для прямых AB и A_1C_1 такими плоскостями являются основания призмы. Расстояние между ними равно высоте призмы, то есть боковому ребру, так как призма прямая.

б) Из п. а) следует, что искомое расстояние равно боковому ребру BB_1 . В треугольнике ABC проведем медиану, биссектрису и высоту BM , где точка M — середина стороны AC и отрезки BM и AC перпендикулярны. Пусть отрезок MM_1 — средняя линия прямоугольника ACC_1A_1 , следовательно, отрезок MM_1 перпендикулярен основанию AC . Кроме этого, по теореме о трех перпендикулярах отрезки FM и AC перпендикулярны. Тогда угол FMM_1 является линейным углом двугранного угла $FACA_1$ и равен 45° , угол BMM_1 является линейным углом двугранного угла $BACA_1$ и равен 90° , следовательно, $\angle BMF = \angle BFM = 45^\circ$ и $BM = BF$.



Тогда $CM = \frac{AC}{2} = 8$, значит,

$$FM^2 = FC^2 - CM^2 = 36, \quad BM^2 + FB^2 = 2FB^2 = FM^2 = 36,$$

откуда $FB = 3\sqrt{2}$. Далее,

$$\frac{BB_1}{FB} = \frac{FB_1 + FB}{FB} = \frac{8}{3},$$

следовательно, $BB_1 = \frac{8}{3}FB = 8\sqrt{2}$.

Ответ: $8\sqrt{2}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Областью определения неравенства являются положительные числа, отличные от 0,25 и 1. Выражение $\left|\log_x \frac{x}{4}\right|$ либо равно нулю при $x=4$, при этом неравенство верно; либо положительно, и тогда на него можно разделить, не меняя знака неравенства. Имеем:

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0,25, \\ (4x-1)(2x^2-4x) \leq 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0,25, \\ (4x-1)(x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x \leq 2. \log_{4x}(2x^2) \leq 1 \Leftrightarrow \log_{4x}(2x^2) \leq \log_{4x} 4x \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0,25, \\ (4x-1)(2x^2-4x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0,25, \\ (4x-1)(x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x \leq 2.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $x \neq 1$, получаем ответ: $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 2] \cup \{4\}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 2] \cup \{4\}$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Продавать свеклу более выгодно, поэтому второе поле, где ее урожайность выше, следует засеять только свеклой. Она принесет доход $10 \text{ га} \cdot 500 \text{ ц/га} \cdot 8000 \text{ руб./ц} = 40 \text{ млн руб.}$

На первом поле урожайность свеклы составляет $300/500=0,6$ урожайности картофеля, а стоимость свеклы $8000/5000=1,6$ стоимости картофеля. Произведение этих показателей меньше 1, поэтому выращивать свеклу невыгодно: потери от меньшей урожайности не компенсируются более высокой выручкой. Следовательно, все поле следует засадить картофелем, он принесет доход $10 \text{ га} \cdot 500 \text{ ц/га} \cdot 5000 \text{ руб./ц} = 25 \text{ млн руб.}$

Тем самым, наибольший возможный доход фермера равен 65 млн руб.

Ответ: 65 млн руб.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что $\angle O_1KO_2 = \angle O_1LO_2 = 90^\circ$. Тогда четырехугольник O_1KO_2L вписан в окружность. Значит, углы O_1KL и O_1O_2L равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу.

б) Пусть точка O_1 — центр большей окружности, P — точка касания окружностей. Тогда $O_1P = 4x$ и $PO_2 = x$. Следовательно,

$$O_1K = \sqrt{25x^2 - x^2} = 2\sqrt{6}x,$$

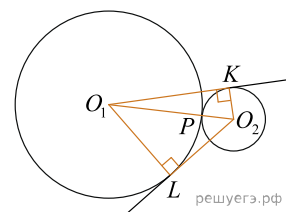
$$O_2L = \sqrt{25x^2 - 16x^2} = 3x.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_{O_1KO_2L} &= \frac{1}{2}(O_1L \cdot LO_2 + O_1K \cdot KO_2) = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{6}x \cdot x + 3x \cdot 4x) = x^2(6 + \sqrt{6}). \quad S_{O_1KO_2L} = \frac{1}{2}(O_1L \cdot LO_2 + O_1K \cdot KO_2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{6}x \cdot x + 3x \cdot 4x) = x^2(6 + \sqrt{6}). \end{aligned}$$

По условию $x^2(6 + \sqrt{6}) = 54 + 9\sqrt{6}$, откуда $x^2 = 9$, то есть $x = 3$.

Ответ: б) 3.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. При положительных и отличных от единицы значениях p правая часть уравнения равна 1. Поэтому уравнение равносильно системам:

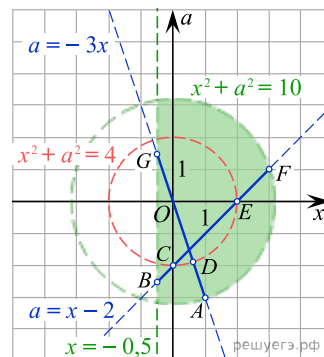
$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \frac{a^2 - 3x^2 + 2ax + 2a + 8x + 1}{(\sqrt{2x+1})^2} = 1, \\ \frac{5}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{a^2}{6} > 0, \\ \frac{5}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{a^2}{6} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3x^2 + 2ax + 2a + 8x + 1 = 2x + 1, \\ 2x + 1 > 0, \\ x^2 + a^2 < 10, \\ x^2 + a^2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 - 3x^2 + 2ax + 2a + 8x + 1}{(\sqrt{2x+1})^2} = 1, \\ \frac{5}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{a^2}{6} > 0, \\ \frac{5}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{a^2}{6} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3x^2 + 2ax + 2a + 8x + 1 = 2x + 1, \\ 2x + 1 > 0, \\ x^2 + a^2 < 10, \\ x^2 + a^2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2(a+3)x - a^2 - 2a = 0, \\ 2x + 1 > 0, \\ x^2 + a^2 < 10, \\ x^2 + a^2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = x - 2, \\ a = -3x, \end{cases} \\ x > -0,5, \\ x^2 + a^2 < 10, \\ x^2 + a^2 \neq 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Изобразим решение полученной системы в системе координат xOa . Решением являются отрезки прямых $a = x - 2$ и $a = -3x$ (выделены синим), расположенные внутри окружности $x^2 + a^2 = 10$, справа от прямой $x = -0,5$ (выделено зелёным), за исключением точек, принадлежащих окружности $x^2 + a^2 = 4$ (выделено красным).

Найдём координаты точек A, B, C, D, E, F, G и координату точки пересечения прямых $a = x - 2$ и $a = -3x$. Получаем: $A(1; -3)$, $B(-0,5; -2,5)$, $C(0; -2)$, $D(\sqrt{0,4}; -3\sqrt{0,4})$, $E(2; 0)$, $F(3; 1)$, $G(-0,5; 1,5)$. Прямые $a = x - 2$ и $a = -3x$ пересекаются в точке с координатами $(0,5; -1,5)$.

По графику определяем, что система имеет единственный корень при $-3 < a \leq -2,5$, $a = -2$, $a = -3\sqrt{0,4}$, $a = -1,5$, $a = 0$ и $1 \leq a < 1,5$.

(Заметим дополнительно, что при $a \leq -3$ и при $a \geq 1,5$ система решений не имеет, в остальных случаях система имеет два решения.)



Ответ: $(-3; -2,5] \cup \{-2; -3\sqrt{0,4}; -1,5; 0\} \cup [1; 1,5)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Да. Например, на доске могут быть числа 1, 2, 3.

б) Докажем методом математической индукции, что существует набор чисел, в котором НОД любых двух чисел равен их разности. В таком наборе сумма любых двух чисел делится на их разность, поскольку каждое из слагаемых делится на нее. В качестве базы индукции подойдет набор из чисел 2 и 3.

Допустим, такой набор чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ построен, причем $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Пусть $A = 2\text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, тогда рассмотрим набор $A - a_n, A - a_{n-1}, \dots, A - a_1, A$. Докажем, что он подходит. Для такого набора верно $A - a_n \geq 2a_n - a_n > 0$. В самом деле, для любого i

$$\text{НОК}(A; A - a_j) = \text{НОК}(A; a_j) = a_j = A - (A - a_j)$$

и для любых $i > j$

$$\text{НОК}(A - a_i; A - a_j) = \text{НОК}(A - a_i; a_i - a_j) = a_i - a_j,$$

поскольку $A - a_i$ кратно a_i , а потому и $a_i - a_j$.

в) Набор чисел 2, 3, 4, 6 удовлетворяет всем условиям. Сумма этих чисел равна 15. Докажем, что она наименьшая.

Пусть в наборе есть число 1, тогда для любого другого числа a из набора получаем, что $a+1$ кратно $a-1$. В таком случае и $(a+1)-(a-1)=2$ кратно $a-1$, откуда $a-1=1$ или $a-1=2$. Следовательно, в таком наборе может быть не более трех чисел.

Пусть в наборе есть число 2, тогда для любого другого числа a из набора получаем, что $a+2$ кратно $a-2$. В таком случае и $(a+2)-(a-2)=4$ кратно $a-2$, откуда либо $a-2=1$, либо $a-2=2$, либо $a-2=4$. Следовательно, в таком наборе будут числа 3, 4, 6. Этот набор удовлетворяет всем условиям.

Если же в наборе нет ни единицы, ни двойки, то сумма чисел в нем не меньше $3+4+5+6=18 > 15$.

Ответ: а) да; б) да; в) 15.