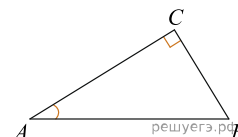


# Вариант 1

ID: 13812

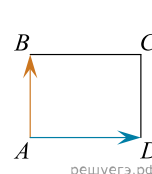
## № 1.

В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AC = 24$ ,  $BC = 7$ . Найдите  $\sin A$ .



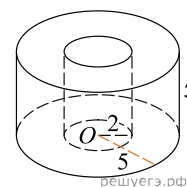
## № 2.

Две стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 8. Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ .



## № 3.

Найдите объем  $V$  части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .

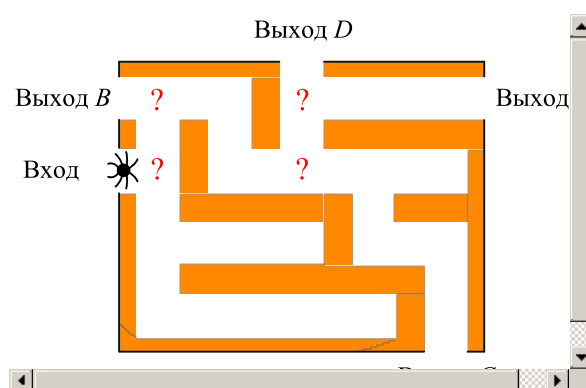


## № 4.

У Дины в копилке лежит 7 рублёвых, 5 двухрублёвых, 6 пятирублёвых и 2 десятирублёвых монеты. Дина наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит менее 60 рублей.

**№ 5.**

На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу  $D$ .



**№ 6.**

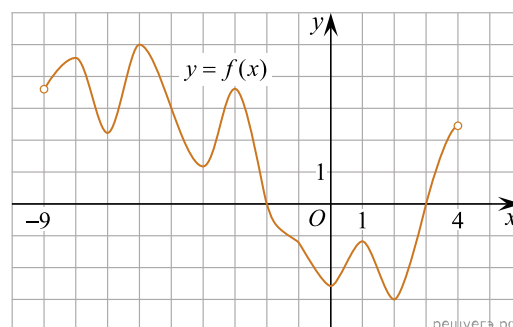
Найдите корень уравнения  $\left(\frac{1}{2}\right)^{10-3x} = 32$ .

**№ 7.**

Найдите значение выражения  $\frac{(11a)^2 - 11a}{11a^2 - a}$ .

**No 8.**

На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-9; 4)$ . Найдите промежутки убывания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.



---

**№ 9.**

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности  $In$ , оперативности  $Op$ , объективности публикаций  $Tr$ , а также качества сайта  $Q$ . Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от 1 до 5.

Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций — вдвое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{2In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Каким должно быть число  $A$ , чтобы издание, у которого все оценки наибольшие, получило бы рейтинг 1?

---

**№ 10.**

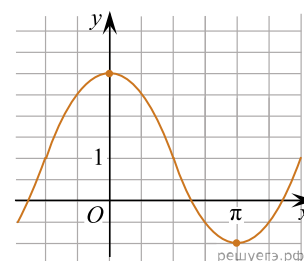
Смешали 4 литра 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

*Конечно, вместо литров следовало бы говорить о килограммах растворов.*

---

**№ 11.**

На рисунке изображён график функции  $f(x) = a \cos x + b$ , где  $a$  и  $b$  — целые числа. Найдите  $y\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ .



---

**№ 12.**

Найдите наименьшее значение функции  $y = -14x + 7 \operatorname{tg} x + \frac{7\pi}{2} + 11$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ .

---

**№ 13.**

а) Решите уравнение  $\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1\right) \cdot \left(\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x\right) = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

---

**№ 14.**

Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , сторона  $AB$  основания которой равна 32, а боковое ребро  $BB_1$  равно  $4\sqrt{3}$ . На рёбрах  $AB$  и  $B_1C_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $AK = 2$ ,  $B_1L = 28$ . Точка  $M$  — середина ребра  $A_1C_1$ . Плоскость  $\gamma$  проходит через точки  $K$  и  $L$  и параллельна прямой  $AC$ .

- а) Докажите, что плоскость  $\gamma$  перпендикулярна прямой  $MB$ .  
б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка  $M$ , а основанием — сечение данной призмы плоскостью  $\gamma$ .
- 

**№ 15.**

Решите неравенство  $\frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^2 - 2x - 3} \leq x + 2$ .

---

**№ 16.**

15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:  
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;  
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;  
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

---

**№ 17.**

В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ . Прямые  $B_1C_1$  и  $BC$  пересекаются в точке  $P$ .

- а) Докажите, что треугольники  $PBC_1$  и  $PB_1C$  подобны.  
б) Найдите расстояние от вершины  $A$  до точки пересечения высот треугольника  $ABC$ , если  $BP = BB_1$ ,  $\angle ABC = 80^\circ$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ , а точка  $B$  лежит между  $C$  и  $P$ .
- 

**№ 18.**

При каждом  $a$  решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2 + a^2 + 2 - 2x - 2a} + \sqrt{x^2 + a^2 - 6x + 9} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

---

**№ 19.**

В течение  $n$  дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли  $n$  быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

## Ответы

| Номер | Задание                | Ответ  |
|-------|------------------------|--------|
| 1     | <a href="#">27250</a>  | 0,28   |
| 2     | <a href="#">27710</a>  | 0      |
| 3     | <a href="#">27201</a>  | 105    |
| 4     | <a href="#">509433</a> | 0,1    |
| 5     | <a href="#">320212</a> | 0,0625 |
| 6     | <a href="#">510382</a> | 5      |
| 7     | <a href="#">26795</a>  | 11     |
| 8     | <a href="#">628235</a> | 3      |
| 9     | <a href="#">319859</a> | 35     |
| 10    | <a href="#">99573</a>  | 21     |
| 11    | <a href="#">676854</a> | 2      |
| 12    | <a href="#">77495</a>  | 18     |

### № 13.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                | Баллы |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.                                                                                                                                                   | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а),<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б). | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                                  | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                                                                                                                                                              | 2     |

**Решение.** а) Используя формулу  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ , заменим выражение в скобках на  $\cos x$ , получаем однородное тригонометрическое уравнение первой степени:

$$\sin x + \left( \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0.$$

Если  $\cos x = 0$ , то из уравнения следует  $\sin x = 0$ , что невозможно в силу основного тригонометрического тождества. Значит, на множестве корней уравнения  $\cos x \neq 0$ . Разделим обе части уравнения на  $\cos x$ :

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

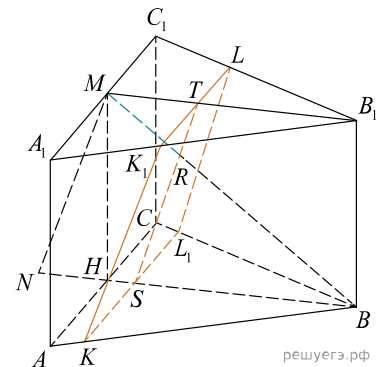
б) Составим двойное неравенство:  $\pi \leq -\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \frac{5\pi}{2}$ , откуда  $\frac{5}{4} \leq k \leq 2\frac{3}{4}$ . Следовательно,  $k = 2$ . Поэтому на данном отрезке получаем единственный корень  $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ .

Ответ: а)  $\left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; б)  $\frac{7\pi}{4}$ .

№ 14.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                            | Баллы |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                                                                                                                | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                      | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а)<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                 | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3     |

**Решение.** а) Пусть  $K_1$  и  $L_1$  — точки пересечения плоскости  $\gamma$  с рёбрами  $A_1B_1$  и  $BC$  соответственно, точка  $H$  — середина ребра  $AC$ . Точки  $S$  и  $T$  — точки пересечения плоскости  $\gamma$  с прямыми  $BH$  и  $B_1M$  соответственно. Точка  $R$  — точка пересечения прямых  $BM$  и  $ST$ . Тогда прямые  $KL_1$ ,  $LK_1$  и  $AC$  параллельны. Через точку  $M$  построим прямую  $MN$  параллельно прямой  $ST$ ,  $N$  — точка её пересечения с прямой  $BH$ , прямые  $MT$  и  $BH$  параллельны. Далее имеем:



$$\begin{aligned}
 BH = B_1M = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}, \quad KL_1 = BK = BL_1 = 30, \\
 KL_1 = B_1K_1 = B_1L = 28, \quad K_1L = B_1K_1 = B_1L = 28, \\
 BS = 15\sqrt{3}, \quad B_1T = 14\sqrt{3}, \quad HS = \sqrt{3}, \\
 MT = NS = 2\sqrt{3}, \quad NH = \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что  $\sqrt{NH \cdot HB} = 4\sqrt{3} = BB_1 = MH$ , следовательно, треугольник  $BMN$  — прямоугольный, прямые  $MN$  и  $BM$  перпендикулярны. Тогда и прямые  $ST$  и  $BM$  перпендикулярны. Кроме этого, прямые  $BM$  и  $AC$  перпендикулярны, прямые  $BM$  и  $KL$  перпендикулярны, следовательно, прямая  $BM$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .

б) Из п.а) следует, что высотой указанной пирамиды является отрезок  $MR$ , а основанием — трапеция  $KK_1LL_1$  с высотой  $TS$ . Тогда:

$$\begin{aligned}
 TS = MN = \sqrt{MH^2 + NH^2} = \sqrt{51}, \\
 S_{KK_1LL_1} = \frac{1}{2}(KL_1 + K_1L) \cdot TS = 29\sqrt{51}, \\
 BM = \sqrt{BH^2 + MH^2} = 4\sqrt{51}.
 \end{aligned}$$

Из пропорциональности отрезков  $\frac{MR}{BR} = \frac{MT}{BS} = \frac{2}{15}$ , находим, что  $MR = \frac{2}{17}BM = \frac{8}{17}\sqrt{51}$ . Следовательно, искомый объём пирамиды  $V = \frac{1}{3}S_{KK_1LL_1} \cdot MR = 232$ .

Ответ: б) 232.

№ 15.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                               | Баллы |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                     | 2     |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                                 | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                                                                                                                                                             | 2     |

**Решение.** Преобразуем неравенство:

$$\frac{(x+2)(x-3)^2}{x^2-2x-3} \leq x+2 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)^2 - (x+2)(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)^2}{x^2-2x-3} \leq x+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)^2 - (x+2)(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ -1 < x < 3, \\ x > 3. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(-\infty; -2] \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$ .

№ 16.

| Критерии оценивания выполнения задания                              | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                    | 2     |
| Верно построена математическая модель                               | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                            | 2     |

**Решение.** Пусть планируется взять в кредит 18 Sy. е. Заполним таблицу:

| Месяц<br>(номер месяца) | Долг на 1-е число месяца,<br>у. е. | Выплата,<br>у. е.    | Долг на 15-е число месяца,<br>у. е. |
|-------------------------|------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|
| Январь                  |                                    |                      | $18S$                               |
| Февраль<br>(1)          | $18S \cdot 1,02$                   | $S + 18S \cdot 0,02$ | $17S$                               |
| Март<br>(2)             | $17S \cdot 1,02$                   | $S + 17S \cdot 0,02$ | $16S$                               |
| Апрель<br>(3)           | $16S \cdot 1,02$                   | $S + 16S \cdot 0,02$ | $15S$                               |
| ...                     | ...                                | ...                  | ...                                 |
| Июнь<br>(17)            | ...                                | ...                  | $S$                                 |
| Июль<br>(18)            | $S \cdot 1,02$                     | $S + S \cdot 0,02$   | $0$                                 |

Найдём сумму всех выплат:

$$\begin{aligned}
 B &= S + 18S \cdot 0,02 + S + 17S \cdot 0,02 + S + 16S \cdot 0,02 + \dots + S + 2S \cdot 0,02 + S + S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + (18 + 17 + 16 + \dots + 2 + 1)S \cdot 0,02 = 18S + 19 \cdot 9S \cdot 0,02 = 18S + 19 \cdot 0,18S = 18 \cdot 1,19S. \\
 B &= S + 18S \cdot 0,02 + S + 17S \cdot 0,02 + S + 16S \cdot 0,02 + \dots + S + 2S \cdot 0,02 + S + S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + (18 + 17 + 16 + \dots + 2 + 1)S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + 19 \cdot 9S \cdot 0,02 = 18S + 19 \cdot 0,18S = 18 \cdot 1,19S. B = \\
 &= S + 18S \cdot 0,02 + S + 17S \cdot 0,02 + S + 16S \cdot 0,02 + \dots + S + 2S \cdot 0,02 + S + S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + (18 + 17 + 16 + \dots + 2 + 1)S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + 19 \cdot 9S \cdot 0,02 = 18S + 19 \cdot 0,18S = 18 \cdot 1,19S. B = \\
 &= S + 18S \cdot 0,02 + S + 17S \cdot 0,02 + S + 16S \cdot 0,02 + \dots + S + 2S \cdot 0,02 + S + S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + (18 + 17 + 16 + \dots + 2 + 1)S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + 19 \cdot 9S \cdot 0,02 = \\
 &= 18S + 19 \cdot 0,18S = 18 \cdot 1,19S.
 \end{aligned}$$

Тогда общая сумма, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, в процентах от суммы кредита составляет

$$\frac{18 \cdot 1,19S \cdot 100\%}{18S} = 119\%.$$

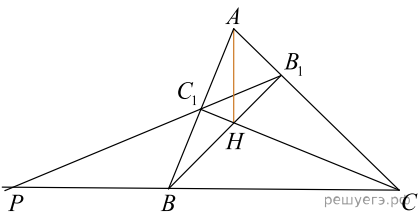
Ответ: 119.

№ 17.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                                            | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                                                                                                                                | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br><br>ИЛИ<br><br>имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                              | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а)<br><br>ИЛИ<br><br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br><br>ИЛИ<br><br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                                 | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3     |

**Решение.** а) Точки  $B, C, B_1, C_1$  лежат на окружности с диаметром  $BC$ , поэтому сумма углов  $BCB_1$  и  $BC_1B_1$  равна  $180^\circ$ . Отсюда следует равенство углов  $PC_1B$  и  $PCB_1$ . А тогда треугольники  $PC_1B$  и  $PCB_1$  подобны по двум углам. Что и требовалось доказать.

б) Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Заметим, что треугольник  $PBB_1$  равнобедренный, поэтому углы  $BPB_1$  и  $BB_1P$  равны. А углы  $HB_1C_1$  и  $HAC_1$  опираются на одну и ту же дугу окружности, построенной на  $AH$  как на диаметре, поэтому они тоже равны. Последний же угол, как легко видеть равен  $90^\circ - \angle ABC = 10^\circ$ . Теперь получаем, что угол  $PBB_1$  равен  $180^\circ - 10^\circ - 10^\circ = 160^\circ$ . Угол  $ABB_1$  же тогда равен  $160^\circ + 80^\circ - 180^\circ = 60^\circ$ , откуда  $\angle A = 30^\circ$ .



Заметим теперь, что

$$AB_1 : AB = AC_1 : AC = \cos \angle A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

поэтому треугольники  $AB_1C_1$  и  $ABC$  подобны с коэффициентом  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Диаметр описанной окружности треугольника  $ABC$  равен  $\frac{BC}{\sin A} = 4\sqrt{3}$ . Диаметры описанных окружностей подобных треугольников относятся как коэффициент подобия, поэтому  $AH : 4\sqrt{3} = \sqrt{3} : 2$ . Отсюда  $AH = 6$ .

Ответ: б) 6.

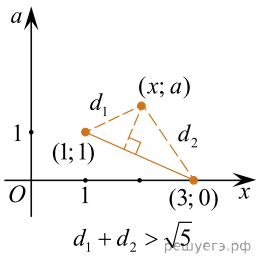
#### № 18.

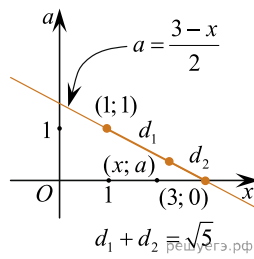
| Критерии оценивания ответа на задание С5                                                                                         | Баллы    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Обоснованно получен верный ответ.                                                                                                | 4        |
| Рассмотрены все возможные случаи. Получен верный ответ, но решение либо содержит пробелы, либо вычислительную ошибку или опisku. | 3        |
| Рассмотрены все возможные случаи. Получен ответ, но решение содержит ошибки.                                                     | 2        |
| Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.                           | 1        |
| Все прочие случаи.                                                                                                               | 0        |
| <b>Максимальное количество баллов</b>                                                                                            | <b>4</b> |

**Решение.** Запишем второе уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)^2 + (a-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + a^2} = \sqrt{5}.$$

Геометрический смысл уравнения состоит в том, что сумма расстояний от точек  $(x; a)$  до точек  $(1; 1)$  и  $(3; 0)$  равно  $\sqrt{5}$ . Поскольку расстояние между точками  $(1; 1)$  и  $(3; 0)$  тоже равно  $\sqrt{5}$ , это означает, что точка  $(x; a)$  должна лежать на отрезке, соединяющем точки  $(1; 1)$  и  $(3; 0)$ . Другими словами, она удовлетворяет уравнению  $a = \frac{3-x}{2}$  и условию  $x \in [1; 3]$ .





Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ 2a = 3 - x, \quad x \in [1; 3]. \end{cases}$$

Подставив  $2a$  в первое уравнение, получаем

$$2^{1+x} = 16(3-x)\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}} = 3-x \Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}} + x = 3.$$

Поскольку функция  $y = 2^{x-\frac{7}{2}} + x$  возрастающая (как сумма двух возрастающих), каждое значение она принимает ровно один раз. Поэтому решение  $x = \frac{5}{2}$  — единственное, ему соответствует  $a = \frac{1}{4}$ .

Ответ: если  $a = \frac{1}{4}$ , то  $x = \frac{5}{2}$ , при остальных  $a$  нет решений.

№ 19.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                                  | Баллы |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты                                                                                                                                                                                                                    | 4     |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов                                                                                                                                                                                                                | 3     |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов                                                                                                                                                                                                                | 2     |
| Верно получен один из следующих результатов: <ul style="list-style-type: none"> <li>— обоснованное решение пункта а;</li> <li>— обоснованное решение пункта б;</li> <li>— искомая оценка в пункте в;</li> <li>— пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки</li> </ul> | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                                                                                     | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                       | 4     |

**Решение.** а) Пусть в день с номером  $k$  записано  $k$  чисел 3 и  $12-2k$  чисел 1. Тогда сумма чисел в этот день равна  $12+k$ . Таким образом,  $n$  может быть равным 6.

б) Пусть  $n=4$ , в первый день на доску записали число 2 и двенадцать чисел 3, во второй день — двенадцать чисел 4, в третий день — шесть чисел 4 и пять чисел 5, а в четвёртый день — десять чисел 5. Тогда сумма чисел в первый день равна 38, во второй — 48, в третий — 49, а в четвёртый — 50. Среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, равно  $2\frac{12}{13} < 3$ , а среднее арифметическое всех записанных чисел равно  $4\frac{1}{46} > 4$ .

в) Заметим, что в первый день на доску было записано не более 6 чисел. Значит, если  $n > 5$ , то в шестой день на доску было записано одно число. Но это невозможно, поскольку это число должно быть больше суммы чисел, записанных в первый день, равной 6. Таким образом,  $n \leq 5$ .

Если  $n=5$ , то в пятый день на доску было записано не более двух чисел, а их сумма не превосходит 10. Значит, суммы чисел, записанных в четвёртый, третий и второй дни, не превосходят 9, 8 и 7 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 40.

Если  $n=4$ , то в четвёртый день на доску было записано не более трёх чисел, а их сумма не превосходит 15.

Значит, суммы чисел, записанных в третий и второй дни, не превосходят 14 и 13 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 48.

Если  $n=3$ , то в третий день на доску было записано не более четырёх чисел, а их сумма не превосходит 20. Значит, сумма чисел, записанных во второй день, не превосходит 19, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 45.

Если  $n=2$ , то во второй день на доску было записано не более пяти чисел, а их сумма не превосходит 25. Значит, сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 31.

Если  $n=1$ , то сумма всех записанных чисел равна 6. Таким образом, сумма всех записанных чисел не превосходит 48. Покажем, что сумма всех записанных чисел могла равняться 48. Пусть  $n=4$ , и в первый день была записана 1, 1, 1, 1, 1, 1: во второй— 2, 2, 3, 3, 3: в третий— 3, 3, 4, 4; в четвёртый— 5, 5, 5. Тогда суммы записанных в эти дни чисел соответственно равны 6, 13, 14 и 15, то есть числа удовлетворяют условиям задачи, а их сумма равна 48.

Ответ: а) да; б) да; в) 48.

---