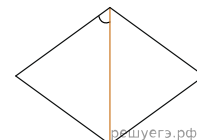


Вариант 247

ID: 13841

№ 1.

Угол между стороной и диагональю ромба равен 54° . Найдите острый угол ромба.



№ 2.

Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(2; 1)$, $(2; 4)$, $(6; 1)$, $(6; 4)$.

№ 3.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка N — середина ребра BC , S — вершина. Известно, что $AB = 1$, а площадь боковой поверхности равна 3. Найдите длину отрезка SN .

№ 4.

У Вити в копилке лежит 12 рублёвых, 6 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Витя наугад достает из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 70 рублей.

№ 5.

Чтобы забросить шесть мячей в корзину на тренировке, баскетболисту потребовалось 10 бросков. Считая, что вероятность попадания в корзину при каждом броске одна и та же, найдите вероятность того, что при первых четырёх бросках баскетболист попал в корзину не более одного раза. Результат округлите до тысячных.

№ 6.

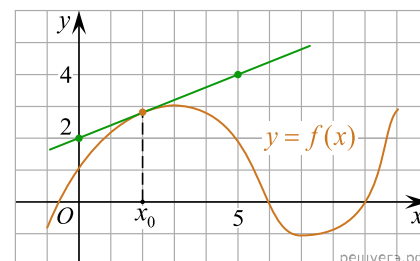
Решите уравнение $\log_{x-5} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{b^{3\sqrt{2}+2}}{(b^{\sqrt{2}})^3}$ при $b = 6$.

№ 8.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0 = 2$. Найдите значение производной функции $g(x) = x^2 - f(x) + 1$ в точке x_0 .



№ 9.

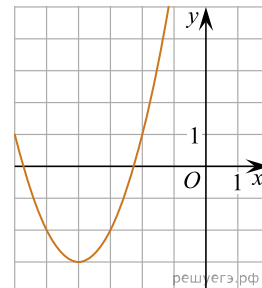
Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин², $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

№ 10.

Часы со стрелками показывают 8 часов ровно. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

№ 11.

На рисунке изображён график функции вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — целые. Найдите a, b и c .



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = \log_2(2 + 2x - x^2) - 2$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

№ 14.

Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 9.

Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M — середина ребра SB , точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобедренная трапеция.
- б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{\log_3(27x^4) + 4\log_3 x + 12}{\log_3^2 \frac{x^2}{3} - 16} \leq -1$.

№ 16.

При налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $12000 - 2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе. Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог на 60% (до величины $1,6t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов?

№ 17.

Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $BK = OK$.

а) Докажите, что четырехугольник $ABKC$ вписанный.

б) Найдите длину отрезка AO , если известно, что радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны 3 и 12 соответственно, а $OK = 5$.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{x+4}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

№ 19.

Лесная шахматная школа провела шахматный турнир. В нём принимали участие Волк, Лиса и Заяц. Каждый из них сыграл с каждым участником по 10 партий. За выигранную партию присуждалось 2 очка, за ничью 1 очко, за проигрыш 0 очков. После окончания турнира места распределялись по сумме очков, набранных участниками.

а) Сколько очков набрал Волк, если у него число выигранных в турнире партий равнялось числу проигранных?

б) У Лисы количество выигранных партий больше чем у Волка, а у Волка больше чем у Зайца. Может ли Заяц занять первое место, Волк — второе, а Лиса — третье?

в) Лиса заняла в турнире второе место, хотя при игре с каждым из соперников побеждала чаще, чем проигрывала. Тогда она потребовала изменить порядок подведения итогов: распределять места по разности количества выигранных и проигранных партий. Сможет ли она после этого занять первое место?

г) Может ли быть по итогам турнира у каждого участника количество выигранных партий больше, чем количество проигранных?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	526245	72
2	513334	5
3	284352	2
4	509412	0,72
5	663478	0,167
6	77382	12
7	77409	36
8	525689	3,6
9	27962	2
10	99600	240
11	564646	61
12	245177	1

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

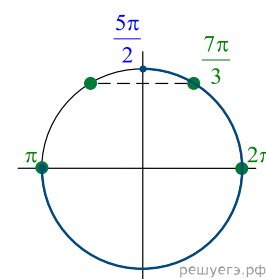
$$4 \sin^3 x + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \sin^2 x + 3 \sin x - 4\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(4 \sin^2 x - 4\sqrt{3} \sin x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ 4 \sin^2 x - 4\sqrt{3} \sin x + 3 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Для второго уравнения сделаем замену $t = \sin x$, получим уравнение $4t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 = 0$. Его дискриминант равен нулю: $\frac{D}{4} = 12 - 12 = 0$, тогда $t = \frac{2\sqrt{3} \pm 0}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Сделав обратную замену, получаем

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни при помощи единичной окружности. Получим π , 2π , $\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $\left\{ \pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\pi, 2\pi, \frac{7\pi}{3}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а)Проведём медиану S_1M треугольника SS_1B , которая пересекает отрезок BB_1 , являющийся медианой треугольника BCD , в точке T . Тогда $BT:TB_1=4:5$, поскольку T — точка пересечения медиан треугольника SS_1B , а O — точка пересечения медиан треугольника BCD .

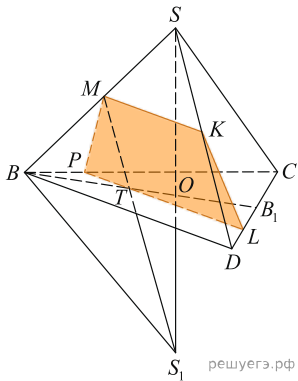
Точка L , в свою очередь, делит отрезок B_1D в отношении $DL:LB_1=4:5$, так как $LD:LC=2:7$, а BB_1 — медиана треугольника BCD .

Следовательно, сторона сечения, проходящая через точки L и T , параллельна стороне BD основания BCD . Пусть прямая LT пересекает BC в точке P .

Проведём в треугольнике SBD через точку M среднюю линию, пусть она пересекает сторону SD в точке K . Тогда $PMKL$ — искомое сечение, причём $BP=DL$ и $BM=KD$. Из равенства треугольников BMP и DKL получим $MP=KL$, а значит, $PMKL$ — равнобедренная трапеция.

б)Большее основание PL трапеции равно7, поскольку треугольник LPC правильный. Второе основание MK равно4,5, поскольку MK — средняя линия правильного треугольника SBD . Следовательно, средняя линия трапеции равна $\frac{7+4,5}{2}=5,75$.

Ответ: 5,75.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Заметим, что значения переменной x положительны. Положим $t = \log_3 x$, тогда

$$\log_3(27x^4) = \log_3 27 + \log_3 x^4 = 3 + 4 \log_3 |x| = 3 + 4 \log_3 x = 3 + 4t,$$
$$\log_3^2 \frac{x^2}{3} - 16 = (\log_3 x^2 - \log_3 3)^2 - 16 = (2t - 1)^2 - 16 = 4t^2 - 4t - 15.$$

Получаем:

$$\frac{8t + 15}{4t^2 - 4t - 15} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{8t + 15 + 4t^2 - 4t - 15}{(2t - 5)(2t + 3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4t(t + 1)}{(2t - 5)(2t + 3)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} < t \leq -1, \\ 0 \leq t < \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} < \log_3 x \leq -1, \\ 0 \leq \log_3 x < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{-\frac{3}{2}} < x \leq 3^{-1}, \\ 3^0 \leq x < 3^{\frac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{9} < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1 \leq x < 9\sqrt{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{3}}{9}; \frac{1}{3}\right] \cup [1; 9\sqrt{3})$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Сумма отличных от нуля налоговых сборов равна произведению величины налога за единицу про-
дукции на количество произведенных единиц, то есть дается функцией $f(t) = (12000 - 2t)t$, где $0 < t < 6000$. Функция
 $f(t)$ — квадратичная с отрицательным старшим коэффициентом. На интервале $(0;6000)$ она достигает наиболь-
шего значения в точке максимума t_{max} . По условию $f(t_0) = f(1,6t_0)$, значит,

$$t_{max} = \frac{t_0 + 1,6t_0}{2} = 1,3t_0.$$

Составим пропорцию:

$$\text{налог } 1,6t_0, \quad \text{—} \quad 100\%$$

налог $1,3t_0$, — $x\%$

откуда

$$x = \frac{1,3t_0 \cdot 100}{1,6t_0} = \frac{1300}{16} = 81,25.$$

Значит, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, государству следует уменьшить налог на $100\% - 81,25\% = 18,75\%$.

Ответ: 18,75.

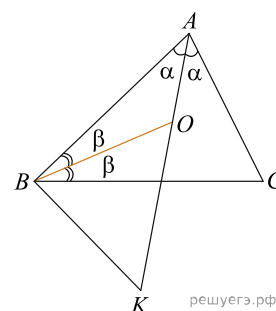
№ 17.

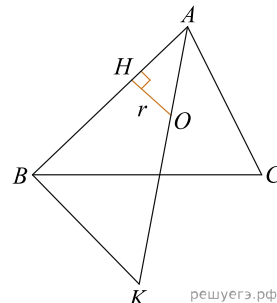
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$. O — центр вписанной окружности треугольника ABC , поэтому AO, BO — биссектрисы углов A и B , значит, $\angle BAO = \alpha$, $\angle ABO = \beta$. Угол BOK внешний для треугольника AOB , поэтому $\angle BOK = \alpha + \beta$. (см. рис.).

$BK = OK$ (по построению), поэтому $\angle OBK = \angle BOK = \alpha + \beta$, тогда $\angle CBK = \angle OBK - \angle CBO = \alpha + \beta - \beta = \alpha$. Углы CBK и KAC опираются на один и тот же отрезок CK и равны друг другу: $\angle CBK = \angle KAC = \alpha$. Тогда по признаку, связанному со свойством вписанных углов, точки A, B, K, C лежат на одной окружности.

б) Обозначим через r, R радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC . Пусть H — проекция точки O на сторону AB (см. рис.), тогда $OH = r$, $AO = \frac{r}{\sin \alpha}$. Точки A, B, K, C лежат на одной окружности, поэтому радиус описанной окружности треугольника ABK совпадает с радиусом описанной окружности треугольника ABC и равен R . Из треугольника ABK по теореме синусов: $\frac{BK}{\sin \alpha} = 2R$, $\sin \alpha = \frac{BK}{2R}$. Тогда



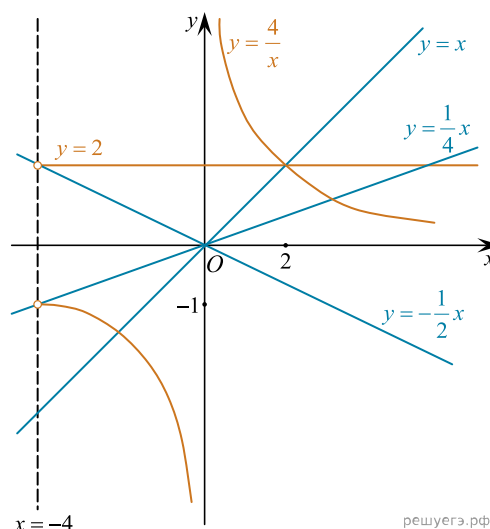


Ответ: 14,4.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a = 0$ и/или $a = \frac{1}{4}$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(0; \frac{1}{4}\right]$ множества значений a , возможно, с включением/исключением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения гиперболы и прямых (аналитически и графически) или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно получены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл:	4

$$\frac{(y-2)(xy-4)}{\sqrt{x+4}} = 0.$$

Таким образом, исходная система имеет ровно два решения при $0 < a \leq \frac{1}{4}$ и при $a = 1$.



Ответ: $0 < a \leq \frac{1}{4}$, $a = 1$.

Приведем аналитическое решение.

Запишем первое уравнение системы в виде

$$\frac{(y-2)(xy-4)}{\sqrt{x+4}}=0.$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{xy^2-2xy-4y+8}{\sqrt{x+4}}=0, \\ y=ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2=0, \\ xy-4=0, \\ x+4>0, \\ y=ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax=2, \\ ax^2=4, \\ x>-4, \\ y=ax. \end{cases}$$

При $a=0$ система решений не имеет. В противном случае первое уравнение имеет корень $x_1=\frac{2}{a}$, который удовлетворяет системе при $a\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$. Второе уравнение имеет два различных корня $x_2=\frac{2}{\sqrt{a}}$, $x_3=-\frac{2}{\sqrt{a}}$ только при $a>0$, причем x_2 является корнем системы при любом положительном a , а x_3 при $a>\frac{1}{4}$. Таким образом, система будет иметь два различных решения при $0<a\leq\frac{1}{4}$. Кроме того, положительные корни x_1 и x_2 могут совпасть $\frac{2}{a}=\frac{2}{\sqrt{a}}$, это происходит при $a=1$.

Ответ: $0<a\leq\frac{1}{4}$, $a=1$.

Примечание.

Полезно сравнить это задание с аналогичной задачей досрочного ЕГЭ 2015 года: найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2-xy-4y+2x+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0, \\ a=x+y. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть волк выиграл x партий, проиграл тоже x , а остальные $2\cdot 10-x-x$ партий сыграл вничью. Тогда он набрал

$$x\cdot 2+x\cdot 0+(20-2x)\cdot 1=20$$

очков.

б) Да, такое могло быть. Пусть лиса выиграла у волка 5 партий, волк у лисы — 4 партии, а заяц выиграл три партии у лисы. Остальные партии завершились вничью. Тогда лиса набрала $5 \cdot 2 + 1 + 7 = 18$ очков, волк — $4 \cdot 2 + 1 + 10 = 19$ очков, а заяц — $3 \cdot 2 + 17 = 23$ очка.

в) Пусть игрок выиграл x партий, проиграл y партий и $20 - x - y$ свел вничью. Тогда он получит

$$2x + 20 - x - y = 20 + x - y$$

очков. При втором же способе подсчета он получит $x - y$ очков. Таким образом, результаты по двум системам оценивания всегда отличаются на 20, и потому результаты всех игроков упорядочены одинаково по обеим системам.

г) Сумма числа выигрышей равна сумме числа проигрышей, потому что и то, и другое — количество партий, закончившихся не вничью. Значит, все слагаемые первой суммы не могут быть больше соответствующих им слагаемых второй.

Ответ: а) 20; б) да; в) нет; г) нет.
