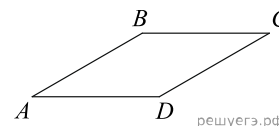


Вариант 248

ID: 13851

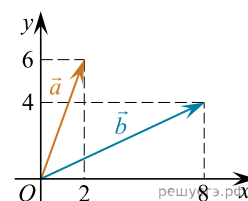
№ 1.

Площадь ромба равна 18. Одна из его диагоналей равна 12. Найдите другую диагональ.



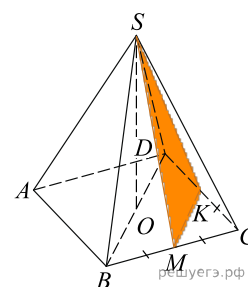
№ 2.

Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 3.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота SO равна 13, диагональ основания BD равна 8. Точки K и M — середины ребер CD и BC соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью SMK и плоскостью основания ABC .



№ 4.

На тарелке 16 пирожков: 7 с рыбой, 5 с вареньем и 4 с вишней. Юля наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

№ 5.

Семена подсолнечника расфасовывают в пакеты по 1кг. Вероятность того, что в случайно выбранном пакете масса семян окажется меньше, чем 1050г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 970г, равна 0,94. Найдите вероятность того, что масса семян в этом пакете окажется в интервале от 970 г до 1050 г.

№ 6.

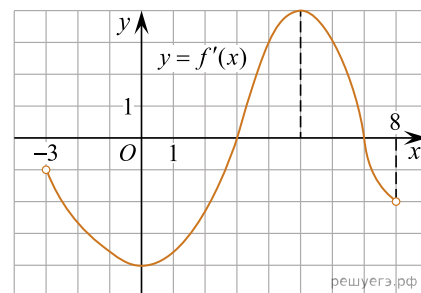
Решите уравнение $\sin \frac{\pi x}{3} = 0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{x^{-5} \cdot x^8}{x}$ при $x = 4$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

**№ 9.**

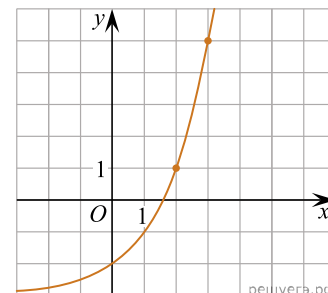
Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ – постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошла 21 с. Ответ дайте в киловольтах.

№ 10.

Расстояние между пристанями A и B равно 120 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B , тотчас повернула обратно и возвратилась в A . К этому времени плот прошел 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 29$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6,5x^2 + 14x - 14$ на отрезке $[-4; 3]$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $2 - 2\cos(\pi + 2x) - \sqrt{8}\cos x = \sqrt{6} - \sqrt{12}\cos x$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.
-

№ 14.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно 12, а сторона основания AB равна 6. В боковых гранях SAB и SAD провели биссектрисы AL и AM соответственно.

- а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью ALM делит ребро SC пополам.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью ALM .

№ 15.

Решите неравенство $\frac{3^{\sqrt{x}}}{3^{\sqrt{x}} - 81} \geq \frac{15 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 81}{9^{\sqrt{x}} - 84 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 243}$.

№ 16.

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

№ 17.

Дан равносторонний треугольник ABC . На стороне AC выбрана точка M , серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает сторону AB в точке E , а сторону BC в точке K .

- а) Докажите, что угол AEM равен углу CMK .
 - б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и CMK , если $AM : CM = 1 : 4$.
-

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых решением неравенства

$$\frac{(x-2) \ln \frac{4+x-a}{3}}{\sqrt{6-x}} \leq 0$$

является отрезок длиной 1.

№ 19.

На острове живут 3 серых, 28 бурых и 29 малиновых хамелеонов. При встрече двух хамелеонов разных цветов оба меняют свой цвет на третий (серый и бурый оба становятся малиновыми и т. п.).

а) Может ли в некоторый момент времени на острове оказаться 15 серых, 28 бурых и 17 малиновых хамелеонов?

б) Может ли некоторый момент времени на острове оказаться 60 серых хамелеонов?

в) Какое наибольшее количество серых хамелеонов может оказаться на острове, при условии, что малиновых хамелеонов в этот момент времени ровно 2?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27615	3
2	27730	20
3	501189	6,5
4	1024	0,25
5	680565	0,91
6	77377	0,5
7	26901	16
8	656609	7
9	27994	2
10	99602	22
11	509095	5
12	126637	-3,5

№ 13.

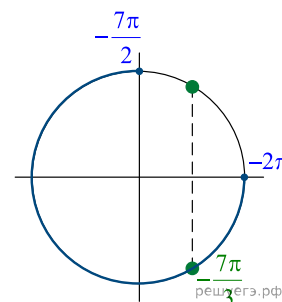
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Последовательно получаем:

$$8 \sin^2 x - 6 \cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow 8 - 8 \cos^2 x - 6 \cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow 8 \cos^2 x + 6 \cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{5}{4}, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$. Подходит число $-\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$.

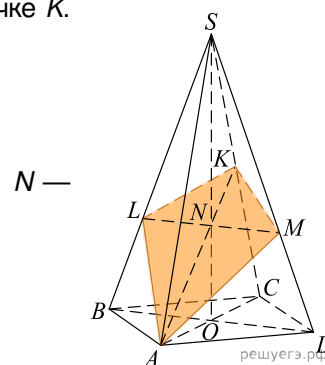
№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть сечение пирамиды плоскостью ALM пересекает ребро SC в точке K . По свойству биссектрисы

$$\frac{SM}{DM} = \frac{SL}{BL} = \frac{SA}{AB} = 2.$$

Из подобия треугольников LSM и BSD следует, что $SN : ON = 2 : 1$. Таким образом, точка пересечения медиан в треугольнике ASC , а AK — медиана. Поэтому $SK = CK$.



б) Диагонали сечения LM и AK перпендикулярны, поэтому

$$S_{ALKM} = \frac{AK \cdot LM}{2}.$$

Имеем

$$LM = \frac{2}{3}BD = 4\sqrt{2}.$$

В треугольнике ACK по теореме косинусов

$$AK^2 = AC^2 + CK^2 - 2 \cdot AC \cdot CK \cdot \cos \angle ACK \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle ACK = \frac{CO}{SC} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow AK = 6\sqrt{2}.$$

Тогда $S_{ALKM} = 24$.

Ответ: б) 24.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $3^{\sqrt{x}}=t$, тогда

$$\frac{t}{t-81} \geq \frac{15t-81}{t^2-84t+243} \Leftrightarrow \frac{t}{t-81} - \frac{15t-81}{(t-81)(t-3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2-3t-15t+81}{(t-81)(t-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2-18t+81}{(t-81)(t-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-9)^2}{(t-81)(t-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < 3, \\ t = 9, \\ t > 81. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{t^2-3t-15t+81}{(t-81)(t-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2-18t+81}{(t-81)(t-3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-9)^2}{(t-81)(t-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < 3, \\ t = 9, \\ t > 81. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}} < 3, \\ 3^{\sqrt{x}} = 9, \\ 3^{\sqrt{x}} > 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < 1, \\ \sqrt{x} = 2, \\ \sqrt{x} > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1, \\ x = 4, \\ x > 16. \end{cases}$$

Ответ: $[0; 1) \cup \{4\} \cup (16; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть повышающий коэффициент $1+\frac{r}{100}=k$. В соответствии с этим обозначением и условием задачи заполним таблицу.

Месяц	Долг на 1-е число, млн. руб	Выплата, млн. руб	Долг на 15-е число, млн. руб
Январь			1
Февраль	k	$k - 0,6$	0,6
Март	$0,6k$	$0,6k - 0,4$	0,4
Апрель	$0,4k$	$0,4k - 0,3$	0,3
Май	$0,3k$	$0,3k - 0,2$	0,2
Июнь	$0,2k$	$0,2k - 0,1$	0,1
Июль	$0,1k$	$0,1k$	0

Найдём общую сумму выплат, сложив ежемесячные выплаты:

$$\begin{aligned}
 & (k - 0,6) + (0,6k - 0,4) + (0,4k - 0,3) + (0,3k - 0,2) + (0,2k - 0,1) + 0,1k = (k - 0,6) + (0,6k - 0,4) + (0,4k - 0,3) + \\
 & \quad + (0,3k - 0,2) + (0,2k - 0,1) + 0,1k = \\
 & = k(1 + 0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) - (0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) = 2,6k - 1,6 = k(1 + 0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) - (0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) = \\
 & \quad = 2,6k - 1,6
 \end{aligned}$$

По условию

$$2,6k - 1,6 < 1,2 \Leftrightarrow 2,6k < 2,8 \Leftrightarrow k < \frac{14}{13}.$$

Значит,

$$1 + \frac{r}{100} < \frac{14}{13} \Leftrightarrow \frac{r}{100} < \frac{1}{13} \Leftrightarrow r < \frac{100}{13} \Leftrightarrow r < 7\frac{9}{13}.$$

Наибольшее целое значение $r = 7$. Таким образом, ежемесячно остаток долга возрастал на 7%.

Ответ: $r = 7$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть $\angle AEM = \alpha$, тогда $\angle AME = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha$. Треугольники BEK и MEK равны, поскольку они симметричны относительно EK . Тогда $\angle EMK = 60^\circ$ и

$$\angle CMK = 180^\circ - (120^\circ - \alpha) - 60^\circ = \alpha = \angle AEM.$$

б) Пусть $AM = x$, $CM = 4x$, $AE = y$, тогда $BE = EM = 5x - y$. Пусть также $CK = t$, тогда $BK = KM = 5x - t$. Из подобия треугольников AME и CKM находим:

$$\frac{AE}{MC} = \frac{AM}{KC} = \frac{ME}{KM} \Rightarrow \frac{y}{4x} = \frac{x}{t} = \frac{5x - y}{5x - t},$$

тогда

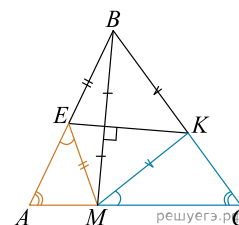
$$\begin{cases} yt = 4x^2, \\ x(5x - t) = (5x - y)t, \end{cases}$$

откуда

$$5x^2 - xt = 5xt - 4x^2 \Leftrightarrow 9x^2 = 6xt \Leftrightarrow 3x = 2t.$$

Таким образом, $\frac{AM}{KC} = \frac{2}{3}$, следовательно, $\frac{S_{AME}}{S_{KMC}} = \left(\frac{AM}{KC}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Ответ: 4:9.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Неравенство определено при $x < 6$. Знаменатель принимает лишь положительные значения, пользуясь методом рационализации, получим:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} (x-2) \ln \frac{4+x-a}{3} \leq 0, \\ x < 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) \left(\frac{4+x-a}{3} - 1 \right) \leq 0, \\ x < 6, \\ 4+x-a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-a+1) \leq 0, \\ x < 6, \\ x > a-4. \end{cases} \begin{cases} (x-2) \ln \frac{4+x-a}{3} \leq 0, \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) \left(\frac{4+x-a}{3} - 1 \right) \leq 0, \\ x < 6, \\ 4+x-a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-a+1) \leq 0, \\ x < 6, \\ x > a-4. \end{cases} \begin{cases} (x-2) \ln \frac{4+x-a}{3} \leq 0, \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) \left(\frac{4+x-a}{3} - 1 \right) \leq 0, \\ x < 6, \\ 4+x-a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-a+1) \leq 0, \\ x < 6, \\ x > a-4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Если $a-1 > 2$, есть $a > 3$, то решением этого неравенства является промежуток $[2; a-1]$. Дополнительные условия $x > a-4$ или $x < 6$ могут изменить его, но тогда он перестанет быть отрезком и станет интервалом. Значит, $a-1 = 3$, то есть $a = 4$, и дополнительные условия не влияют на отрезок.

Если $a-1 < 2$, то есть $a < 3$, то решением этого неравенства является отрезок $[a-1; 2]$. Заметим, что $a-4 < a-1$ и $2 < 6$. Значит, $a-1 = 1$, то есть $a = 2$.

Если $a-1 = 2$, то есть $a = 3$, то решением этого неравенства будет только $x = 2$, что не подходит.

Ответ: $a = 2$ или $a = 4$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в)	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б)	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Сразу заметим, что количества хамелеонов разных цветов дают различные остатки от деления на 3, и эта ситуация сохраняется— можно считать, что при встрече количество всех видов хамелеонов уменьшается на 1 (и все остатки по-прежнему разные), а затем количество хамелеонов одного из цветов увеличивается на 3, что не влияет на остатки. Более того, сохраняются разности между остатками. То есть если изначально разность между числом малиновых и числом бурых давала при делении на 3 остаток 1, то это свойство сохранится и в дальнейшем (при «правильном» понимании остатков для отрицательных чисел— например, -10 при делении на 3 дает остаток 2, поскольку $-10 = -4 \cdot 3 + 2$).

а) Если встретятся малиновый и бурый хамелеоны, потом снова малиновый и бурый, а потом малиновый и серый, то за эти три встречи число бурых хамелеонов не изменится, число серых вырастет на 3, а число малиновых уменьшится на 3. Повторяя такую последовательность встреч 4 раза, получим требуемое.

б) Количества хамелеонов должны стать равными 60, 0, 0, то есть все должны давать одинаковые остатки от деления на 3, что невозможно.

в) В силу замечания в начале решения, разность между количествами малиновых и бурых хамелеонов при делении на 3 всегда дает остаток 1, поэтому если малиновых хамелеонов 2, то бурых не может быть 0. Значит, серых не более $60 - 2 - 1 = 57$. Такого количества легко добиться, обеспечив 27 встреч между бурым и малиновым хамелеонами.

Ответ: а) да; б) нет; в) 57.
