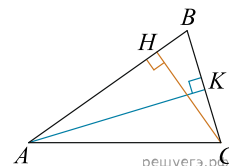


Вариант 253

ID: 13950

№ 1.

У треугольника со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?



№ 2.

Даны векторы $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; -6)$ и $\vec{c} = (4; -3)$. Найдите значение выражения $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

№ 3.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, исходящие из одной вершины, равны 5, 6, 8. Найдите объем параллелепипеда, ребра которого равны половинам ребер данного параллелепипеда.

№ 4.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.

№ 5.

Стрелок стреляет по 4 одинаковым мишеням по одному разу, вероятность промаха 0,2, найдите вероятность что он попадет в первую мишень, а в 3 оставшиеся промахнется.

№ 6.

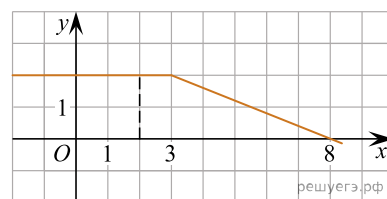
Найдите корень уравнения $\frac{6}{x^2 - 19} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{49^{5,2}}{7^{8,4}}$.

№ 8.

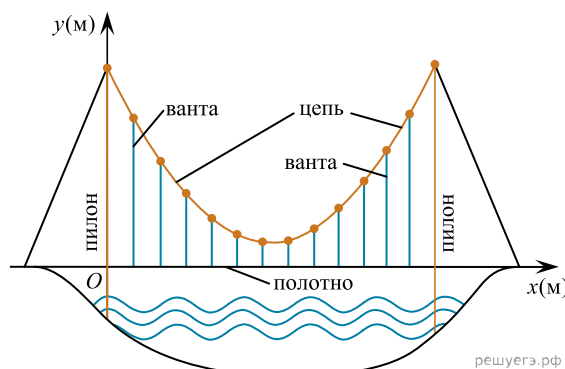
На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

**№ 9.**

На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами.

Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке.

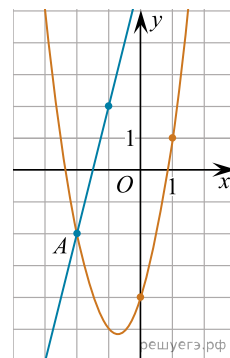
В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,005x^2 - 0,74x + 25$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

**№ 10.**

Два промышленных фильтра, работая одновременно, очищают цистерну воды за 30 минут. Определите, за сколько минут второй фильтр очистит цистерну воды, работая отдельно, если известно, что он сделает это на 25 минут быстрее, чем первый.

№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx + d$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = 8 \ln(x + 7) - 8x + 3$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$.

№ 14.

Все грани призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равные ромбы со стороной, равной 2. Плоские углы при вершине A равны 60° каждый. Через середину диагонали $A_1 C$ проведена плоскость α , перпендикулярная этой диагонали.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α — квадрат.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α .

№ 15.

Решите неравенство $\log_{2|x|+1}(7x+4) - \log_{7x+4}(2|x|+1) > 0$.

№ 16.

На каждом из двух заводов работает по 100 человек. На первом заводе один рабочий изготавливает за смену 3 детали A или 1 деталь B . На втором заводе для изготовления t деталей (и A , и B) требуется t^2 человеко-смен. Оба завода поставляют детали на комбинат, где собирают изделие, причем для его изготовления нужна 1 деталь A и 3 детали B . При этом заводы договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

№ 17.

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите AL , если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a \cdot (y^2 + 2) = x + 1 - y^4, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

имеет ровно пять различных решений.

№ 19.

Дима и Никита задумали по цифре и сообщили их Маше. Маша нашла сумму этих цифр, их разность, а затем перемножила все 4 числа. Мог ли полученный результат быть равен:

а) 1989?

б) 2012?

в) 2016?

Если нет — объясните почему, если да — определите цифры, задуманные Димой и Никитой.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27623	6
2	647124	28
3	661073	30
4	283467	0,375
5	630095	0,0064
6	99629	-5
7	26754	49
8	323078	7
9	324467	7,3
10	509420	50
11	642371	2,5
12	77489	-6

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Знаменатель правой части равен $\frac{1}{2}$. Представим уравнение как произведение синуса и косинуса, равное 1:

$$\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x = 2 \sin^2 x \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 1. \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x = 2 \sin^2 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Модули множителей не превосходят 1, поэтому возможны только два случая: оба множителя равны 1 или -1:

$$\begin{cases} \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = 1, \\ \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = -1, \\ \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -1. \end{cases}$$

Первый случай:

$$\begin{cases} 2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 4x + \frac{\pi}{3} = 2\pi n; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ 4x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \end{cases} k, n \in \mathbb{Z}. \begin{cases} 2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 4x + \frac{\pi}{3} = 2\pi n; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ 4x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \end{cases} k, n \in \mathbb{Z}.$$

Решая полученную систему, находим: $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

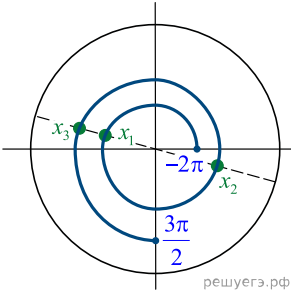
Второй случай:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 4x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi n; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \\ 4x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7\pi}{12} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7\pi}{12} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Эта система решений не имеет. Таким образом, искомое решение $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности (см. рис.) найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. Получаем:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2\pi + \pi - \frac{\pi}{12} = -\frac{13\pi}{12}; \\ x_2 &= -2\pi + 2\pi - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}; \\ x_3 &= \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}. \end{aligned}$$



Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{12} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{13\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что каждая грань призмы составлена из двух равнобедренных треугольников. Из вершины A_1 опустим перпендикуляр A_1H на ребро AB . В силу симметрии G — проекция A_1 на грань $ABCD$ будет лежать на ее диагонали AC . Тогда, по теореме о трех перпендикулярах, GH перпендикулярна AB . Заметим, что $AG = 2GH$, как гипотенуза и катет прямоугольного треугольника с углом 30° , тогда $AH = \frac{1}{2}AB = 1$, откуда

$$AH^2 + GH^2 = AG^2 \Leftrightarrow 1 + GH^2 = 4GH^2 \Leftrightarrow GH = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$AG = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$AC = AB\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$CG = AC - AG = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$A_1G^2 = AA_1^2 - AG^2 = \frac{8}{3},$$

$$A_1C = \sqrt{CG^2 + A_1G^2} = 2\sqrt{2}.$$

Заметим, что

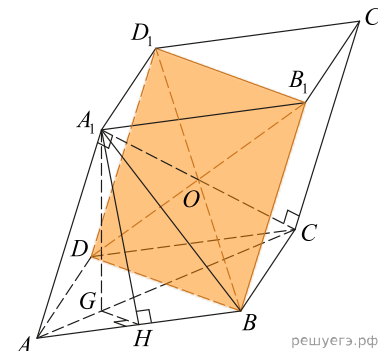
$$AA_1^2 + A_1C^2 = 4 + 8 = 12 = AC^2,$$

следовательно, треугольник ACA_1 — прямоугольный, боковые ребра AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 перпендикулярны диагонали призмы A_1C . Кроме того, по теореме о трех перпендикулярах, прямая A_1C перпендикулярна диагоналям оснований призмы BD и B_1D_1 .

Таким образом, плоскость BDD_1B_1 перпендикулярна диагонали A_1C . В силу симметрии призмы эта плоскость проходит через середину указанной диагонали, то есть совпадает с плоскостью α , и, следовательно, четырехугольник BDD_1B_1 является искомым сечением. Заметим, что указанная фигура — ромб с равными (в силу симметрии) диагоналями, а следовательно, квадрат.

б) Из п. а) следует, что прямая AA_1 параллельна плоскости α , то есть расстояния до нее от точек A и A_1 равны, а расстояние до нее от точки A_1 равно половине диагонали A_1C , то есть $\sqrt{2}$.

Ответ: б) $\sqrt{2}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Неравенство имеет вид $a - \frac{1}{a} > 0$ или $a > \frac{1}{a}$. Для положительных a такое неравенство верно, если $a > 1$. Если же значения a отрицательны, то они должны быть больше -1 . Итак,

$$\begin{cases} \log_{2|x|+1}(7x+4) > 1, \\ -1 < \log_{2|x|+1}(7x+4) < 0. \end{cases}$$

Заметим, что при $x=0$ неравенства не имеют смысла. При $x \neq 0$ основания логарифмов больше 1 и совокупность принимает вид

$$\begin{cases} 7x+4 > 2|x|+1, \\ \frac{1}{2|x|+1} < 7x+4 < 1. \end{cases}$$

Решим первое неравенство совокупности. При $x > 0$ получаем

$$\begin{cases} 7x+4 > 2x+1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{5}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

При $x < 0$ получаем

$$\begin{cases} 7x+4 > -2x+1, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{3}, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 0.$$

Решим второе неравенство совокупности. При $x > 0$ получаем, что $7x+4 > 4$, а значит, неравенство не имеет решений. При $x < 0$ получаем

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{-2x+1} < 7x+4 < 1, \\ x < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-14x^2-x+3}{-2x+1} > 0, \\ 7x < -3, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2x+1)(7x-3)}{-2x+1} < 0, \\ x < -\frac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0, \\ x < -\frac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < -\frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Объединяя результаты, получаем ответ.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{7}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Первое решение:

Из условия «на втором заводе для изготовления t деталей (и A , и B) требуется t^2 человеко-смен» следует, что работающие на заводе 100 человек за смену смогут произвести максимум 10 деталей одного типа.

Пусть на первом комбинате x рабочих заняты на производстве детали A , а остальные $100-x$ рабочих производят детали типа B , и пусть на втором комбинате из 10 деталей производится u деталей типа A и $10-u$ деталей типа B . Внесем данные из условия в таблицу.

	Деталь А		Деталь В	
	Количество человек	Количество деталей	Количество человек	Количество деталей
Первый комбинат	x	$3x$	$100 - x$	$100 - x$
Второй комбинат		y		$10 - y$
Всего		$3x + y$		$100 - x + 10 - y$

Для производства изделий деталей типа В должно быть в три раза больше деталей типа А:

$$3(3x + y) = 100 - x + 10 - y \Leftrightarrow x = 11 - 0,4y \quad (*)$$

Пусть s шт.— количество изделий, оно равно количеству деталей типа А: $s = 3x + y$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s = 3x + y = 3 \cdot (11 - 0,4y) + y = 33 - 0,2y.$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение $f(y) = 33 - 0,2y$ при неотрицательных целых значениях y , не больших 10.

Функция $f(y) = 33 - 0,2y$ — убывающая. Наибольшее значение на отрезке $[0; 10]$ она принимает при $y = 0$, при этом $x = 11$, а $f(0) = 33$.

Таким образом, максимальное количество изделий за смену будет собрано, если на втором заводе будут изготавливать только детали типа В (100 рабочих изготовят 10 деталей типа В), а на первом заводе 11 человек изготовят 33 детали типа А, а остальные 89 рабочих изготовят 89 деталей типа В. Итого получим 33 детали типа А и 99 деталей типа В, на производстве которых были заняты все 200 человек.

Значит, комбинат сможет собрать за смену 33 изделия.

Ответ: 33 изделия.

Замечание.

Вначале мы прочли условие иначе и полагали, что на втором заводе для изготовления t деталей каждого типа (и А, и В независимо друг от друга) требуется t^2 человеко-смен. Приведём решение и примечания к нему для такого понимания условия. К этому же пониманию условия относятся комментарии читателей.

Второе решение:

Пусть на первом комбинате x рабочих, а на втором комбинате y рабочих заняты на производстве детали А. Внесем данные из условия в таблицу.

	Деталь А		Деталь В	
	Количество человек	Количество деталей	Количество человек	Количество деталей
Первый комбинат	x	$3x$	$100 - x$	$100 - x$
Второй комбинат	y	$\sqrt{y}$	$100 - y$	$\sqrt{100 - y}$
Всего		$3x + \sqrt{y}$		$100 - x + \sqrt{100 - y}$

Для производства изделий деталей типа В должно быть в три раза больше деталей типа А:

$$3(3x + \sqrt{y}) = 100 - x + \sqrt{100 - y} \Leftrightarrow x = 10 \pm 0,1 \cdot \sqrt{100 - y} \Leftrightarrow 3(3x + \sqrt{y}) = 100 - x + \sqrt{100 - y} \Leftrightarrow$$

$$s(3x + \sqrt{y}) = 100 - x + \sqrt{100 - y} \Leftrightarrow x = 10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x = 10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y} \quad (*)$$

Пусть s шт — количество изделий, оно равно количеству деталей типа A : $s = 3x + \sqrt{y}$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s = 3x + \sqrt{y} = 3(10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y}) + \sqrt{y} = 30 + 0,1(\sqrt{y} + 3\sqrt{100 - y}). \quad s = 3x + \sqrt{y} = 3(10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y}) + \sqrt{y} =$$

$$= 30 + 0,1(\sqrt{y} + 3\sqrt{100 - y}). \quad s = 3x + \sqrt{y} =$$

$$= 3(10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y}) + \sqrt{y} =$$

$$= 30 + 0,1(\sqrt{y} + 3\sqrt{100 - y}).$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение $f(y) = \sqrt{y} + 3\sqrt{100 - y}$ при натуральных значениях y не больших 100. Имеем:

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{3}{2\sqrt{100 - y}} = \frac{\sqrt{100 - y} - 3\sqrt{y}}{2\sqrt{100 - y} \cdot \sqrt{y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{100 - y} = 3\sqrt{y} \Leftrightarrow_{y \in \mathbb{N}} 100 - y = 9y \Leftrightarrow y = 10.$$

В найденной точке производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в ней функция достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области, равным $f(10) = \sqrt{10} + 3\sqrt{90} = 10\sqrt{10}$, при этом $s = 30 + \sqrt{10}$. Количество деталей должно быть натуральным числом, $3 < \sqrt{10} < 4$, поэтому рабочие могут произвести, самое большее, 33 детали типа A .

Из (*) находим $x = 10$ чел. Это означает, что 10 рабочих первого комбината и 10 рабочих второго комбината должны быть заняты на производстве детали A , за сутки они произведут их 33 шт, оставшиеся 90 рабочих первого комбината и 90 рабочих второго комбината должны быть заняты на производстве деталей B , за сутки они произведут их 99 шт.

Ответ: 33 изделия.

Примечание 1.

Внимательный читатель мог бы задать вопрос о том, почему в равенстве (*) предполагается, что деталей производится ровно в отношении 1:3. Ведь можно произвести, например, 11 деталей типа B и 34 детали типа A , из них получится собрать 33 изделия, а одна деталь типа A останется лишней. Ответим на этот вопрос.

Если есть лишние детали, то уменьшим их число до соотношения 1:3 и отправим на обед людей, производивших лишние детали. Тогда получим решение задачи для меньшего числа людей, но с тем же выходом продукта и соотношением деталей 1:3. Теперь вернём людей с обеда. Меньшего количества изделий мы не получим, поскольку зависимость между числом деталей и количеством людей неубывающая. Большого количества изделий тоже не достичь, поскольку из лишних деталей целого изделия собрать не получится. Поэтому наибольшее количество изделий совпадет с найденным.

Примечание 2.

Заметим, что если рабочие второго комбината будут производить только детали типа B , то они произведут их 10 шт. Пусть при этом 89 рабочих первого комбината произведут 89 деталей типа B , а оставшиеся 11 рабочих первого комбината произведут 33 детали типа A . Тогда всего будет произведено 33 детали типа A и 99 деталей типа B . Из них также можно собрать 33 изделия. Таких вариантов довольно много (см. таблицу в конце).

Примечание 3.

Можно было бы спросить, почему не образовать из рабочих второго завода 100 независимых групп, каждая из которых состоит из одного рабочего.

Приведём решение Евгения Обухова.

Пусть первый завод выпускает x деталей B , а второй завод выпускает y деталей B . Тогда на первом заводе деталь B выпускает x рабочих, а деталь A выпускает $100 - x$ рабочих. Поэтому первый завод выпускает $300 - 3x$ деталей A .

На втором заводе деталь B выпускает y^2 рабочих, деталь A выпускает $100 - y^2$ рабочих. Поэтому второй завод выпускает $\lfloor \sqrt{100 - y^2} \rfloor$ деталей A . Здесь [...] — целая часть числа.

Пусть комбинат выпускает k изделий. Имеем следующие необходимые и достаточные условия:

$$\begin{cases} 300 - 3x + \lfloor \sqrt{100 - y^2} \rfloor \geq k, \\ x + y \geq 3k. \end{cases}$$

Рассмотрим $y = 10$. Тогда получим:

$$\begin{cases} 300 - 3x \geq k, \\ x + 10 \geq 3k. \end{cases}$$

Домножим второе неравенство на 3 и сложим с первым, получим: $330 \geq 10k \Leftrightarrow k \leq 33$. Заметим, что $x = 89, k = 33$ (при $y = 10$) удовлетворяют исходному неравенству. То есть комбинат может изготовить 33 изделия.

Проверим, может ли он изготовить больше. Пусть $k \geq 34$, тогда

$$\begin{cases} 300 - 3x + \lfloor \sqrt{100 - y^2} \rfloor \geq 34, \\ x + y \geq 102. \end{cases}$$

Поскольку теперь мы можем считать $y \leq 9$, из второго неравенства находим $x \geq 93$. Тогда оценим: $300 - 3x + \lfloor \sqrt{100 - y^2} \rfloor \leq 300 - 3 \cdot 93 + 10 = 31$. Получили противоречие с первым неравенством.

Следовательно, максимальное число изделий, которое может произвести комбинат, равно 33.

Приведём таблицу других вариантов, также дающих 33 изделия.

--

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть O — центр большей окружности. Линия центров касающихся окружностей проходит через точку касания, поэтому OA — диаметр меньшей окружности.

Точка K лежит на окружности с диаметром OA , значит, $\angle AKO = 90^\circ$. Отрезок OK — перпендикуляр, опущенный из центра большей окружности на хорду AB . Поэтому K — середина AB . Аналогично M — середина AC , поэтому KM — средняя линия треугольника ABC . Следовательно, прямые KM и BC параллельны.

б) Опустим перпендикуляр OH на хорду BC . Тогда H — середина BC . Из прямоугольного треугольника ONB находим, что

$$OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 64} = 6.$$

Пусть Q — центр меньшей окружности. Тогда прямые QP и OH параллельны. Опустим перпендикуляр QF из центра меньшей окружности на OH . Тогда

$$OF = OH - FH = OH - QP = 6 - 5 = 1, \quad PH^2 = QF^2 = QO^2 - OF^2 = 25 - 1 = 24, \quad OP^2 = OH^2 + PH^2 = 36 + 24 = 60,$$

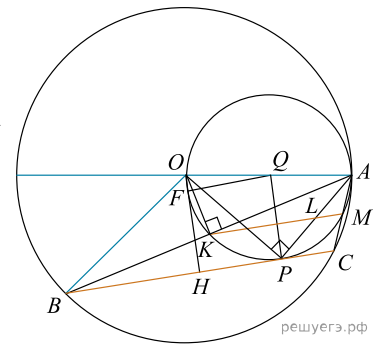
а из прямоугольного треугольника APQ находим, что

$$AP = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{100 - 60} = 2\sqrt{10}.$$

Отрезок KM — средняя линия треугольника ABC , поэтому L середина AP . Следовательно,

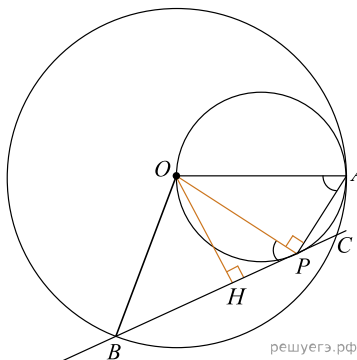
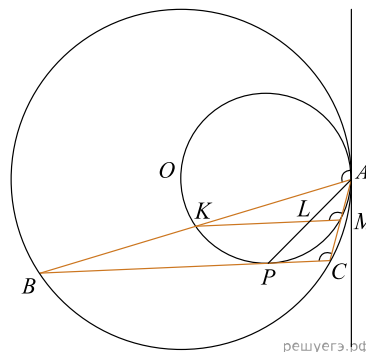
$$AL = \frac{1}{2}AP = \sqrt{10}.$$

Ответ: б) $\sqrt{10}$.



Приведём решение Марии Ковалёвой (Москва).

а) Проведём общую касательную к окружностям AT , как показано на рисунке слева. Тогда $\angle TAB = \angle ACB$ и $\angle TAB = \angle AMK$, поскольку угол между касательной и хордой равен половине заключённой между ними дуги. Тогда $\angle ACB = \angle AMK$. равны Соответственные углы при пересечении прямых KM и BC равны, поэтому данные прямые параллельны.



б) По обобщенной теореме синусов, в треугольниках AKM и ABC стороны KM и BC относятся так же, как радиусы данных в условии окружностей, то есть как 1:2. Следовательно, KM — средняя линия треугольника ABC , и $AL = \frac{1}{2}AP$ по теореме Фалеса. Осталось найти AP .

Опустим перпендикуляр OH на хорду BC (см.рис. справа). Тогда H — середина BC . Из прямоугольного треугольника ONB находим, что

$$OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 64} = 6.$$

Треугольник OAP прямоугольный, так как угол OPA опирается на диаметр. Углы OAP и OPH равны по теореме об угле между касательной и хордой. Следовательно, прямоугольные треугольники OAP и OPH подобны по острому углу. Имеем: $OP : OH = OA : OP$, то есть $OP : 6 = 10 : OP$. Следовательно, $OP = \sqrt{60}$. По теореме Пифагора $AP = \sqrt{40}$. Окончательно получаем: $AL = \frac{1}{2}AP = \sqrt{10}$.

Примечание Дмитрия Гущина.

Читатель, изучающий углубленный курс геометрии или занимавшийся в кружке, сразу заметит, что при гомотетии с центром в точке A и коэффициентом 2 меньшая окружность переходит в большую, а хорда KM переходит в хорду BC . Из этого сразу следует и параллельность прямых KM и BC , и соотношение $BC = 2KM$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Заметим, что если пара чисел $(x; y)$ является решением системы, то и пара чисел $(x; -y)$ тоже является решением системы. Значит, нечетное число решение возможно только если одним из решений является пара чисел $(x; 0)$. Найдём при каких значениях параметра a , пара $(x; 0)$ является решением системы:

$$\begin{cases} a \cdot (0 + 2) = x + 1 - 0, \\ x^2 + 0 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = x + 1, \\ \begin{cases} x = -3, \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3, \\ a = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ a = 2. \end{cases} \end{cases}$$

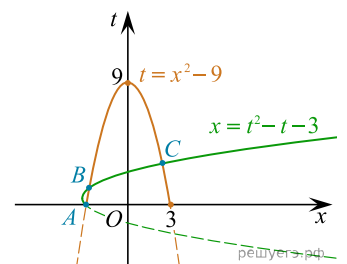
Пусть $y^2 = t \geq 0$.

Определим число решений исходной системы при найденных значениях параметра a . При $a = -1$ получаем:

$$\begin{cases} -(y^2 + 2) = x + 1 - y^4, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^4 - y^2 - 3, \\ y^2 = 9 - x^2. \end{cases}$$

тогда каждому значению $t > 0$ соответствуют два значения y , а $t = 0$ — одно значение $y = 0$. Изобразим в системе координат xOt графики уравнений системы

$$\begin{cases} x = t^2 - t - 3, \\ t = 9 - x^2, \\ t \geq 0. \end{cases}$$



При $t \geq 0$ графики уравнений имеют три общие точки $A(x_A; t_A)$, $B(x_B; t_B)$ и $C(x_C; t_C)$, где $t_A = 0$, а $t_C > t_B > 0$. Тогда, исходная система имеет ровно пять решений:

- $(-3; 0)$,
- $(x_B; -\sqrt{t_B})$,
- $(x_B; \sqrt{t_B})$,
- $(x_C; -\sqrt{t_C})$,
- $(x_C; \sqrt{t_C})$,

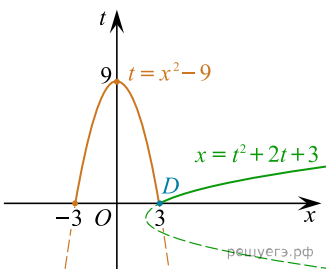
значит, $a = -1$ удовлетворяет условию задачи.

При $a = 2$ получаем

$$\begin{cases} 2 \cdot (y^2 + 2) = x + 1 - y^4, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^4 + 2y^2 + 3, \\ y^2 = 9 - x^2. \end{cases}$$

Пусть $y^2 = t \geq 0$, тогда каждому значению $t > 0$ соответствуют два значения y , а значению $t = 0$ — одно значение $y = 0$. Изобразим в системе координат xOt графики уравнений системы

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t + 3, \\ t = 9 - x^2, \\ t \geq 0. \end{cases}$$



При $t \geq 0$ графики уравнений имеют одну общую точку $D(3; 0)$. Тогда исходная система тоже имеет ровно одно решение $(-3; 0)$, значит, $a = 2$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: -1 .

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Пусть Дима задумал цифру x , а Никита — цифру y . Не теряя общности, можно положить $x \geq y$. Тогда Маша вычисляла произведение $xy(x - y)(x + y)$. Кроме того, множители не равны нулю, и, значит, $0 < y < x \leq 9$.

а) Уравнение $xy(x - y)(x + y) = 1989$ не имеет решений в натуральных числах, поскольку его правая часть нечетна, а левая часть четна для любых значений x и y .

б) Уравнение $xy(x - y)(x + y) = 2012$ также не имеет решений. Для доказательства запишем его в виде $xy(x - y)(x + y) = 4 \cdot 503$. Число 503 простое, следовательно, один из множителей левой части кратен 503. Но это не-

возможно, поскольку по условию числа x и y не больше 9.

в) Уравнение $xy(x-y)(x+y) = 2016$ запишем в виде $xy(x-y)(x+y) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Заметим, что если из чисел x , y , $x-y$ и $x+y$ хотя бы два делятся на 3, то и все они также делятся на 3. Но тогда левая часть делится на 81, а правая — нет. Значит, ровно один сомножитель в левой части делится на 3, а следовательно, он делится и на 9. Кроме того, поскольку 7 — простое число, один из сомножителей левой части делится на 7.

Поскольку $0 < y < x \leq 9$, множители y и $x-y$ не могут делиться на 9. Следовательно, на 9 делится либо $x+y$, либо x . Рассмотрим эти варианты.

Если $x+y$ делится на 9, то $x+y = 9$, так как $x+y < 18$. В этом случае для делимости на 7 либо $x = 7$ (тогда $x = 7$, $y = 2$ — не подходит), либо $x-y = 7$ ($x = 8$, $y = 1$ — не подходит).

Если же $x = 9$, то для делимости на 7 либо $y = 7$ (подходит), либо $x-y = 7$ (откуда $y = 2$ — не подходит), либо $x+y = 14$ (откуда $y = 5$ — не подходит).

Тем самым, только пара $(9; 7)$ является решением.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да, 9 и 7.
