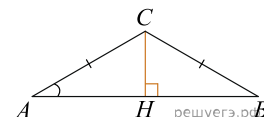


Вариант 250

ID: 13873

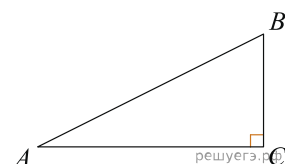
№ 1.

В треугольнике ABC $AC = BC = 7$, $\operatorname{tg} A = \frac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите AB .



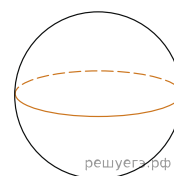
№ 2.

В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен $\sqrt{3}$. Найдите скалярное произведение $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



№ 3.

Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?



№ 4.

В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос о Великой Отечественной войне. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос о Великой Отечественной войне.

№ 5.

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей— 1 очко, если проигрывает— 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

№ 6.

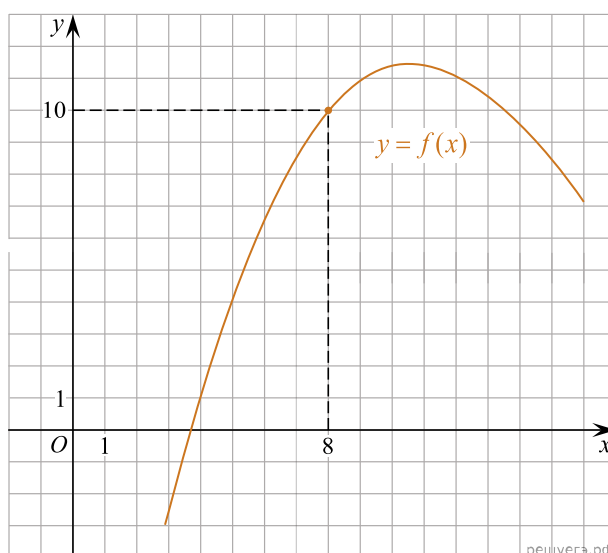
Решите уравнение $\sqrt{6+5x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{12\sqrt[9]{m} \cdot \sqrt[18]{m}}{\sqrt[6]{m}}$ при $m > 0$.

№ 8.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f'(8)$.



№ 9.

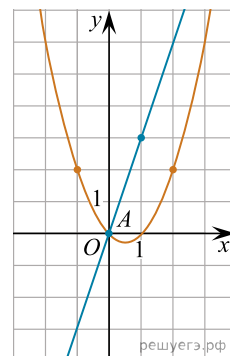
Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 20^\circ/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4^\circ/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1200° . Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах.

№ 10.

Имеется два сплава. Первый содержит 15% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 140 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

№ 11.

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

**№ 12.**

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ на отрезке $[-4; -1]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $(27^{\cos x}) \sin x = 3^{\frac{3 \cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$.

№ 14.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через середину M диагонали AC_1 проведена плоскость α перпендикулярно этой диагонали, $AB = 5$, $BC = 3$ и $AA_1 = 4$.

- Докажите, что плоскость α содержит точку D_1 .
 - Найдите отношение, в котором плоскость α делит ребро $A_1 B_1$.
-

№ 15.

Решите неравенство: $\log_{x+6} \left(\frac{x-4}{x} \right)^2 + \log_{x+6} \frac{x}{x-4} \leq 1$.

№ 16.

В августе 2020 года взяли кредит. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$;
- с февраля по июль необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за три года равными платежами по 56595 рублей, или за два года равными платежами по 81 095 рублей.

Найдите r .

№ 17.

Из точки M вне окружности проведены касательные и секущая, причем точки касания и точки пересечения секущей с окружностью являются вершинами некоторой трапеции. Угол между касательными равен 60° .

- Докажите, что диагональ трапеции равна отрезку касательной от точки M до точки касания.
 - Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему.
-

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + 4x^2 = (3x + 5a)^3 + 6x + 10a$$

не имеет корней.

№ 19.

На сайте выложено k видеоуроков по математике продолжительностью ровно 1 мин., 2 мин., 3 мин., ..., k мин. Виктор хочет за несколько дней посмотреть их все ровно по одному разу, затрачивая на это ровно полчаса каждый день. (Смотреть видеоуроки можно в любом порядке, но обязательно полностью).

- а) Возможно ли это при $k = 15$?
- б) Возможно ли это при $k = 10$?
- в) Найдите все натуральные k , при которых это возможно.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27288	8
2	654449	3
3	27097	27
4	504230	0,26
5	320188	0,32
6	77375	6
7	26825	12
8	40129	1,25
9	27963	20
10	526011	70
11	642407	4
12	628240	-9

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) По смыслу задачи $\sin x > 0$, поэтому

$$\log_2 \sin^2 x = 2 \log_2 |\sin x| = 2 \log_2 \sin x.$$

Выражение $\log_2 \sin x$ либо равно нулю, либо на него можно сократить обе части уравнения:

$$\log_2^2 \sin x + 2 \log_2 \sin x = \log_2 5 \cdot \log_2 \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \sin x = 0, \\ \log_2 \sin x + 2 = \log_2 5. \end{cases}$$

Поскольку $\log_2 5 - 2 = \log_2 5 - \log_2 4 = \log_2 \frac{5}{4}$, находим:

$$\begin{cases} \log_2 \sin x = 0, \\ \log_2 \sin x = \log_2 \frac{5}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = \frac{5}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни при помощи двойного неравенства. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\pi &\Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2} + 2k \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq 2k \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = 0. \\ \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\pi &\Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2} + 2k \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq 2k \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = 0. \end{aligned}$$

Найденному значению параметра соответствует корень $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{\pi}{2}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. Приведем решение при помощи векторов. Введём базис $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$.
 Длины базисных векторов известны: 5, 3 и 4 соответственно.

а) Достаточно показать, что вектор $\overrightarrow{MD_1}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{AC_1}$:

$$\overrightarrow{MD_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}).$$

Попарные произведения базисных векторов равны нулю, поэтому выражение принимает вид:

$$\overrightarrow{MD_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}^2 = \frac{1}{2}(-25 + 16 + 9) = 0.$$

б) Достаточно найти точку T на ребре A_1B_1 такую, что $\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0$. Получаем:

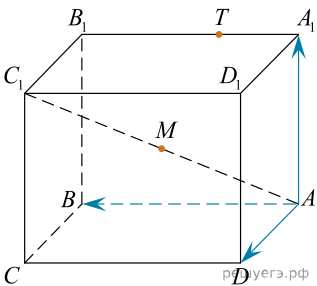
$$(\overrightarrow{MA_1} + t\overrightarrow{A_1B_1}) \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0,$$

$$\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) = 0,$$

откуда

$$\left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot 25 - \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 0 \Leftrightarrow 25t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{9}{25}.$$

Значит, точка T делит ребро A_1B_1 в отношении 9 : 16, считая от точки A_1 .



Приведем решение методом координат (Ирина Шраго).

а) Введем систему координат с центром в точке B , направив ось Ox вдоль ребра BA , ось Oy вдоль ребра BC и ось Oz вдоль ребра BB_1 . В этой системе координат: $A(5; 0; 0)$; $C_1(0; 3; 4)$; $D_1(5; 3; 4)$; $M(2,5; 1,5; 2)$, $\overrightarrow{AC_1} = (-5; 3; 4)$. Запишем уравнение плоскости α , проходящей через точку M перпендикулярно прямой AC_1 :

$$-5(x - 2,5) + 3(y - 1,5) + 4(z - 2) = 0 \Leftrightarrow -5x + 3y + 4z = 0.$$

Координаты точки D_1 удовлетворяют уравнению плоскости α : $-5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 0$, следовательно, точка D_1 принадлежит плоскости.

б) Пусть плоскость α пересекает ребро A_1B_1 в точке $T(t; 0; 4)$. Тогда $-5 \cdot t + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = 0$, откуда $t = \frac{16}{5}$. Следовательно,

$$-\frac{B_1T}{TA_1} = \frac{\frac{16}{5}}{5 - \frac{16}{5}} = \frac{16}{9}.$$

Следовательно, плоскость α делит ребро A_1B_1 в отношении 16:9, считая от вершины B_1 , или в отношении 9:16, считая от вершины A_1 .

Примечание.

Сечения параллелепипеда плоскостью, перпендикулярной его диагонали, может быть треугольником, четырех-, пяти- или шестиугольником, поэтому построить сечение можно только решив пункта). Далее заметим, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии, поэтому наряду с точкой D_1 сечение содержит и центрально симметричную ей точку B . Осталось провести отрезки TB и TD_1 , а в противоположных гранях — параллельные им отрезки, проходящие через точки D_1 и B соответственно (см. рис.)

Читателю будет полезно сравнить решение этой задачи с задачами [561194](#) и [556601](#).

Приведём другое решение.

б) Чтобы решить задачу, достаточно построить прямую, по которой плоскость сечения пересекает верхнее основание параллелепипеда. Для этого в прямоугольнике AA_1C_1C через точку M проведем перпендикулярно диагонали AC_1 прямую MK . Далее, в плоскости верхнего основания параллелепипеда через точку K перпендикулярно диагонали A_1C_1 проведем прямую KT . Прямая A_1C_1 является проекцией прямой AC_1 на плоскость верхнего основания, поэтому прямая KT также перпендикулярна прямой AC_1 в силу теоремы, обратной теореме о трех перпендикулярах. Плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые, перпендикулярные данной прямой, перпендикулярна этой прямой. Поэтому плоскость, проходящая через точки M , T и K , есть плоскость α . Таким образом, плоскость сечения пересекает верхнее основание по прямой TK .

Прямоугольные треугольники KMC_1 и AA_1C_1 подобны, поэтому $C_1K : AC_1 = C_1M : A_1C_1$, откуда

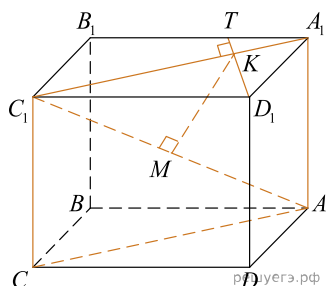
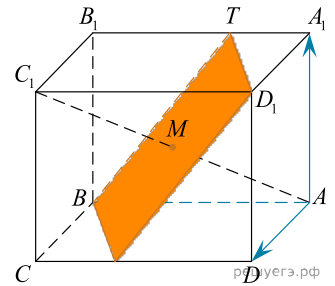
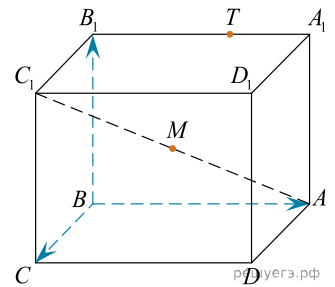
$$C_1K = \frac{C_1M \cdot AC_1}{A_1C_1} = \frac{\frac{\sqrt{50}}{2} \cdot \sqrt{50}}{\sqrt{34}} = \frac{25\sqrt{34}}{34},$$

а потому $A_1K = \frac{9\sqrt{34}}{34}$.

В силу подобия прямоугольных треугольников TKA_1 и $C_1B_1A_1$ находим: $\frac{TA_1}{A_1C_1} = \frac{A_1K}{A_1B_1}$, откуда

$$TA_1 = \frac{A_1K \cdot A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{\frac{9\sqrt{34}}{34} \cdot \sqrt{34}}{5} = \frac{9}{5}.$$

а потому $\frac{A_1T}{A_1B_1} = \frac{9}{25}$. Таким образом,



$$A_1T = \frac{9}{25}A_1B_1,$$

$$TB_1 = \frac{16}{25}TB_1,$$

$$A_1T : TB_1 = \frac{9}{16}.$$

Следовательно, плоскость α делит ребро A_1B_1 в отношении $16 : 9$, считая от вершины B_1 .

а) Покажем, что $KT + KD_1 = TD_1$. Найдем катеты прямоугольных треугольников TKA_1 и A_1KD_1 по теореме Пифагора и сложим их длины:

$$TK = \sqrt{\frac{81}{25} - \frac{81}{34}} = \frac{27}{5\sqrt{34}},$$

$$KD_1 = \sqrt{9 - \frac{81}{34}} = \frac{15}{\sqrt{34}},$$

$$TK + KD_1 = 27 + \frac{75}{5\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{5}.$$

Гипотенуза прямоугольного треугольника TA_1D_1 имеет ту же длину:

$$TD_1 = \sqrt{\frac{81}{25} + 9} = \frac{3\sqrt{34}}{5}.$$

Таким образом, точки T , K и D_1 лежат на одной прямой, а значит, плоскость сечения пересекает верхнее основание параллелепипеда по отрезку TD_1 , то есть содержит вершину D_1 . Это и требовалось доказать.

Ответ: б) в отношении $16 : 9$, считая от вершины B_1 .

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство:

$$2\log_{x+6} \frac{x-4}{x} - \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1.$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x+6 > 1 \Leftrightarrow x > -5$.

$$\log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{x-4}{x} \leq x+6 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+5x+4}{x} \geq 0, \\ \frac{x-4}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(x+4)}{x} \geq 0, \\ \frac{x-4}{x} > 0, \end{cases}$$

откуда находим: $[-4, -1] \cup (4, +\infty)$. Полученные значения переменной удовлетворяют условию $x > -5$.

Второй случай: $0 < x+6 < 1 \Leftrightarrow -6 < x < -5$. Имеем:

$$\begin{aligned} \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{x-4}{x} \geq x+6 \Leftrightarrow \frac{x^2+5x+4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+4)}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4, \\ -1 \leq x < 0. \end{cases} \\ \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{x-4}{x} \geq x+6 \Leftrightarrow \frac{x^2+5x+4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+4)}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4, \\ -1 \leq x < 0. \end{cases} \\ \log_{x+6} \frac{x-4}{x} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{x-4}{x} \geq x+6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+5x+4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+4)}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4, \\ -1 \leq x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая условие $0 < x+6 < 1$, получаем: $-6 < x < -5$. Решение неравенства: $(-6, -5) \cup [-4, -1] \cup (4, +\infty)$.

Ответ: $(-6, -5) \cup [-4, -1] \cup (4, +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть сумма кредита S , ежегодные выплаты x , $k = 1 + \frac{r}{100}$. По условию долг на июль меняется так:

$$S, \quad kS - x, \quad k^2S - kx - x, \quad k^3S - k^2x - kx - x,$$

Если долг выплачен двумя равными платежами x_2 , то

$$k^2S - kx_2 - x_2 = 0 \Leftrightarrow Sk^2 = kx_2 + x_2.$$

Если долг выплачен тремя равными платежами x_3 , то

$$k^3S - k^2x_3 - kx_3 - x_3 = 0.$$

Подставим в это уравнение выражение для Sk^2 , получаем:

$$k(kx_2 + x_2) - k^2x_3 - kx_3 - x_3 = 0$$

$$k^2x_2 + kx_2 - k^2x_3 - kx_3 - x_3 = 0$$

$$k^2(x_2 - x_3) + k(x_2 - x_3) - x_3 = 0$$

$$(k^2 + k)(x_2 - x_3) - x_3 = 0$$

$$k^2 + k - \frac{x_3}{x_2 - x_3} = 0.$$

По условию $x_3 = 56595$, а $x_2 = 81095$, тогда

$$\frac{x_3}{x_2 - x_3} = \frac{56595}{81095 - 56595} = \frac{56595}{24500} = 2,31.$$

Откуда получаем для k :

$$k^2 + k - 2,31 = 0.$$

Откуда получаем посторонний корень $k = -2,1$ и корень $k = 1,1$, а следовательно, $r = 10$.

Примечание.

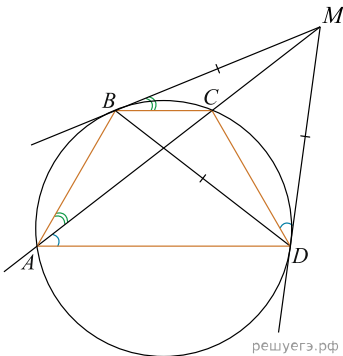
Наш читатель Валерий Григорьев заметил, что сумма, взятая в кредит, не выражается конечной десятичной дробью. Хотя возможность взять такую сумму в кредит вызывает сильные сомнения, это не влияет на правильность приведенного решения и ответа.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точки B и D — точки касания, а точки A и C — точки пересечения прямых и окружности (см.рис.). Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, поэтому $MD = MB$. Следовательно, треугольник DMB — равнобедренный с углом 60° , то есть равносторонний. Таким образом, $MD = BD$.

б)Трапеция вписана, поэтому является равнобокой, откуда $AC = BD$. Пусть $MD = x$. Квадрат длины отрезка касательной, проведенной из точки вне окружности, равен произведению длины всей секущей, проходящей через ту же точку, на длину ее внешней части, тогда



$$\begin{aligned}
 MD^2 &= MC \cdot MA \Leftrightarrow x^2 = MC \cdot (MC + x) \Leftrightarrow MC^2 + MC \cdot x - x^2 = 0 \Leftrightarrow_{x>0} \\
 \Leftrightarrow \frac{MC^2}{x^2} + \frac{MC}{x} - 1 &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{MC}{x}\right)^2 + \frac{MC}{x} - 1 = 0. MD^2 = MC \cdot MA \Leftrightarrow x^2 = MC \cdot (MC + x) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow MC^2 + MC \cdot x - x^2 &= 0 \Leftrightarrow_{x>0} \\
 \Leftrightarrow \frac{MC^2}{x^2} + \frac{MC}{x} - 1 &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{MC}{x}\right)^2 + \frac{MC}{x} - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Пусть $t = \frac{MC}{x}$, тогда уравнение принимает вид $t^2 + t - 1 = 0$. Оно имеет один положительный корень $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Значит, $\frac{MC}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

По теореме об угле между касательной и хордой получаем $\angle MDC = \angle MAD$, $\angle MBC = \angle MAB$. Тогда треугольники MDC и MAD подобны по двум углам, аналогично подобны треугольники MBC и MAB . Из этих подобий находим

$$\frac{CD}{AD} = \frac{MD}{MA} = \frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AB}.$$

Длина отрезка секущей MA равна

$$MA = MC + AC = MC + MD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x + x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x,$$

поэтому

$$\frac{AD}{CD} = \frac{MA}{MD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ так как } x : x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Аналогично $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Трапеция равнобокая, следовательно, $AB = CD$, тогда

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Заметим, что исходное уравнение можно записать в виде

$$(2x^2)^3 + 2 \cdot (2x^2) = (3x + 5a)^3 + 2 \cdot (3x + 5a).$$

Рассмотрим функцию $y(t) = t^3 + 2t$.

Её производная $y'(t) = 3t^2 + 2 > 0$, значит, функция $y(t)$ является возрастающей и каждое свое значение принимает ровно один раз.

Тогда исходное уравнение равносильно квадратному уравнению

$$2x^2 = 3x + 5a$$

$$2x^2 - 3x - 5a = 0,$$

которое не имеет корней при

$$D = 9 + 40a < 0,$$

$$a < -\frac{9}{40}.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{9}{40}\right)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получено обоснованное решение одного любого из пунктов $a — г$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Да, например, можно посмотреть в первый день ролики длиной $15+14+1$ мин., потом $13+12+5$ мин., потом $11+10+9$ мин., потом $8+7+6+4+3+2$ мин.

б) Суммарная длина всех роликов равна $1+2+\dots+10=55$ мин., что не делится на 30.

в) Ясно, что при $k \geq 31$ есть ролик длиной 31 минуту, который посмотреть нельзя. Кроме того, суммарная длина всех роликов, равная $\frac{k(k+1)}{2}$, должна быть кратна 30, то есть k или $k+1$ должны быть кратны 5. Переберем варианты:

$k=4$, суммарная длина 10;

$k=5$, суммарная длина 15;

$k=9$, суммарная длина 45;

$k=10$, суммарная длина 55;

$k=14$, суммарная длина 105;

$k=15$, суммарная длина 120, этот случай разобран в пункте а);

$k=19$, суммарная длина 190;

$k=20$, суммарная длина 210. Это возможно, разбивая ролики, например так:

$20+10, 19+11, 18+12, 17+13, 16+14, 15+9+6, 8+7+5+4+3+2+1$;

$k=24$, суммарная длина 300, это возможно, если разбивать ролики, например, так:

$24+6, 23+7, \dots, 16+14, 15+5+4+3+2+1$;

$k=25$, суммарная длина 325;

$k=29$, суммарная длина $29 \cdot 15$;

$k=30$, суммарная длина $31 \cdot 15$.

Итак, это возможно при $k=15, 20, 24$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $k=15, 20, 24$.