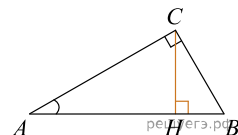


Вариант 26

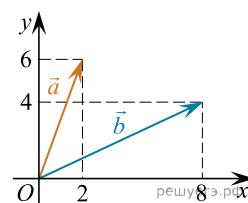
№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 25$, $BH = 20$. Найдите $\cos A$.



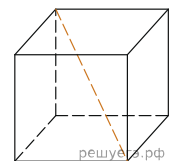
№ 2.

Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 3.

Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?



№ 4.

Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений— по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

№ 5.

Правильный игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма выпавших при всех бросках очков не стала больше чем 3. Известно, что общая сумма очков оказалась равна 4. Какова вероятность того, что был сделан ровно один бросок? Ответ округлите до сотых.

№ 6.

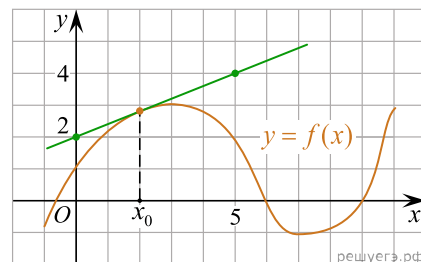
Найдите корень уравнения $\log_8 2^{8x-4} = 4$.

№ 7.

Найдите значение выражения $7^{\frac{4}{9}} \cdot 49^{\frac{5}{18}}$.

№ 8.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0 = 2$. Найдите значение производной функции $g(x) = x^2 - f(x) + 1$ в точке x_0 .

**№ 9.**

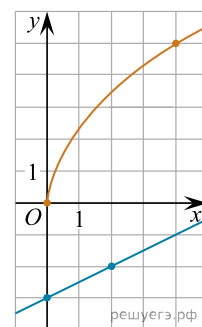
При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 400$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решетке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

№ 10.

Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.

**№ 12.**

Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$.

№ 13.

- Решите уравнение $8^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 \cdot 2^{-x} = 0$.
- Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; \log_5 10]$.

№ 14.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 20\sqrt{3}$, $AD = 42$ и $AA_1 = 56$. На отрезках BC_1 и BD отмечены точки M и N соответственно так, что прямые AM и $A_1 N$ пересекаются и $BN : ND = 1 : 7$.

- Докажите, что угол между прямой $D_1 M$ и плоскостью BCC_1 равен 30° .
 - Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью AMN .
-

№ 15.

Решите неравенство $(4^{x^2-x-6} - 1) \cdot \log_{0,25}(4^{x^2+2x+2} - 3) \leq 0$.

№ 16.

Леонид является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые приборы, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t приборов; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, они производят t приборов.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Леонид платит рабочему 1 тысячу рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 приборов. Какую наименьшую сумму придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

№ 17.

В треугольнике ABC продолжения высоты CC_1 и биссектрисы BB_1 пересекают описанную окружность в точках N и M соответственно, $\angle ABC = 40^\circ$ и $\angle ACB = 85^\circ$.

- Докажите, что $BM = CN$.
 - Прямые BC и MN пересекаются в точке D . Найдите площадь треугольника BDN , если его высота BH равна 6.
-

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 - 4x)^2 + a|4x - x^2| - 2a - 4 = 0$$

имеет семь или восемь решений.

№ 19.

У трехзначного числа $n = 100a + 10b + c$ все цифры отличны от нуля. Обозначим через s сумму цифр и через m произведение цифр.

- Может ли быть, что $s = 10m$?
 - Сколько существует чисел, у которых $m < s$?
 - Какие целые значения имеет дробь $k = \frac{m}{s}$, если среди цифр числа n есть 1?
-

Номер	Задание	Ответ
1	27337	0,6
2	27730	20
3	27081	27
4	285923	0,225
5	508792	0,63
6	315120	2
7	26740	7
8	525689	3,6
9	28008	30
10	26585	3
11	509271	36
12	245174	3

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$16^x - 10 \cdot 4^x + 16 = 0 \Leftrightarrow (4^x - 8)(4^x - 2) = 0.$$

Значит, $4^x = 8$, откуда $x = \frac{3}{2}$, или $4^x = 2$, откуда $x = \frac{1}{2}$.

б) Заметим, что

$$\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} < \log_5 10 < \log_5 \sqrt{125} = \frac{3}{2}.$$

Значит, отрезку $[\log_5 2; \log_5 10]$ принадлежит корень $\frac{1}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$; б) $\frac{1}{2}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Прямые AM и A_1N пересекаются, поэтому они лежат в одной плоскости AMN . Пусть P — точка их пересечения, а K — точка пересечения прямой AN с ребром BC . Плоскость AMN содержит прямую AA_1 , перпендикулярную плоскости основания, а значит, плоскость AMN перпендикулярна основанию.

Через точку K проведем прямую KK_1 , параллельную прямой AA_1 , и, следовательно, лежащую в плоскости AMN (поскольку точка K_1 лежит на ребре B_1C_1). Тогда M — точка пересечения прямой KK_1 с диагональю BC_1 . Заметим, что прямая D_1C_1 перпендикулярна плоскости BCC_1B_1 , следовательно, прямая MC_1 является проекцией прямой MD_1 на эту плоскость, а искомый угол между прямой D_1M и плоскостью BCC_1 равен углу C_1MD_1 . Треугольники ADN и BKN подобны, следовательно,

$$\frac{KB}{AD} = \frac{BN}{ND} = \frac{1}{7}, \quad KB = \frac{1}{7}BC.$$

Треугольники BKM и BCC_1 также подобны, а потому

$$\frac{BM}{BC_1} = \frac{KB}{BC} = \frac{1}{7}.$$

Находим:

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = 70, \quad BM = \frac{1}{7}BC_1 = 10, \quad NC_1 = 60.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \angle C_1MD_1 = \frac{C_1D_1}{MC_1} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

то есть $\angle C_1MD_1 = 30^\circ$.

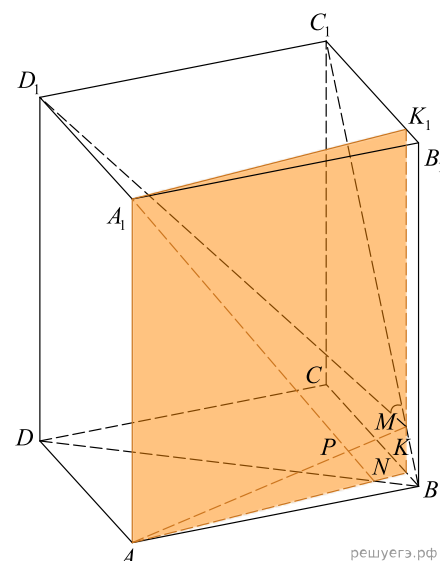
б) Из п. а) следует, что искомым сечением является прямоугольник AKK_1A_1 . Тогда $KB = \frac{1}{7}BC = 6$, значит,

$$AK = \sqrt{AB^2 + KB^2} = 2\sqrt{309}.$$

Таким образом, площадь сечения параллелепипеда равна

$$S_{AKK_1A_1} = AK \cdot AA_1 = 112\sqrt{309}.$$

Ответ: б) $112\sqrt{309}$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
--	-------

Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Применим теоремы о знаках на ОДЗ:

$$\operatorname{sgn} \log_a b \underset{\text{ОДЗ}}{=} \operatorname{sgn}((a-1)(b-1)),$$

$$\operatorname{sgn}(a^b - 1) \underset{\text{ОДЗ}}{=} \operatorname{sgn}((a-1) \cdot b).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4^{x^2+2x+2} - 3 > 0, \\ (4^{x^2-x-6} - 1)\left(\frac{1}{4} - 1\right)(4^{x^2+2x+2} - 4) \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2+2x+2} > 3, \\ (x^2 - x - 6)(x^2 + 2x + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2+2x+2} - 3 > 0, \\ (4^{x^2-x-6} - 1)\left(\frac{1}{4} - 1\right)(4^{x^2+2x+2} - 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2+2x+2} > 3, \\ (x^2 - x - 6)(x^2 + 2x + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{(x+1)^2} > \frac{3}{4} \quad (*), \\ (x+2)(x-3)(x+1)^2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Неравенство (*) верно при всех x , поскольку его левая часть не меньше 1, а решение второго будет выглядеть так:



Ответ: $(-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$.

Приведем другое решение.

Заметим, что $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1$, откуда $4^{x^2+2x+2} - 3 \geq 4^1 - 3 = 1$. Поэтому второй множитель определен при всех x и, кроме того, при $x = -1$ он равен нулю (и вся левая часть вместе с ним). При прочих x этот множитель меньше нуля, поэтому получаем:

$$\begin{aligned} 4^{x^2-x-6} - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow 4^{x^2-x-6} \geq 4^0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq 3. \end{cases} \quad 4^{x^2-x-6} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 4^{x^2-x-6} \geq 4^0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq 3. \end{cases} \quad 4^{x^2-x-6} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 4^{x^2-x-6} \geq 4^0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Пусть рабочие первого завода за неделю производят x приборов, второго завода — y приборов, и пусть выполнено условие $x + y = 20$. Тогда доля человеко-часов, затраченных на первом заводе, составит $4x^3$, а на втором — y^3 . Таким образом, Леониду придется запланировать на оплату труда рабочих обоих заводов $1 \cdot (4x^3 + y^3) = S$ тысяч рублей в неделю. Так как $y = 20 - x$, то $S(x) = 4x^3 + (20 - x)^3$, $0 \leq x \leq 20$.

Найдем наименьшее значение функции $S(x) = 4x^3 + (20 - x)^3$ на $[0; 20]$:

$$S(x) = 4x^3 + 8000 - 3 \cdot 400x + 3 \cdot 20x^2 - x^3 = 3x^3 + 60x^2 - 1200x + 8000. \quad S(x) = 4x^3 + 8000 - 3 \cdot 400x + 3 \cdot 20x^2 - x^3 = 3x^3 + 60x^2 - 1200x + 8000.$$

$$S'(x) = 9x^2 + 120x - 1200;$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 120x - 1200 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 40x - 400 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 1200}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{1600}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-20 \pm 40}{3}.$$

Искомый корень положителен, он равен $\frac{20}{3}$. Заметим, что на $[0; 20]$ это единственная точка экстремума. Если она окажется точкой минимума функции, то функция именно в этой точке и достигает наименьшего значения. Найдем

$$S'(6) = 9 \cdot 36 + 120 \cdot 6 - 1200 = 36(9 + 20) - 1200 = 1044 - 1200 < 0;$$

$$S'(7) = 9 \cdot 49 + 120 \cdot 7 - 1200 = 441 + 840 - 1200 = 1281 - 1200 > 0.$$

Итак, критическая точка функции точка $x = \frac{20}{3}$ является точкой минимума функции $S(x)$.

Поскольку количество изготовленных приборов будет выражаться числом натуральным, то наименьшая сумма, необходимая для выплаты рабочим, будет достигнута либо при $x = 6$, либо при $x = 7$. Сравним эти значения:

$$S(6) = 4 \cdot 216 + 14^3 = 864 + 2744 = 3608 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$S(7) = 4 \cdot 343 + 13^3 = 1372 + 2197 = 3569 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Итак, искомая сумма 3 569 000 рублей.

Ответ: 3 569 000 рублей.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что

$$\angle BAC = 180^\circ - 40^\circ - 85^\circ = 55^\circ$$

и

$$\angle ACC_1 = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

Тогда $\sphericalangle AN = 70^\circ$, следовательно, $\sphericalangle CAN = 2 \cdot 40^\circ + 70^\circ = 150^\circ$. Значит,

$$\sphericalangle BCM = \sphericalangle BC + \sphericalangle CM = 2 \cdot 55^\circ + 2 \cdot \frac{40^\circ}{2} = 150^\circ,$$

откуда следует, что $CN = BM$ как хорды, стягивающие равные дуги.

б) Найдем углы BND и DBN :

$$\angle BND = \angle BNC + \angle CNM = \angle BAC + \angle CBM = 55^\circ + 20^\circ = 75^\circ,$$

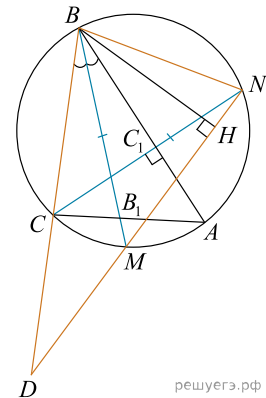
$$\angle DBN = \angle CBA + \angle ABN = \angle CBA + \angle ACN = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ.$$

Тогда $\angle BDN = 30^\circ$, а значит,

$$BD = ND = \frac{BH}{\sin 30^\circ} = 12.$$

Тогда для площади треугольника BDN имеем: $S_{BDN} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 36$.

Ответ: б) 36.



решуегэ.рф

№ 18.

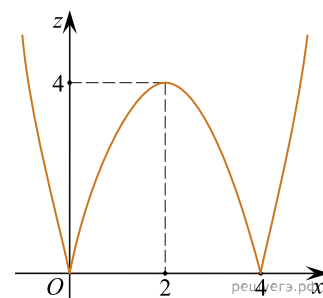
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Сделаем замену $z = |x^2 - 4x| \geq 0$. Рассмотрим уравнение $z^2 + az - 2a - 4 = 0$. Построим эскиз графика $z = |x^2 - 4x|$. Функция $z = |x^2 - 4x|$ обладает свойством: $z(x) = z(4-x)$ при всех x , причём $z(2) = 4$.

Следовательно, если уравнение $z^2 + az - 2a - 4 = 0$ имеет два таких решения, что одно равно 4, а второе принадлежит интервалу $(0; 4)$, то исходное уравнение имеет ровно семь решений. Если же оба корня исследуемого уравнения принадлежат интервалу $(0; 4)$, то исходное уравнение имеет ровно восемь решений.

Заметим, что это уравнение имеет два решения: $z = 2$, $z = -2 - a$ при любом значении a . При $a = -4$ эти решения совпадают. Отсюда следует, что условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 0 < -2 - a \leq 4, \\ a \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq a < -4, \\ -4 < a < -2. \end{cases}$$



решуегэ.рф

Ответ: $a \in [-6; -4) \cup (-4; -2)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Заметим, что $s = a + b + c$ и $m = abc$.

а) Ясно что $s \leq 9 + 9 + 9 = 27$, поэтому если $s = 10m$, то $m \leq 2$, то есть на роль наборов цифр могут подходить только $(1, 1, 1)$ и $(1, 1, 2)$. Но они не подходят.

б) Пусть $a \geq b \geq c$. Ясно, что можно менять цифры местами, m и s от этого не меняются. Если $c > 1$, то

$$m = abc \geq a \cdot 2 \cdot 2 = 4a > a + a + a \geq a + b + c,$$

поэтому $c = 1$. Значит, $a + b + 1 > ab$, откуда

$$ab - a - b + 1 < 2 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) < 2.$$

Значит, либо $a - 1 = b - 1 = 1$, либо $b - 1 = 0$. Таким образом, подходят наборы цифр $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1), \dots, (9, 1, 1)$ и $(2, 2, 1)$. Каждый из них, кроме первого, дает по три числа, а первый только одно. Значит, этих чисел $1 + 9 \cdot 3 = 28$.

в) Будем опять же считать, что $c = 1$, тогда $\frac{ab}{a + b + 1} = k$ должно быть целым. То есть

$$ab = ka + kb + k \Leftrightarrow ab - ka - kb + k^2 = k^2 + k \Leftrightarrow (a - k)(b - k) = k^2 + k.$$

Ясно, что $k^2 + k > 0$, а если оба множителя $a - k$ и $b - k$ отрицательны, то $(a - k)(b - k) = (k - a)(k - b) < k \cdot k < k^2 + k$, то есть такой случай невозможен. Значит, $a - k$ и $b - k$ положительны. Кроме того, одно из них не меньше $k + 1$, поскольку иначе $(a - k)(b - k) \leq k \cdot k = k^2 < k^2 + k$. Если $a - k \geq k + 1$, то $9 \geq a \geq 2k + 1$, откуда $k \leq 4$. Итак, $k = 1, 2, 3, 4$. Все эти варианты возможны при $a = 2k + 1$, $b = 2k$, то есть для чисел 981, 761, 541, 321.

Ответ: а) нет; б) 28; в) $k = 1, 2, 3, 4$.