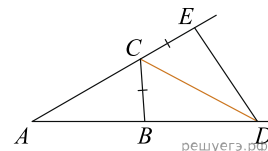


Вариант 260

ID: 13961

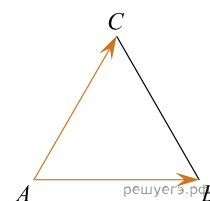
№ 1.

В треугольнике ABC угол A равен 30° , угол B равен 86° . CD — биссектриса внешнего угла при вершине C , причем точка D лежит на прямой AB . На продолжении стороны AC за точку C выбрана такая точка E , что $CE = CB$. Найдите угол BDE . Ответ дайте в градусах.



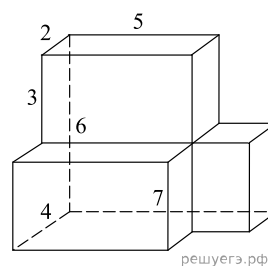
№ 2.

Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.



№ 3.

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



№ 4.

За круглый стол на 17 стульев в случайном порядке рассаживаются 15 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки будут сидеть рядом.

№ 5.

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем $36,8^{\circ}\text{C}$, равна $0,81$. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется $36,8^{\circ}\text{C}$ или выше.

№ 6.

Найдите дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $E(X) = 1,2$.

№ 7.

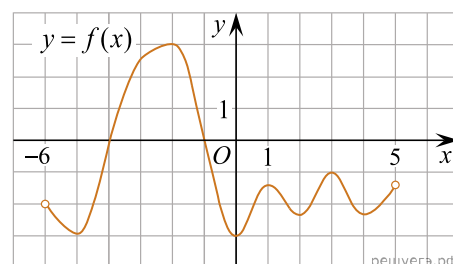
Найдите корень уравнения: $\frac{1}{9x-7} = \frac{1}{2}$.

№ 8.

Найдите значение выражения $4\frac{4}{9} : \frac{4}{9}$.

№ 9.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.



№ 10.

Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 20^\circ/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4^\circ/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1200° . Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах.

№ 11.

В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

№ 12.

null

№ 13.

а) Решите уравнение $|2\operatorname{tg} x - 5| - |2\operatorname{tg} x - 1| = 2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFABCDEF$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что AC перпендикулярна прямой BE .

б) Найдите угол между прямой AC и плоскостью ACD .

№ 15.

Решите неравенство $\frac{1}{3^x + 4} \leq \frac{2}{3^{x+1} - 1}$.

№ 16.

Решите неравенство $\frac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5 \cdot 2^x + 4} \leq \frac{2^x - 9}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x - 6}$.

№ 17.

В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD ($BC < AD$) окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD , делят диагональ AC в отношении $2:1:1$, считая от точки A .

- а) Докажите, что одно из оснований трапеции равно боковой стороне.
 - б) Найдите отношение, в котором диагональ AC делит площадь трапеции.
-

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - 2x + 16) \cdot \sqrt{y - 2x + 16} = 0, \\ y = ax - 14 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

№ 19.

Коля множил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число, и получил произведение, равное m . Вова умножил некоторое четное натуральное число на соседнее четное натуральное число и получил произведение, равное n .

- а) Может ли модуль разности чисел m и n равняться 6?
- б) Может ли модуль разности чисел m и n равняться 13?
- в) Какие значения может принимать модуль разности чисел m и n ?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27777	56
2	27721	3
3	77156	156
4	325917	0.125
5	320197	0.19
6	704655	0.48
7	77383	1
8	77391	10
9	510938	7
10	27963	20
11	99566	20

№ 12.

null

null

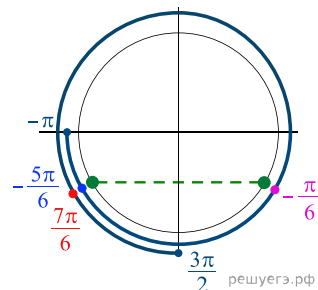
№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем левую часть уравнения при помощи формул приведения:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin x = -1 &\Leftrightarrow 2 \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \quad \sin x + \sin x = -1 \Leftrightarrow 2 \sin x = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. На указанном промежутке лежат числа $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.



Ответ: а) $\left\{-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

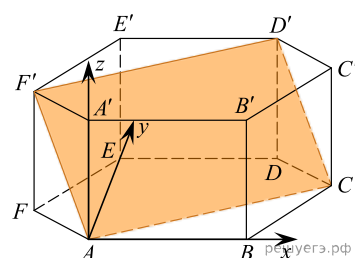
№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Проекция прямой AC на плоскость ABC — прямая AC . В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AC и BE перпендикулярны. Тогда, по теореме о трех перпендикулярах, $AC' \perp BE$.

б) Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. В этой системе координат:

$$A(0; 0; 0), C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), C'\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right), D'(1; \sqrt{3}; 1), \text{ откуда } \vec{AC'} = \left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right).$$



Плоскость ACD' проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид $Ax + By + Cz = 0$. Для координат точек C и D' имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B + 0C = 0, \\ A + \sqrt{3}B + C = 0. \end{cases}$$

Не теряя общности, положим $A = 1$, тогда $B = -\sqrt{3}, C = 2$. Уравнение плоскости ACD' : $x - \sqrt{3}y + 2z = 0$, вектор нормали к ней $\vec{n} = (1; -\sqrt{3}; 2)$. Тогда искомый угол между прямой AC' и плоскостью ACD' равен

$$\arcsin \frac{|\vec{AC'} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AC'}| |\vec{n}|} = \arcsin \frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 2\right|}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4} + 1}} = \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}$

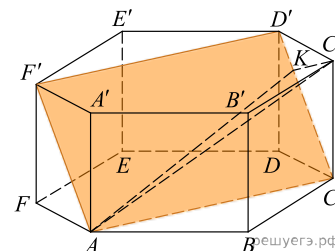
Приведем другое решение пункта б).

Заметим, $ACD' \perp CC'D$ в силу того, что $AC \perp CC'$ и $AC \perp CD$, значит, плоскость ACD' содержит прямую $AC \perp CC'D$. $C'K \perp CD'$, следовательно, $C'K \perp ACD'$ и AK — проекция AC' . Следовательно, $\angle C'AK$ — искомый, поскольку это угол между прямой и ее проекцией AK .

Рассмотрим прямоугольный $\triangle AC'C$: $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$;

$KC' = \frac{1}{2}C'D = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (поскольку $C'D$ — диагональ квадрата $CC'DD'$).

$$\angle C'AK = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$



Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

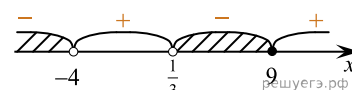
Решение. Пусть $t = 3^x$, тогда

$$\frac{1}{t+4} \leq \frac{2}{3t-1} \Leftrightarrow \frac{3t-1-2t-8}{(t+4)(3t-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t-9}{(t+4)(3t-1)} \leq 0.$$

Применяя метод интервалов, получаем: $t < -4$, $\frac{1}{3} < t \leq 9$. Вернемся к исходной переменной:

$$\begin{cases} 3^x < -4, \\ \frac{1}{3} < 3^x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 2.$$

Ответ: $(-1; 2]$.



№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть $t = 2^x > 0$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t^2 - 8t + 7}{t^2 - 5t + 4} \leq \frac{t-9}{t-4} + \frac{1}{t-6} \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t-7)}{(t-1)(t-4)} - \frac{t-9}{t-4} \leq \frac{1}{t-6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{t-4} - \frac{1}{t-6} \leq 0, t \neq 1 \Leftrightarrow \frac{t-8}{(t-4)(t-6)} \leq 0, t \neq 1,$$

откуда $t \in (0; 1) \cup (1; 4) \cup (6; 8]$.

При $t < 1$ получим: $2^x < 1$, откуда $x < 0$.

При $1 < t < 4$ получим: $1 < 2^x < 4$, откуда $0 < x < 2$.

При $6 < t \leq 8$ получим: $6 < 2^x \leq 8$, откуда $\log_2 6 < x \leq 3$.

Решение исходного неравенства: $x < 0$; $0 < x < 2$; $\log_2 6 < x \leq 3$.

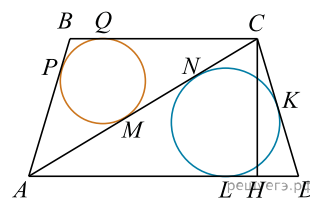
Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (\log_2 6; 3]$.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AB , BC и AC буквами P , Q и M соответственно. По условию $AM = MC$, кроме того, $AM = AP$, $MC = CQ$, $BQ = BP$ как отрезки касательных, а тогда

$$AB = AP + PB = BQ + QC = BC.$$



б) Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AC , CD и AD буквами N , K и L соответственно. Пусть $BP = BQ = y$, $AM = AP = 2x$. Тогда

$$MN = NC = CK = x,$$

$$CD = AB = 2x + y,$$

$$KD = DL = x + y,$$

$$AD = AL + LD = 3x + x + y = 4x + y.$$

Проведем высоту трапеции CH , тогда $CH^2 = AC^2 - AH^2 = CD^2 - HD^2$. Заметим, что

$$HD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{4x + y - (2x + y)}{2} = x,$$

откуда

$$\begin{aligned} (4x)^2 - (3x + y)^2 &= (2x + y)^2 - x^2 \Leftrightarrow 7x^2 - 6xy - y^2 = 3x^2 + 4xy + y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy - y^2 &= 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x}{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{5 + \sqrt{33}}{4}, (4x)^2 - (3x + y)^2 = (2x + y)^2 - x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 7x^2 - 6xy - y^2 &= 3x^2 + 4xy + y^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x}{y} - 1 &= 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{5 + \sqrt{33}}{4}, (4x)^2 - (3x + y)^2 = (2x + y)^2 - x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 7x^2 - 6xy - y^2 &= 3x^2 + 4xy + y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy - y^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x}{y} - 1 &= 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{5 + \sqrt{33}}{4}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{BC}{AD} = \frac{2x + y}{4x + y} = \frac{2 \cdot \frac{x}{y} + 1}{4 \cdot \frac{x}{y} + 1} &= \frac{\frac{5 + \sqrt{33}}{2} + 1}{5 + \sqrt{33} + 1} = \frac{7 + \sqrt{33}}{12 + 2\sqrt{33}} = \frac{9 - \sqrt{33}}{6}, \frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{BC}{AD} = \frac{2x + y}{4x + y} = \frac{2 \cdot \frac{x}{y} + 1}{4 \cdot \frac{x}{y} + 1} = \\ &= \frac{\frac{5 + \sqrt{33}}{2} + 1}{5 + \sqrt{33} + 1} = \frac{7 + \sqrt{33}}{12 + 2\sqrt{33}} = \frac{9 - \sqrt{33}}{6}. \end{aligned}$$

Ответ: б) $\frac{9 - \sqrt{33}}{6}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Изобразим первое уравнение системы на плоскости:

$$\begin{cases} y - 2x + 16 = 0, \\ xy - 2x + 16 = 0, \\ y - 2x + 16 \geq 0. \end{cases}$$

Система задает часть гиперболы $y = 2 - \frac{16}{x}$, расположенную не ниже прямой $y = 2x - 16$. Найдем точки пересечения прямой $y = 2x - 16$ и гиперболы $y = 2 - \frac{16}{x}$:

$$2x - 16 = 2 - \frac{16}{x} \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 18x + 16}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 9x + 8}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 8. \end{cases}$$

Таким образом, абсциссы точек пересечения равны 1 и 8, тогда ординаты точек пересечения равны $y(1) = -14$ и $y(8) = 0$.

Изобразим на плоскости второе уравнение системы: $y = ax - 14$ — это не вертикальная прямая, проходящая через точку $(0; -14)$. Если $a < 0$, то $y = ax - 14$ пересекает прямую $y = 2x - 16$, так как коэффициенты различны. Чтобы узнать, пересекает ли прямая $ax - 14$ гиперболу $2 - \frac{16}{x}$, решим уравнение $ax - 14 = 2 - \frac{16}{x}$:

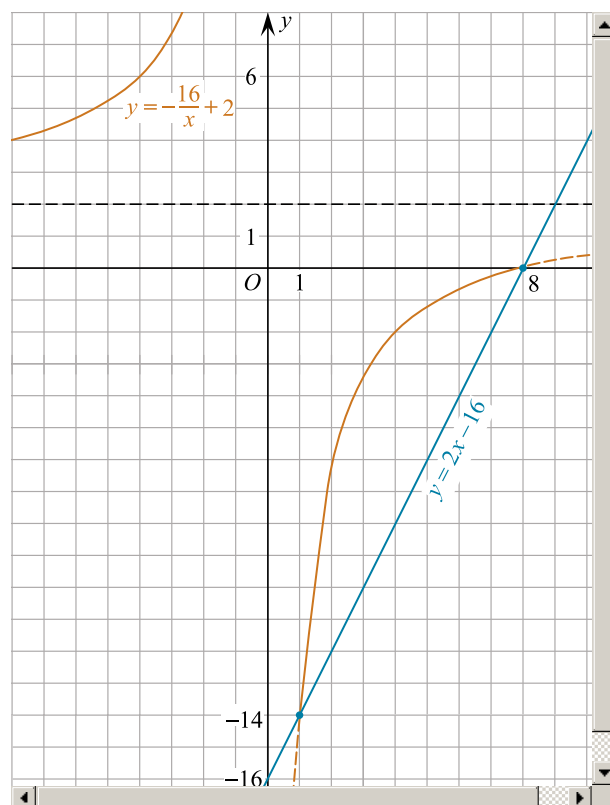
$$ax - 14 = 2 - \frac{16}{x} \Leftrightarrow \frac{ax^2 - 16x + 16}{x} = 0$$

При $a < 0$ $x_1 = \frac{8 + 4\sqrt{4-a}}{a} < 0$ и $x_2 = \frac{8 - 4\sqrt{4-a}}{a} > 0$, но поскольку $a < 0$, то $ax_2 - 14 < -14$, следовательно, с правой частью гиперболы $y = 2 - \frac{16}{x}$ прямая $y = ax - 14$ пересекается ниже прямой $y = 2x - 16$. Следовательно, прямая $y = ax - 14$ пересекает только левую часть гиперболы, $a < 0$ подходит.

Если $a = 0$, то прямая $y = ax - 14$ имеет вид $y = -14$ — эта прямая параллельна оси x , следовательно, имеет с гиперболой $y = 2 - \frac{16}{x}$ только одну точку пересечения. Определим ее координаты, решив уравнение

$$2 - \frac{16}{x} = -14 \Leftrightarrow 16 = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x = 1.$$

Эта точка совпадает с точкой пересечения с прямой $y = 2x - 16$:



$$2x - 16 = -14 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

При $a \neq 0$ система имеет только одно решение, следовательно, значение $a \neq 0$ не подходит.

Если $a > 0$, то у прямой $y = ax - 14$ с левой частью гиперболы $y = 2 - \frac{16}{x}$ общих точек нет, поэтому два различных решения должны быть при пересечении с прямой $y = 2x - 16$ и правой частью гиперболы $y = 2 - \frac{16}{x}$. Если с гиперболой нет общих точек, то решений не более 1 и такая ситуация не подходит.

Если прямая $y = ax - 14$ является касательной к правой части гиперболы, то

$$ax - 14 = 2 - \frac{16}{x} \Leftrightarrow \frac{ax^2 - 16x + 16}{x} = 0.$$

Найдем значение a , при котором дискриминант уравнения $ax^2 - 16x + 16 = 0$ равен нулю:

$$D = 0 \Leftrightarrow 16^2 - 64a = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

При $a = 4$ уравнение имеет единственный корень — $x = 2$. Также при $a = 4$:

$$4x - 14 = 2x - 16 \Leftrightarrow x = -1,$$

получаем два различных решения, $a = 4$ подходит.

Если прямая $y = ax - 14$ имеет две точки пересечения с правой частью гиперболы $y = 2 - \frac{16}{x}$, то либо прямая $y = ax - 14$ должна быть параллельна $y = 2x - 16$, либо одна из точек пересечения должна лежать не выше прямой $y = 2x - 16$. Рассмотрим прямую $y = ax - 14$ параллельную $y = 2x - 16$. Угловым коэффициент прямой $y = ax - 14$ угловому коэффициенту прямой $y = 2x - 16$, следовательно, $a = 2$. Тогда

$$2x - 14 = 2 - \frac{16}{x} \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 16x + 16}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{2}, \\ x = 4 - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Оба найденных корня лежат в промежутке $[1; 8]$, следовательно, существует два различных корня и $a = 2$ подходит.

Если прямая $y = ax - 14$ пересекает прямую $y = 2 - \frac{16}{x}$ не выше прямой $y = 2x - 16$, это значит, что $y = ax - 14$ проходит не выше точки $(8; 0)$, то есть $a \cdot 8 - 14 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{7}{4}$ (при $a > 0$). Если $0 < a \leq \frac{7}{4}$, то $a \cdot 1 - 14 > -14$ — $y = ax - 14$ проходит выше точки $(1; -14)$, то есть вторая точка пересечения с гиперболой лежит выше прямой $y = 2x - 16$. При $0 < a \leq \frac{7}{4}$ $y = ax - 14$ пересекается с прямой $y = 2x - 16$ при $x = \frac{2}{2-a}$ — два различных решения.

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{7}{4}\right] \cup \{2; 4\}$.

Приведем аналитическое решение.

Определим, при каких значениях a уравнение $(ax^2 - 16x + 16)\sqrt{(a-2)x+2} = 0$ имеет два различных решения. Выполним преобразования:

$$(ax^2 - 16x + 16)\sqrt{(a-2)x+2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)x+2 = 0, \\ \begin{cases} ax^2 - 16x + 16 = 0, \\ (a-2)x+2 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Рассмотрим случай $a = 2$:

$$\begin{cases} 2 = 0, \\ \begin{cases} 2x^2 - 16x + 16 = 0, \Leftrightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{2}. \\ 2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Уравнение имеет два различных решения, значение $a = 2$ подходит.

Рассмотрим случай $a = 0$:

$$\begin{cases} -2x+2=0, \\ \begin{cases} -16x+16=0, \\ -2x+2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ \begin{cases} x=1, \\ x \leq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Уравнение имеет одно решение, значение $a=0$ не подходит.

Рассмотрим случай $a > 2$:

$$\begin{cases} x = \frac{-2}{a-2} < 0, \\ \begin{cases} ax^2 - 16x + 16 = 0, \\ x \geq \frac{-2}{a-2}. \end{cases} \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $ax^2 - 16x + 16 = 0$. Его дискриминант равен $D = 16^2 - 64a = 64(4-a)$. Если $D > 0$, то

$$x = \frac{8 \pm 4\sqrt{4-a}}{a} > 0 > -\frac{2}{a-2},$$

получаем всего 3 решения, что не подходит. Если $D=0$, то $a=4$, $x=2 > 0 > -\frac{2}{a-2}$ — всего 2 решения, $a=4$ подходит. Если $D < 0$, то всего 1 решение, что не подходит.

Рассмотрим случай $a < 0$:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{2-a} > 0, \\ \begin{cases} ax^2 - 16x + 16 = 0, \\ x \leq \frac{2}{2-a}. \end{cases} \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $ax^2 - 16x + 16 = 0$. Оно имеет два решения:

$$x_1 = \frac{8+4\sqrt{4-a}}{a} < 0 < \frac{2}{2-a}$$

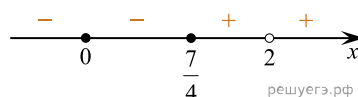
подходит, а $x_2 = \frac{8-4\sqrt{4-a}}{a} > 0$ и должно выполняться $x_2 \geq \frac{2}{2-a}$, чтобы было 2 решения. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{8-4\sqrt{4-a}}{a} &\geq \frac{2}{2-a} \Leftrightarrow 8-4\sqrt{4-a} \leq \frac{2a}{2-a} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8 - \frac{2a}{2-a} &\leq 4\sqrt{4-a} \Leftrightarrow 4 - \frac{a}{2-a} \leq 2\sqrt{4-a} \Leftrightarrow \frac{8-5a}{2-a} \leq 4\sqrt{4-a}. \frac{8-4\sqrt{4-a}}{a} \geq \frac{2}{2-a} \Leftrightarrow 8-4\sqrt{4-a} \leq \frac{2a}{2-a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8 - \frac{2a}{2-a} \leq 4\sqrt{4-a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 - \frac{a}{2-a} \leq 2\sqrt{4-a} \Leftrightarrow \frac{8-5a}{2-a} \leq 4\sqrt{4-a}. \end{aligned}$$

Так как $a > 0$, то $2-a > 0$, $8-5a > 0$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{64-80a+25a^2}{(2-a)^2} - 16 + 4a &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{64-80a+25a^2-64+64a-16a^2+16a-16a^2+4a^3}{(2-a)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{4a^3-7a^2}{(2-a)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2(4a-7)}{(a-2)^2} \leq 0. \frac{64-80a+25a^2}{(2-a)^2} - 16 + 4a \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{64-80a+25a^2-64+64a-16a^2+16a-16a^2+4a^3}{(2-a)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{4a^3-7a^2}{(2-a)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2(4a-7)}{(a-2)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Воспользуемся методом интервалов:



С учетом того, что $a < 0$, получаем, что $a \in (-\infty; 0)$.

Рассмотрим случай $0 < a < 2$:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{2-a}, \\ \begin{cases} ax^2 - 16x + 16 = 0, \\ x \leq \frac{2}{2-a}. \end{cases} \end{cases}$$

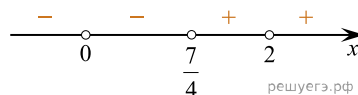
Рассмотрим уравнение $ax^2 - 16x + 16 = 0$. Оно имеет два решения: корень $x_1 = \frac{8+4\sqrt{4-a}}{a}$ должен быть больше или равен $\frac{2}{2-a}$, а корень $x_2 = \frac{8-4\sqrt{4-a}}{a}$ должен быть меньше $\frac{2}{2-a}$, чтобы было 2 различных решения. Имеем:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{8+4\sqrt{4-a}}{a} \geq \frac{2}{2-a}, \\ \frac{8-4\sqrt{4-a}}{a} < \frac{2}{2-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8+4\sqrt{4-a} \geq \frac{2a}{2-a}, \\ 8-4\sqrt{4-a} < \frac{2a}{2-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{4-a} \geq \frac{2a}{2-a} - 8, \\ 8 - \frac{2a}{2-a} < 4\sqrt{4-a} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{4-a} \geq \frac{a}{2-a} - 4, \\ 4 - \frac{a}{2-a} < 2\sqrt{4-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{4-a} \geq \frac{5a-8}{2-a}, & (1) \\ \frac{8-5a}{2-a} < 2\sqrt{4-a}. & (2) \end{cases} \begin{cases} \frac{8+4\sqrt{4-a}}{a} \geq \frac{2}{2-a}, \\ \frac{8-4\sqrt{4-a}}{a} < \frac{2}{2-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8+4\sqrt{4-a} \geq \frac{2a}{2-a}, \\ 8-4\sqrt{4-a} < \frac{2a}{2-a} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{4-a} \geq \frac{2a}{2-a} - 8, \\ 8 - \frac{2a}{2-a} < 4\sqrt{4-a} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{4-a} \geq \frac{a}{2-a} - 4, \\ 4 - \frac{a}{2-a} < 2\sqrt{4-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{4-a} \geq \frac{5a-8}{2-a}, & (1) \\ \frac{8-5a}{2-a} < 2\sqrt{4-a}. & (2) \end{cases} \begin{cases} \frac{8+4\sqrt{4-a}}{a} \geq \frac{2}{2-a}, \\ \frac{8-4\sqrt{4-a}}{a} < \frac{2}{2-a} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{4-a} \geq \frac{2a}{2-a} - 8, \\ 8 - \frac{2a}{2-a} < 4\sqrt{4-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{4-a} \geq \frac{a}{2-a} - 4, \\ 4 - \frac{a}{2-a} < 2\sqrt{4-a} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{4-a} \geq \frac{5a-8}{2-a}, & (1) \\ \frac{8-5a}{2-a} < 2\sqrt{4-a}. & (2) \end{cases} \begin{cases} \frac{8+4\sqrt{4-a}}{a} \geq \frac{2a}{2-a}, \\ \frac{8-4\sqrt{4-a}}{a} < \frac{2a}{2-a} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 8+4\sqrt{4-a} \geq \frac{2a}{2-a}, \\ 8-4\sqrt{4-a} < \frac{2a}{2-a} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{4-a} \geq \frac{2a}{2-a} - 8, \\ 8 - \frac{2a}{2-a} < 4\sqrt{4-a} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{4-a} \geq \frac{a}{2-a} - 4, \\ 4 - \frac{a}{2-a} < 2\sqrt{4-a} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{4-a} \geq \frac{5a-8}{2-a}, & (1) \\ \frac{8-5a}{2-a} < 2\sqrt{4-a}. & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Так как $0 < a < 2$, то $2-a > 0$. Если $5a-8 < 0$, то (1) верно, а (2) преобразится в

$$\left(\frac{8-5a}{2-a}\right)^2 < 4(4-a) \Leftrightarrow \frac{a^2(4a-7)}{(a-2)^2} < 0.$$

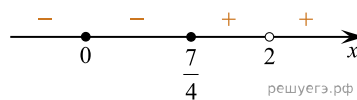
Воспользуемся методом интервалов:



Так как $0 < a < 2$ и $a < \frac{8}{5}$, то получим, что $a \in \left(0; \frac{8}{5}\right)$. Если $5a-8=0$, то (1) и (2) верно— $a = \frac{8}{5}$ подходит. Если $5a-8 > 0$, то (2) верно, а (1) преобразуется в

$$4(4-a) \geq \left(\frac{5a-8}{2-a}\right)^2 \Leftrightarrow 0 \geq \frac{a^2(4a-7)}{(a-2)^2}.$$

Воспользуемся методом интервалов:



решуегэ.рф

Так как $0 < a < 2$ и $a > \frac{8}{5}$, то $a \in \left(\frac{8}{5}; \frac{7}{4}\right]$.

Объединив все три случая, получим, что если $0 < a < 2$, то $a \in \left(0; \frac{7}{4}\right]$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные результаты (см. критерий на 1 балл).	4
Верно получены три из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл).	3
Верно получены два из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл).	2
Верно получен один из перечисленных результатов: — приведен верный пример в пункте а; — обоснованное решение пункта б; — доказательство невозможности равенства полученных произведений в; — доказательство того, что любое четное натуральное число является ответом на вопрос пункта в.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. а) Да. Например, Коля умножил 6 на 7, получив 42, а Вова умножил 6 на 8, получив 48. Модуль разности полученных произведений равен 6.

б) Заметим, что произведение последовательных чисел всегда четно, поскольку одно из них четно. Таким образом, Коляно произведение будет четным. Вовино же произведение четно в силу того, что он перемножает два четных числа. Значит, и модуль разности чисел a и b будет четным. Таким образом, он не может быть равен 13.

в) Как было показано в пункте б), модуль разности будет четным. Покажем, что он не может быть равен нулю. Пусть Коля перемножал числа x и $x+1$, а Вова — числа y и $y+2$. Тогда, если модуль разности их произведений равен нулю, имеем:

$$x(x+1) = y(y+2) \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + 2y \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = (y+1)^2.$$

Заметим, что $x < y+1$, поскольку $x^2 < (y+1)^2$. С другой стороны, $y+1 < x+1$, поскольку $(y+1)^2 = x^2 + x + 1 < (x+1)^2$.

Итак, $x < y+1 < x+1$, но натуральное число не может лежать между двумя соседними натуральными числами. Значит, модуль разности не может равняться 0. Тогда он не меньше 2, поскольку четен.

Покажем, что он может принимать любое четное натуральное значение. Пусть Коля умножил четное число n на $n+1$, а Вова умножил n на $n+2$. Тогда модуль разности их произведений равен:

$$n(n+2) - n(n+1) = n.$$

Бвиду того, что n — любое четное натуральное число, искомый модуль разности может принимать любое четное натуральное значение.

Ответ: а) да; б) нет; в) все четные натуральные числа.

