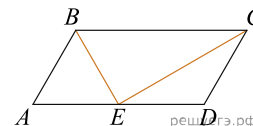


Вариант 1

ID: 13812

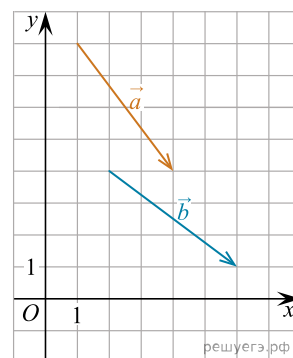
№ 1.

Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.



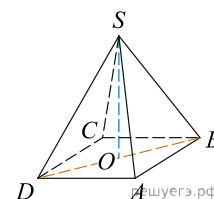
№ 2.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите косинус угла между ними.



№ 3.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 12$, $BD = 18$. Найдите боковое ребро SA .



№ 4.

На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

№ 5.

По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

№ 6.

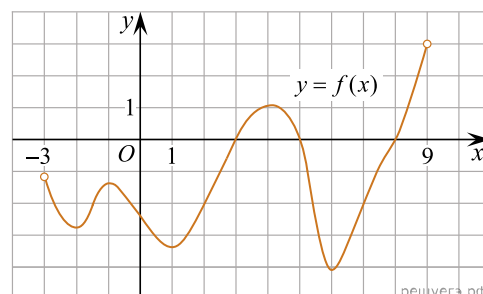
Найдите корень уравнения $\log_5(5-x) = 2\log_5 3$.

№ 7.

Найдите значение выражения $(5axy - (-3xya)) : (4yax)$.

№ 8.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



№ 9.

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель — целое число от -2 до 2 .

Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{5In + Op + 3Tr + Q}{A}$.

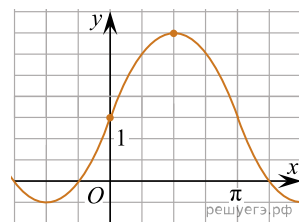
Если по всем четырем показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

№ 10.

Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 16 рабочих, а во второй— 25 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 8 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите b .



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = 3 \operatorname{tg} x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $4 \cos^2 x + 2(\sqrt{2} - 1) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{2} = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.
-

№ 14.

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 8. Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5.

- а) Докажите, что сечение шара плоскостью α есть круг.
б) Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .
-

№ 15.

Решите неравенство $\frac{x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 3} + \frac{x^2 - 5x + 24}{x^2 - 5x} \leq 0$.

№ 16.

Алексей приобрёл ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

№ 17.

В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A на основании AD отмечена точка M , а на стороне CD точка N так, что $AM = DN$ и $\angle BMN = \angle MND = 90^\circ$.

- Докажите, что прямые BD и CM перпендикулярны.
 - Найдите площадь трапеции $ABCD$, если площадь треугольника ABM равна 6, а точка N — середина CD .
-

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\sin^4 x + \cos^4 x > a \cdot \sin x \cdot \cos x$$

выполнено при любом значении x .

№ 19.

На доске написаны цифры 111111222222 (шесть 1 и шесть 2). Марина составила из этих двенадцати цифр 5 попарно различных натуральных чисел, каждое из которых не кратно 3.

- Может ли среди составленных Мариной чисел быть ровно два четырехзначных?
- Может ли быть среди составленных Мариной чисел быть хотя бы одно шестизначное?
- Пусть K — наибольшее из составленных Мариной чисел. Найдите наибольшее значение, которое может принимать K .

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27827	10
2	649917	0,96
3	915	15
4	320178	0,5
5	320202	0,02
6	26659	-4
7	512394	2
8	119971	5
9	319860	10
10	323854	16
11	509295	1,5
12	26702	5

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}
 2 \sin 4\pi x \cos 4\pi x + 1 &= \cos 4\pi x + \sqrt{2}(\cos 4\pi x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 4\pi x \sin \frac{\pi}{4}) \\
 2 \sin 4\pi x \cos 4\pi x + 1 - 2 \cos 4\pi x - \sin 4\pi x &= 0 \\
 2 \cos 4\pi x (\sin 4\pi x - 1) - (\sin 4\pi x - 1) &= 0 \\
 (2 \cos 4\pi x - 1)(\sin 4\pi x - 1) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos 4\pi x = 1 \\ \sin 4\pi x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\pi x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 4\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{12} + \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{1}{8} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

б) Ограничим каждое полученное решение из пункта «а» и решим эти неравенства:

1)

$$2 - \sqrt{7} \leq \frac{1}{12} + \frac{n}{2} \leq \sqrt{7} - 2$$

$$\frac{23}{12} - \sqrt{7} \leq \frac{n}{2} \leq \sqrt{7} - \frac{25}{12}$$

$$\frac{23}{6} - 2\sqrt{7} \leq n \leq 2\sqrt{7} - \frac{25}{6} \Rightarrow n = -1, 0, 1 \Rightarrow x = \frac{-5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{7}{12}$$

2)

$$2 - \sqrt{7} \leq -\frac{1}{12} + \frac{n}{2} \leq \sqrt{7} - 2$$

$$\frac{25}{12} - \sqrt{7} \leq \frac{n}{2} \leq \sqrt{7} - \frac{23}{12}$$

$$\frac{25}{6} - 2\sqrt{7} \leq n \leq 2\sqrt{7} - \frac{23}{6} \Rightarrow n = -1, 0, 1 \Rightarrow x = -\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{5}{12}$$

3)

$$2 - \sqrt{7} \leq \frac{1}{8} + \frac{k}{2} \leq \sqrt{7} - 2$$

$$1.875 - \sqrt{7} \leq \frac{k}{2} \leq \sqrt{7} - 2.125$$

$$3.75 - 2\sqrt{7} \leq k \leq 2\sqrt{7} - 4.25 \Rightarrow k = -1, 0, 1 \Rightarrow x = -\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}$$

Ответ: а) $\{x = \pm \frac{1}{12} + \frac{n}{2}, x = \frac{1}{8} + \frac{k}{2} : n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$; б) $\pm \frac{5}{12}, \pm \frac{1}{12}, \pm \frac{7}{12}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть плоскость α — секущая, точка O — центр шара. Опустим перпендикуляр из центра шара на плоскость α , пусть точка F — основание этого перпендикуляра.

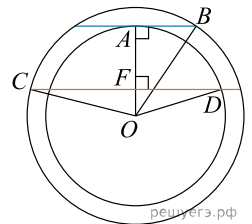
Пусть точка X — произвольная точка шара, принадлежащая плоскости α . По теореме Пифагора имеем $OX^2 = OF^2 + FX^2$. Отрезок OX не больше радиуса R шара, поэтому $FX \leq \sqrt{R^2 - OF^2}$, то есть любая точка сечения шара плоскостью α находится от точки F на расстоянии, не большем $\sqrt{R^2 - OF^2}$, следовательно, она принадлежит шару. Это значит, что любая точка сечения шара плоскостью α лежит в круге с центром в точке F .

Обратно: любая точка X этого круга принадлежит шару и лежит в плоскости α , а это значит, что сечение шара плоскостью α есть круг с центром в точке F .

б) Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры сечений — кругов. Обозначение центра, точки касания и точек пересечения поверхностей шаров с плоскостями α и β дано на рисунке.

Отрезок FD — радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α , тогда $S_\alpha = \pi \cdot FD^2 = 8$ — площадь сечения меньшего шара плоскостью α .

Отрезок AB — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β , тогда $S_\beta = \pi \cdot AB^2 = 5$ — площадь сечения большего шара плоскостью β .



Отрезок CF — радиус круга, полученного в сечении большого шара плоскостью α .
 Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой AF . Из прямоугольных треугольников OFC и OFD соответственно получаем:

$$OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2,$$

откуда

$$CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 = OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 + FD^2.$$

Площадь сечения большого шара плоскостью α равна

$$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 13.$$

Ответ: б) 13.

Примечание.

Приведенное решение не зависит от того, лежат ли плоскости α и β по одну сторону от центра шаров или по разные.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Сделаем замену $y = x^2 - 5x$. Получим

$$\frac{y-3}{y+3} + \frac{y+24}{y} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2-3y+y^2+27y+72}{y(y+3)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y^2+24y+72}{y(y+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(y+6)^2}{y(y+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < y < 0, \\ y = -6. \end{cases}$$

Отсюда после обратной замены для неравенства получаем

$$\begin{cases} x^2-5x > -3, \\ x^2-5x < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+3 > 0, \\ x(x-5) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(x-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) > 0, \\ x(x-5) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{5-\sqrt{13}}{2}, \\ \frac{5+\sqrt{13}}{2} < x < 5. \end{cases}$$

Для равенства получаем

$$x^2-5x = -6 \Leftrightarrow x^2-5x+6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \{2; 3\} \cup \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; 5\right).$

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Цена бумаги каждый год возрастает на тысячу, а куплена она в первый год за 8тыс.руб., поэтому на k -й год бумага будет стоить $8 + 1 \cdot (k - 1) = k + 7$ тыс. рублей. Если Алексей продаст бумагу в течение k -го года, то через двадцать пять лет после покупки сумма на его счёте будет равна $(k + 7) \cdot (1,08)^{25 - k}$. Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена

последовательности $a_k = (k + 7) \cdot (1,08)^{25 - k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 25. Рассмотрим приращение

$$\begin{aligned}
 b_k = a_k - a_{k-1} &= (1,08)^{25 - k} (k + 7 - 1,08 \cdot ((k - 1) + 7)) = (1,08)^{25 - k} (0,52 - 0,08k). \\
 b_k = a_k - a_{k-1} &= (1,08)^{25 - k} (0,52 - 0,08k). \\
 b_k = a_k - a_{k-1} &= (1,08)^{25 - k} (k + 7 - 1,08 \cdot ((k - 1) + 7)) = \\
 &= (1,08)^{25 - k} (0,52 - 0,08k).
 \end{aligned}$$

Отсюда $b_k > 0$ при $k \leq 6$ и $b_k < 0$ при $k > 6$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k = 6$.

Ответ: в течение шестого года.

Приведем другое решение.

Продать ценную бумагу нужно в тот момент, когда 8% от стоимости станут составлять не меньше чем 1тыс.рублей, что возможно при стоимости бумаги не менее 12,5тыс.рублей. Это произойдет через пять лет после покупки ценной бумаги ($8 + 5 \cdot 1 = 13$). Таким образом, ценную бумагу нужно продать в течение шестого года (сразу по прошествии пяти лет).

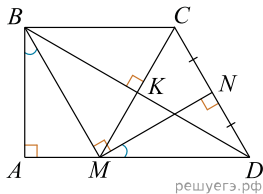
№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть $\angle ABM = \alpha$, тогда

$$\angle NMD = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha,$$

то есть прямоугольные треугольники ABM и NMD равны по катету и острому углу, $BM = MD$. Углы BMN и MND равны, а потому прямые BM и CD параллельны. Следовательно, четырехугольник $BCDM$ — параллелограмм. В нем $BM = MD$, поэтому этот параллелограмм — ромб, диагонали CM и BD которого перпендикулярны.



б) Отрезок MN — медиана треугольника CMD , она делит треугольник на два равновеликих. Следовательно,

$$S_{BCDM} = 2S_{CMD} = 4S_{MND} = 4S_{ABM} = 4 \cdot 6 = 24.$$

Площадь трапеции $ABCD$ равна

$$S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{BCDM} = 6 + 24 = 30.$$

Ответ: б) 30.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано.	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной.	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Заметим, что $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$,

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

Тогда получаем:

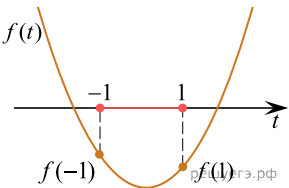
$$\sin^4 x + \cos^4 x > a \sin x \cos x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x > \frac{1}{2} a \sin 2x \Leftrightarrow \sin^2 2x + a \sin 2x - 2 < 0. \quad \sin^4 x + \cos^4 x > a \sin x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x > \frac{1}{2} a \sin 2x \Leftrightarrow \sin^2 2x + a \sin 2x - 2 < 0. \quad \sin^4 x + \cos^4 x > a \sin x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x > \frac{1}{2} a \sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + a \sin 2x - 2 < 0.$$

Пусть $t = \sin 2x$, тогда $-1 \leq t \leq 1$. Для того, чтобы исходное неравенство было выполнено при любом значении x , необходимо и достаточно, чтобы неравенство $t^2 + at - 2 < 0$ было выполнено для всех $-1 \leq t \leq 1$. Рассмотрим квадратичную функцию $f(t) = t^2 + at - 2$ с положительным старшим коэффициентом, эскиз графика которой приведен на рисунке. Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система



$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2 - a - 2 < 0, \\ 1^2 + a - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1, \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < a < 1.$$

Ответ: $(-1; 1)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да, например: 1, 2, 11, 2222, 1112.

б) Нет. Если бы среди составленных Мариной чисел быть хотя бы одно шестизначное, то из остальных шести цифр были бы составлены 4 числа. Существуют только два однозначных и два двузначных подходящих числа— это 1, 2, 11 и 22. Тогда шестизначное состоит из трех единиц и трех двоек, а потому кратно трем, поскольку сумма цифр равна 9.

в) Из пункта б) видно, что шестизначных чисел и чисел из большего количества цифр нет. Самое большое пятизначное число из единиц и двоек— это 22222, но тогда не менее трех чисел состоят из одних единиц, поскольку осталась всего одна двойка, значит, это как минимум 1, 11 и 1111, что невозможно, ведь потребуется семь единиц. Числа 22 221 и 22 212 кратны трем. Для числа 22 211 можно подобрать пример: 1, 2, 11, 122, 22 211.

Ответ: а) да; б) нет; в) 22 211.