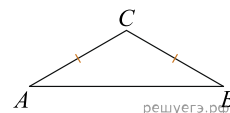


Вариант 249

ID: 13867

№ 1.

В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120° , $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите AC .

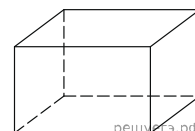


№ 2.

Даны векторы $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 6)$ и $\vec{c} = (4; -2)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

№ 3.

Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.

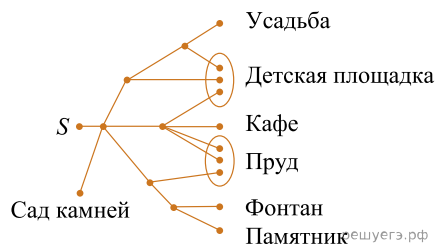


№ 4.

Проводится жеребьёвка Лиги Чемпионов. На первом этапе жеребьёвки восемь команд, среди которых команда «Барселона», распределены случайным образом по восьми игровым группам— по одной команде в группу. Затем по этим же группам случайным образом распределяются еще восемь команд, среди которых команда «Зенит». Найдите вероятность того, что команды «Барселона» и «Зенит» окажутся в одной игровой группе.

№ 5.

Артём гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к пруду или фонтану.



№ 6.

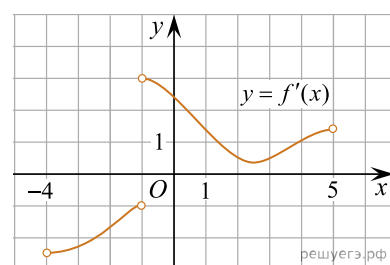
Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{10-3x} = 32$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$.

№ 8.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на полуинтервале $[-4; 5)$. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



№ 9.

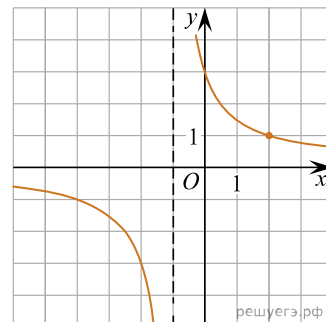
Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км)— радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 4 километра? Ответ выразите в километрах.

№ 10.

Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять таких же рубашек дороже куртки?

№ 11.

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x+a}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 0,2$.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 7 + 12x - x^3$ на отрезке $[-2; 2]$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $\log_2 \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + \log_2 \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -1$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.
-

№ 14.

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на боковых ребрах AA_1 и DD_1 взяты соответственно точки K и M так, что $AK : A_1 K = 2 : 3$, $DM : D_1 M = 4 : 1$.

- а) Докажите, что плоскость BMK параллельна прямой AC .
б) Найдите расстояние от точки A до плоскости BMK , если $AB = 8$, $AA_1 = 10$.
-

№ 15.

Решите неравенство $\frac{3}{x^2 + 13x + 40} \geq \frac{1}{x^2 + 15x + 56}$.

№ 16.

В августе 2020 года взяли кредит. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$;
- с февраля по июль необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за три года равными платежами по 56595 рублей, или за два года равными платежами по 81 095 рублей.

Найдите r .

№ 17.

Окружность с центром O , построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает гипотенузу AB в точках A и D . Касательная, проведенная к этой окружности в точке D , пересекает катет BC в точке M .

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Прямая DM пересекает прямую AC в точке P , прямая OM пересекает прямую BP в точке K . Найдите $BK:KP$, если $\cos \angle BAC = \frac{4}{5}$.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 2|x + 2y - 5|, \\ 2x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

№ 19.

Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа — n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за все время сделала суммарно на 1615 фотографий больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

а) Могли ли они фотографировать в течение 5 дней?

б) Могли ли они фотографировать в течение 6 дней?

в) Какое наибольшее суммарное количество фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 30 фотографий?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27799	2
2	644850	10
3	27076	48
4	500037	0,125
5	562239	0,3125
6	510382	5
7	26745	1
8	551783	9
9	263802	0,00125
10	99567	15
11	508983	14
12	77437	-9

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

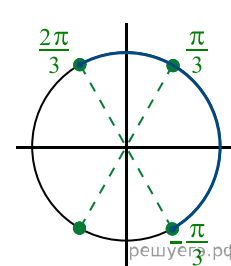
Решение. а) Пусть $4\cos^2 x = t$, тогда имеем:

$$\begin{aligned}
 \log_{3-t}(9-t^2) &= 2 + \frac{1}{\log_2(3-t)} \Leftrightarrow \log_{3-t}((3-t)(3+t)) = 2 + \log_{3-t} 2 \Leftrightarrow \log_{3-t}(9-t^2) = 2 + \frac{1}{\log_2(3-t)} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \log_{3-t}((3-t)(3+t)) = 2 + \log_{3-t} 2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1 + \log_{3-t}(3+t) &= 2 + \log_{3-t} 2 \Leftrightarrow \log_{3-t} \frac{3+t}{2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3+t}{2} = 3-t, \\ 3-t > 0, \\ 3-t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1. \Leftrightarrow 1 + \log_{3-t}(3+t) = 2 + \log_{3-t} 2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \log_{3-t} \frac{3+t}{2} &= 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3+t}{2} = 3-t, \\ 3-t > 0, \\ 3-t \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.
 \end{aligned}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$4\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи единичной окружности отберём корни, лежащие на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$. Получаем числа $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.



Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть L — точка пересечения плоскости BMK с ребром CC_1 . В грани AA_1DD_1 построим прямую KR , параллельную AD и параллельную BC . Далее, $DR:RM:MD_1 = 2:2:1$, тогда из параллельности KM и BL получаем, что треугольники KRM и BCL равны. Следовательно, $CL:LC_1 = 2:3 = AK:KA$. Таким образом, по теореме Фалеса AC и KL параллельны A_1C_1 и, следовательно, плоскость BMK параллельна прямой AC .

б) Вычислим двумя способами объем пирамиды $AKLB$. С одной стороны, $V = \frac{1}{3}S_{BKL} \cdot h_a$. С другой стороны, $V = \frac{1}{3}S_{AKB} \cdot h_l$, где h_a и h_l — высоты, проведенные из соответствующих вершин. Таким образом, h_a является искомым расстоянием.

Вычислим:

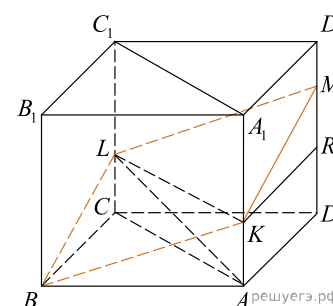
$$AK = \frac{2}{5}AA_1 = 4,$$

$$BK = BL = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5},$$

$$KL = AC = 8\sqrt{2}.$$

Вычислим площадь треугольника BLK : $S_{BLK} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot h_b = 16\sqrt{6}$. Вычислим площадь треугольника ABK : $S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AK = 16$, найдем $h_l = BC = 8$. Получаем: $16\sqrt{6} \cdot h_a = 16 \cdot 8$, откуда $h_a = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{3}{(x+5)(x+8)} - \frac{1}{(x+7)(x+8)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3(x+7) - (x+5)}{(x+5)(x+7)(x+8)} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x+16}{(x+5)(x+7)(x+8)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{(x+5)(x+7)} \geq 0, \\ x \neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -8, \\ -8 < x < -7, \\ x > -5. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2x+16}{(x+5)(x+7)(x+8)} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{(x+5)(x+7)} \geq 0, \\ x \neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -8, \\ -8 < x < -7, \\ x > -5. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -8) \cup (-8; -7) \cup (-5; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть сумма кредита S , ежегодные выплаты x , $k = 1 + \frac{r}{100}$. По условию долг на июль меняется так:

$$S, \quad kS - x, \quad k^2S - kx - x, \quad k^3S - k^2x - kx - x,$$

Если долг выплачен двумя равными платежами x_2 , то

$$k^2S - kx_2 - x_2 = 0 \Leftrightarrow Sk^2 = kx_2 + x_2.$$

Если долг выплачен тремя равными платежами x_3 , то

$$k^3S - k^2x_3 - kx_3 - x_3 = 0.$$

Подставим в это уравнение выражение для Sk^2 , получаем:

$$k(kx_2 + x_2) - k^2x_3 - kx_3 - x_3 = 0$$

$$k^2x_2 + kx_2 - k^2x_3 - kx_3 - x_3 = 0$$

$$k^2(x_2 - x_3) + k(x_2 - x_3) - x_3 = 0$$

$$(k^2 + k)(x_2 - x_3) - x_3 = 0$$

$$k^2 + k - \frac{x_3}{x_2 - x_3} = 0.$$

По условию $x_3 = 56595$, а $x_2 = 81095$, тогда

$$\frac{x_3}{x_2 - x_3} = \frac{56595}{81095 - 56595} = \frac{56595}{24500} = 2,31.$$

Откуда получаем для k :

$$k^2 + k - 2,31 = 0.$$

Откуда получаем посторонний корень $k = -2,1$ и корень $k = 1,1$, а следовательно, $r = 10$.

Ответ: 10.

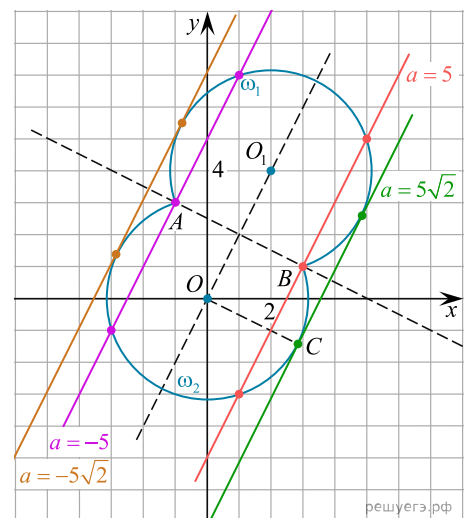
Примечание.

Наш читатель Валерий Григорьев заметил, что сумма, взятая в кредит, не выражается конечной десятичной дробью. Хотя возможность взять такую сумму в кредит вызывает сильные сомнения, это не влияет на правильность приведенного решения и ответа.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Ответ: $\frac{7}{25}$.



Заметим, что точка $C(2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ лежит на дуге ω_2 и прямая OC перпендикулярна прямой O_1O , поскольку произведение угловых коэффициентов данных прямых равно -1 .

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m , параллельную прямой O_1O или совпадающую с ней.

При $a = -5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке A и ещё в одной точке, отличной от точки A , то есть исходная система имеет три решения.

Аналогично, при $a = 5$ прямая m проходит через точку B и исходная система имеет три решения.

При $a = -5\sqrt{2}$ прямая m проходит через точку C , значит, прямая m касается дуг ω_2 и ω_1 , то есть исходная система имеет два решения.

Аналогично, при $a = 5\sqrt{2}$ прямая m касается дуг ω_2 и ω_1 , то есть исходная система имеет два решения.

При $-5\sqrt{2} < a < -5$ или $5 < a < 5\sqrt{2}$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в двух точках, отличных от точек A и B , то есть исходная система имеет четыре решения.

При $-5 < a < 5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке, отличной от точек A и B , то есть исходная система имеет два решения.

При $a < -5\sqrt{2}$ или $a > 5\sqrt{2}$ прямая m не пересекает дуги ω_1 и ω_2 , то есть исходная система не имеет решений.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $-5\sqrt{2} < a \leq -5$ или $5 \leq a < 5\sqrt{2}$.

Ответ: $-5\sqrt{2} < a \leq -5, 5 \leq a < 5\sqrt{2}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснование в п. в того, что S может принимать все целые значения (отличные от -1 и 1); — обоснование в п. в того, что равенства $S = -1$ и $S = 1$ невозможны	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Допустим, они фотографировали k дней, тогда разница между сделанными фотографиями составляет $k(n - m) = 1615$.

а) Да, например при $m = 1, n = 324$.

б) Нет, 1615 не делится на 6 .

в) Чтобы у Наташи получилось как можно больше фотографий, надо чтобы у Маши получилось как можно больше фотографий. Если у нее в последний день не 29 — добавим ей поровну фотографий в каждый день так, чтобы стало 29 . Заметим далее, что k — делитель числа 1615 , не больший 30 , то есть $1, 5, 17, 19$. Если они фотографировали меньше 19 дней— добавим Маше недостающие дни в начало. Итак, оптимальный вариант для Маши — начать с 11 и фотографировать 19 дней. Поэтому у Наташи будет $\frac{11 + 29}{2} \cdot 19 + 1615 = 1995$ фотографий.

Ответ: а) да; б) нет; в) 1995 .

