

Вариант 244

ID: 13832

№ 1.

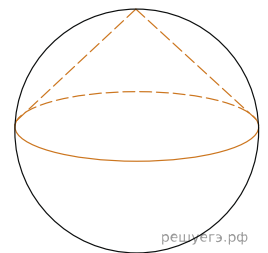
В треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 20, $AB = 25$. Найдите $\cos BAC$.

№ 2.

Даны векторы $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (2; -4)$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $7\vec{a} - \vec{b}$.

№ 3.

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



№ 4.

На олимпиаде по русскому языку 250 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

№ 5.

Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

№ 6.

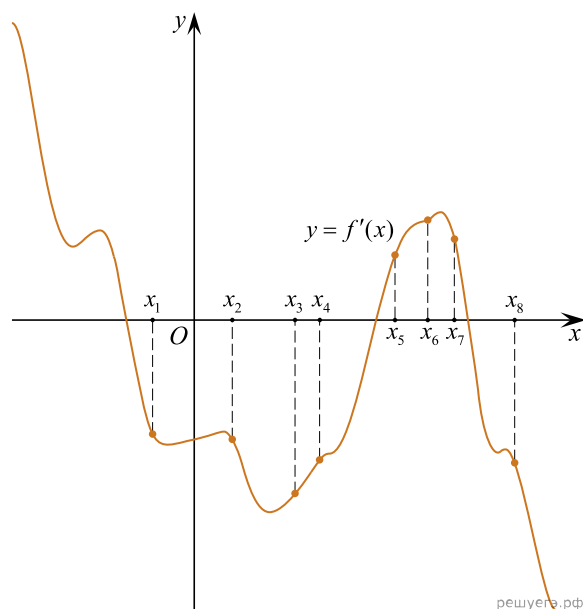
Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{10-3x} = 32$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a-10)^2}$ при $6 \leq a \leq 10$.

№ 8.

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



№ 9.

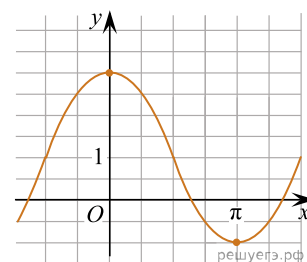
Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 2 \cdot 10^{-6}$ ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошла 21 с. Ответ дайте в киловольтах.

№ 10.

Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cos x + b$, где a и b — целые числа. Найдите $y\left(\frac{13\pi}{3}\right)$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = 3x - 2x\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 4]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах AB и $D_1 C_1$ отмечены точки M и N , такие, что $D_1 N : NC_1 = BM : MA = 1 : 3$, точка O — центр грани $BCC_1 B_1$. Через точки A_1 и O проходит плоскость α параллельно прямой MN и составляет с плоскостями ABC , $BB_1 C$ и DCC_1 одинаковые углы.

а) Докажите, что стороны параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ относятся как $3 : 4 : 5$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , если ребра параллелепипеда равны 3 , 4 , 5 .

№ 15.

Решите неравенство $\frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1)}{x} \geq 1$.

№ 16.

Эпицентр циклона, движущийся прямолинейно, во время первого измерения находился в 24 км к северу и 5 км к западу от метеостанции, а во время второго измерения находился в 20 км к северу и $3\frac{1}{2}$ км к западу от метеостанции. Определите наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции.

№ 17.

В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CH треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

- а) Докажите, что $AH = AO$.
- б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

№ 18.

При каких значениях параметра a система $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$ имеет решения?

№ 19.

На доске написано 10 неотрицательных чисел. За один ход стираются два числа, а вместо них записывается сумма, округлённая до целого числа (например, вместо 5,5 и 3 записывается 9, а вместо 3,3 и 5 записывается 8).

- а) Приведите пример 10 нецелых чисел и последовательности 9 ходов, после которых на доске будет записано число, равное сумме исходных чисел.
- б) Может ли после 9 ходов на доске быть написано число, отличающееся от суммы исходных чисел на 7?
- в) На какое наибольшее число могут отличаться числа, записанные на доске после 9 ходов, выполненных с одним и тем же набором исходных чисел в различном порядке?

Ответы

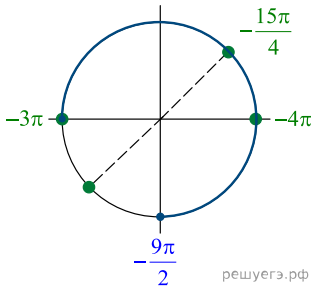
Номер	Задание	Ответ
1	27331	0.6
2	680501	15
3	316556	56
4	320191	0.04
5	508850	1.05
6	510382	5
7	26830	4
8	317542	5
9	27994	2
10	99586	320000
11	676854	2
12	77464	1

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а)Применим формулу приведения, разложим на множи-
тели:

$$2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin 2x \Leftrightarrow 2\sin^2 x-2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x(\sin x-\cos x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=0, \\ \operatorname{tg} x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pi k, \\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



б)Отберем корни при помощи единичной тригонометрической
окружности (см.рис.). Отрезку удовлетворяют корни: $-4\pi, -\frac{15\pi}{4}, -3\pi.$

Ответ: а) $\left\{\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi k: k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-4\pi, -\frac{15\pi}{4}, -3\pi.$

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном реше- нии пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифмети- ческой ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка F — точка на ребре C_1D_1 такая, что $C_1F:FD_1 = 1:3$. Тогда

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1P} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{C_1D_1}.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} = 2\overrightarrow{OP},$$

откуда следует, что прямые MM и OP параллельны, а значит, точка F принадлежит плоскости α .

Пусть прямые A_1F и B_1C_1 пересекаются в точке K , прямые KD и C_1C — в точке Q , а прямые KD и BB_1 — в точке R (см. рис.). Если плоскость α составляет равные углы с плоскостями ABC , BB_1C и DCC_1 , то площади проекций A_1KR на эти плоскости равны. Следовательно,

$$A_1B_1 \cdot B_1R = B_1K \cdot B_1R = B_1K \cdot A_1B_1 \Leftrightarrow A_1B_1 = B_1R = B_1K.$$

Из подобия треугольников KC_1F и KB_1A_1 по двум углам получаем следующие соотношения:

$$B_1K : KC_1 = A_1B_1 : PC_1 = 4 : 1 \Leftrightarrow B_1C_1 = \frac{3}{4}B_1K = \frac{3}{4}A_1B_1.$$

Далее, из симметрии относительно точки O , $BF = C_1O$. Пусть $C_1D_1 = x$, тогда:

$$\frac{x}{BB_1 - x} = \frac{C_1 K}{B_1 K} = \frac{1}{4},$$

откуда $BB_1 = 5x$ и $B_1R = \frac{4}{5}BB_1$. Итак, $A_1B_1 = \frac{4}{5}BB_1$, $B_1C_1 = \frac{3}{4}A_1B_1$, следовательно, $B_1C_1 : A_1B_1 : BB_1 = 3 : 4 : 5$.

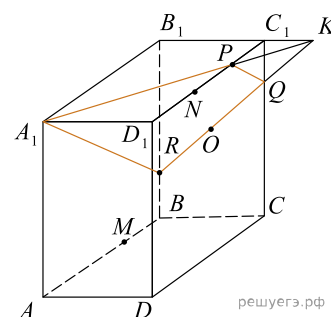
б) Из пункта а) следует, что

$$A_1 R = A_1 K = KP = \sqrt{A_1 B_1^2 + B_1 R^2} = 4\sqrt{2}.$$

Треугольники PKQ и A_1KR подобны по двум углам с коэффициентом подобия $\frac{PK}{A_1R} = \frac{C_1K}{B_1K} = \frac{1}{4}$, а тогда $S_{PKQ} = \frac{1}{16}S_{A_1KR}$. Значит,

$$S_{\text{ceч}} = S_{A_1PQR} = \frac{15}{16} S_{A_1KR} = \frac{15}{16} \cdot \frac{(4\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$.



N_o 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется вер- ная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Знак разности $\log_a b - \log_a c$ на ОДЗ совпадает с знаком произведения $(a-1)(b-c)$,

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1)}{x} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1) - x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1) - \log_2 2^x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1)}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1) - x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1) - \log_2 2^x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2-1)(3 \cdot 2^{x-1} - 1 - 2^x)}{x} \geq 0, \\ 3 \cdot 2^{x-1} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\frac{1}{2} \cdot 2^x - 1}{x} \geq 0, \\ 2^{x-1} > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2^x - 2^1}{x} \geq 0, \\ 2^x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2-1)(3 \cdot 2^{x-1} - 1 - 2^x)}{x} \geq 0, \\ 3 \cdot 2^{x-1} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\frac{1}{2} \cdot 2^x - 1}{x} \geq 0, \\ 2^{x-1} > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2^x - 2^1}{x} \geq 0, \\ 2^x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x} \geq 0, \\ x > \log_2 \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1, \\ x < 0. \end{cases} \\ x > \log_2 \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{2}{3} < x < 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\log_2 \frac{2}{3}; 0\right) \cup [1; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>

Решение. Введём прямоугольную систему координат с началом координат в точке, где находится метеостанция, ось абсцисс направим на восток, ось ординат — на север. Тогда в момент первого измерения эпицентр циклона находился в точке с координатами $(-5; 24)$, а во время второго измерения — в точке с координатами $(-3,5; 20)$. По условию, эпицентр движется прямолинейно. Пусть эта прямая задана уравнением $y = kx + b$. Найдём коэффициенты k и b в уравнении этой прямой:

$$\begin{cases} 24 = -5k + b, \\ 20 = -3,5k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -1,5k, \\ b = 24 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{8}{3}, \\ b = \frac{32}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение прямой $y = -\frac{8}{3}x + \frac{32}{3}$ или $8x + 3y - 32 = 0$. Тогда наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции, будет равно расстоянию от точки $(0; 0)$ до прямой $8x + 3y - 32 = 0$:

$$\rho = \frac{|8 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 32|}{\sqrt{8^2 + 3^2}} = \frac{32}{\sqrt{73}} \text{ (км)}.$$

Ответ: $\frac{32}{\sqrt{73}}$ км.

№ 17.

Критерии оценивания ответа на задание С5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Рассмотрены все возможные случаи. Получен верный ответ, но решение либо содержит пробелы, либо вычислительную ошибку или опisku.	3
Рассмотрены все возможные случаи. Получен ответ, но решение содержит ошибки.	2
Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.	1
Все прочие случаи.	0
Максимальное количество баллов	4

Решение. Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} (x-1)^2 = y+1, \\ (y-a)^2 + (x-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Исходная система имеет решения тогда и только тогда, когда относительно y имеет решения система:

$$\begin{cases} (y-a)^2 + y + 1 = 1, \\ y + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + (1-2a)y + a^2 = 0, \\ y \geq -1. \end{cases}$$

Решая уравнение этой системы, находим, что $y = \frac{2a-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$. Требование задачи будет выполнено, если последняя смешанная система имеет хотя бы одно решение. Искомые значения a находятся из совокупности неравенств

$$\frac{2a-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} \geq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-4a} \geq -1-2a, \\ \sqrt{1-4a} \leq 1+2a. \end{cases}$$

Иррациональные неравенства можно решить, используя теоремы о равносильности:

$$\sqrt{x} \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x \leq y^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \sqrt{x} \geq y \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x \geq y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0, \\ x \geq 0, \\ x \geq y^2 \end{cases}$$

Получим: $-2 \leq a \leq \frac{1}{4}$ или $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$, что дает $-2 \leq a \leq \frac{1}{4}$.

Другой путь решения неравенств — ввести замену $t = \sqrt{1-4a}$. В этом случае $a = \frac{1}{4}(1-t^2)$. Тогда:

$$t \geq -1 - \frac{1}{2}(1-t^2), \text{ откуда } t^2 - 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow_{t \geq 0} 0 \leq t \leq 3$$

и

$$t \leq 1 + \frac{1}{2}(1-t^2), \text{ что дает } t^2 + 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow_{t \geq 0} 0 \leq t \leq 1.$$

Таким образом, $0 \leq t \leq 3$. Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$0 \leq \sqrt{1-4a} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq 1-4a \leq 9 \Leftrightarrow -1 \leq -4a \leq 8 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq \frac{1}{4}.$$

Ответ: $a \in \left[-2, \frac{1}{4}\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующий результатов: — пример в п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Назовём результатом число, написанное на доске после 9 ходов.

а) Если на доске написаны числа

0.99; 0.01; 0.99; 0.01; 0.99; 0.01; 0.99; 0.01; 0.99; 0.01,

то при любой последовательности ходов результат равен 5 и равен сумме чисел.

б)Заметим, что за каждый ход вновь написанное число отличается от суммы стёртых не более чем на 0.5. Значит, результат будет отличаться от суммы исходных чисел не более чем на 4.5. Значит, не существует 10 чисел таких, что результат отличается от их суммы на 7.

в)Можем считать, что все числа меньше 1 и не меньше 0, поскольку целые части каждого из чисел при сложении не влияют на разницу между их суммой и её округлённым значением.

Каждое изначальное число участвует ровно в одном ходе. Если в этом ходе также участвовало целое число, не написанное на доске изначально, то назовём вкладом изначально числа в результат разность записанного после хода числа и стёртого целого числа. Если оба числа, участвовавших в ходе, были написаны на доске изначально, то назовём вкладом каждого из них в результат половину записанного после хода числа.

Заметим, что результат равен сумме вкладов изначальных чисел. С другой стороны, вклад каждого числа, меньшего 0.5, равен 0 или 0.5, а вклад каждого числа, не меньшего 0.5, равен 0.5 или 1.

Пусть n — количество чисел, не меньших 0.5.

Тогда сумма вкладов будет не меньше $\frac{n}{2}$ и не больше $\frac{10-n}{2} + n = \frac{n}{2} + 5$.

То есть наибольшая разность двух различных результатов не превосходит 5.

Рассмотрим 10 чисел: два числа 0.5 и восемь чисел 0.4. Если вначале сложить два числа 0.5, а затем делать ходы с полученной единицей и числом 0.4, то результат будет равен 1. Если сделать четыре хода, попарно сложив числа 0.4, затем сложить четыре полученные единицы, а потом делать ходы с полученным числом и числом 0.5, то результат будет равен 6.

Таким образом, наибольшая возможная разность двух различных результатов равна 5.

Ответ: а)например, числа 0.99; 0.01; 0.99; 0.01; 0.99; 0.01; 0.99; 0.01; 0.99; 0.01 и любая последовательность ходов; б) нет; в) 5.