

Вариант 261

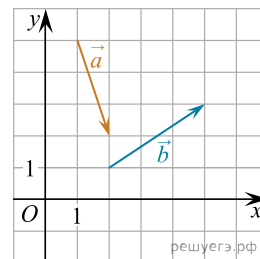
ID: 13962

№ 1.

Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 12. Синус острого угла трапеции равен 0,8. Найдите боковую сторону.

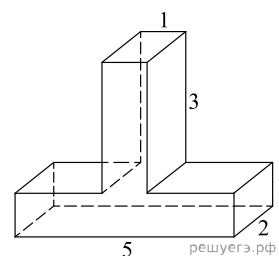
№ 2.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



№ 3.

Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



№ 4.

Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

№ 5.

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

№ 6.

Случайная величина X принимает только два значения: 0 и a , где $a > 0$. Известно, что $P(X = 0) = 0,8$, дисперсия $D(X) = 1,44$. Найдите математическое ожидание величины X .

№ 7.

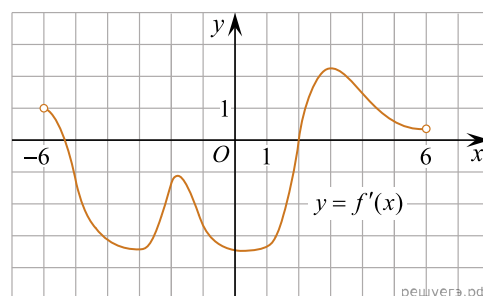
Найдите корень уравнения $(x - 1)^3 = 8$.

№ 8.

Найдите $61a - 11b + 50$, если $\frac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9$.

№ 9.

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



№ 10.

Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 3$ моль воздуха объемом $V_1 = 8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 5,75$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

№ 11.

Из двух городов, расстояние между которыми 720 км, по параллельным путям отправляются навстречу друг другу два поезда и встречаются на середине пути. Второй поезд вышел на 1 ч позже первого со скоростью, на 4 км/ч большей, чем скорость первого поезда. Найдите скорость второго поезда. Ответ дайте в км/ч.

№ 12.

null

№ 13.

а) Решите уравнение $2\sin^2 x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

№ 14.

Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной 10 и $\angle A = 120^\circ$ расположен так, что его вершина A лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины B и C — на окружности верхнего основания.

а) Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра.

б) Докажите, что радиус основания цилиндра больше, чем AB .

№ 15.

Решите неравенство $\log_2 \left(\frac{1}{x} - 1\right) + \log_2 \left(\frac{1}{x} + 1\right) \leq \log_2 (27x - 1)$.

№ 16.

Решите неравенство $\log_2 \frac{8}{x} - \frac{10}{\log_2 16x} \geq 0$.

№ 17.

Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , а BH — высота этого треугольника.

- а) Докажите, что углы ABH и CBO равны.
 - б) Найдите BH , если $AB = 8$, $BC = 9$, $BH = BO$.
-

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a - 5)x + 2ay + 1 = 0, \\ x^2 + y = xy + x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

№ 19.

Вася и Петя решали задачи из сборника, и они оба решили все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 5 дней?

б) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу больше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 4 дня?

в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике если каждый из ребят решал задачи более 6 дней, причем в первый день один из мальчиков решил на одну задачу больше чем другой?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	77152	5
2	644807	-3
3	512330	52
4	621760	0,6
5	320173	0,02
6	704656	0,6
7	282849	3
8	26806	10
9	6429	14
10	27996	2
11	635151	40

№ 12.

null

null

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}
 \cos 4x + \frac{\cos x}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{\cos x}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = -\cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 4x &= \pi \pm \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \\ 5x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, \\ x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}, \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \quad \cos 4x + \frac{\cos x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{\cos x}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos 4x = -\cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 4x = \pi \pm \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \\ 5x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, \\ x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}, \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \quad \cos 4x + \frac{\cos x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{\cos x}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos 4x = -\cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pi \pm \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \\ 5x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, \\ x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни при помощи двойных неравенств:

$$0 \leq \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 4 + 6k \leq 9 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{5}{6},$$

откуда $k = 0$, следовательно, $x = \frac{4\pi}{9}$. Далее,

$$0 \leq \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 2 + 6k \leq 15 \Leftrightarrow -\frac{2}{6} \leq k \leq \frac{5}{2},$$

откуда $k = 0$, $k = 1$ или $k = 2$. Найденным значениям параметра соответствуют корни $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{8\pi}{15}$ и $\frac{14\pi}{15}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{4\pi}{9}; \frac{2\pi}{15}, \frac{8\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть AA_1 — образующая цилиндра, M — середина хорды BC . Тогда

$$AM = AB \cdot \cos 60^\circ = 5.$$

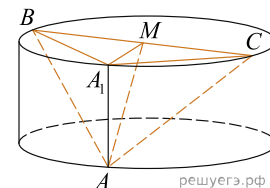
Треугольники ABA_1 и ACA_1 равны по гипотенузе и катету. Значит, $BA_1 = A_1C$.

В равнобедренных треугольниках BAC и BA_1C медианы AM и A_1M являются высотами. Поэтому искомый угол между плоскостями равен углу $\angle AMA_1$. В прямоугольном треугольнике AMA_1 имеем:

$$\sin \angle AMA_1 = \frac{AA_1}{MA} = \frac{3}{5}.$$

б) Из пункта а) получаем, что $A_1M = 4$ и

$$BM^2 = 10^2 - 5^2 = 75,$$



значит,

$$A_1B = \sqrt{75 + 16} = \sqrt{91}.$$

Тогда $\sin \angle A_1BC = \frac{4}{\sqrt{91}}$. Пусть R — радиус основания цилиндра. Тогда, по теореме синусов

$$2R = \frac{A_1C}{\sin \angle A_1BC} = \frac{91}{4}.$$

Отсюда $R = \frac{91}{8} > 10 = AB$. Что и требовалось доказать.

Ответ: $\arcsin \frac{3}{5}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Левая часть неравенства определена при $0 < x < 1$, поэтому при $0 < x < 1$ неравенство принимает вид:

$$\frac{1}{x^2} - 1 \leq 27x - 1 \Leftrightarrow \frac{27x^3 - 1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3x)^3 - 1}{x^2} \geq 0,$$

откуда $x \geq \frac{1}{3}$. Учитывая ограничения $0 < x < 1$, получаем: $\frac{1}{3} \leq x < 1$.

Ответ: $\left[\frac{1}{3}; 1\right)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Относительно $t = \log_2 x$ неравенство имеет вид:

$$3 - t - \frac{10}{t+4} \geq 0, \frac{(3-t) \times (t+4) - 10}{t+4} \geq 0, \frac{-t^2 - t + 2}{t+4} \geq 0, \frac{(t+2) \times (1-t)}{t+4} \geq 0. \quad 3 - t - \frac{10}{t+4} \geq 0, \frac{(3-t) \times (t+4) - 10}{t+4} \geq 0, \frac{-t^2 - t + 2}{t+4} \geq 0, \frac{(t+2) \times (1-t)}{t+4} \geq 0.$$

Значит, $t < -4$ или $-2 \leq t \leq 1$. Возвращаясь к x , получаем:

$$\log_2 x < -4 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{16}$$

или

$$-2 \leq \log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq 2.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; 2\right]$.

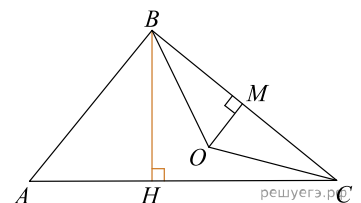
№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Обозначим угол BAC через α . Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, поскольку является центральным углом, опирающимся на ту же дугу окружности, что и угол BAC . В равнобедренном треугольнике BOC получаем $\angle CBO = 90^\circ - \alpha$, а в прямоугольном треугольнике BAH получаем $\angle ABH = 90^\circ - \alpha$. Таким образом, $\angle CBO = \angle ABH$.

б) Пусть M — середина отрезка BC . Прямоугольные треугольники BAH и BOM подобны, поскольку $\angle ABH = \angle OBM$. Значит,

$$\frac{BH}{AB} = \frac{BM}{BO} \Leftrightarrow BH^2 = \frac{AB \cdot BC}{2} \Leftrightarrow BH = \sqrt{\frac{AB \cdot BC}{2}} = 6.$$



Ответ: б) 6.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , возможно, отличающееся от искомого только включением точек $a = 3$ и/или $a = \frac{25}{8}$, и при этом рассмотрен случай $a = 0$.	3
С помощью верного рассуждения получены промежутки $(-\infty; 0)$ и $(3; \frac{25}{8})$, возможно, с включением точек $a = 3$ и/или $a = \frac{25}{8}$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом выполнены все шаги решения.	2
Верно рассмотрен хотя бы один и случаев решения и получен или промежуток $(-\infty; \frac{25}{8})$, или два промежутка $(-\infty; 0)$ и $(3; +\infty)$, возможно, с включением граничных точек. ИЛИ Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и прямых (аналитически или графически).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Решим второе уравнение системы.

$$x^2 + y = xy + x \Leftrightarrow (x - 1)(x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = x. \end{cases}$$

При $a = 0$ исходная система имеет единственное решение — $(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{5})$.

При $a \neq 0$ при подстановке в первое уравнение системы $x = 1$ или $y = x$ получаются квадратные уравнения. Значит, исходная система уравнений имеет ровно 4 различных решения тогда и только тогда, когда каждое из этих уравнений имеет ровно два корня и пара чисел $(1; 1)$ не является решением исходной системы.

При $x = 1$ получаем:

$$ay^2 + 2ay + 6 - a = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$4a^2 + 4a^2 - 24a > 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a > 0,$$

откуда $a < 0$ или $a > 3$.

При $y = x$ получаем:

$$2ax^2 + 5x + 1 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня при положительном дискриминанте:

$$25 - 8a > 0,$$

откуда, учитывая условие $a \neq 0$, получаем $a < 0$ или $0 < a < \frac{25}{8}$.

Пара чисел $(1; 1)$ является решением исходной системы при $2a + 6 = 0$, то есть $a = -3$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно 4 решения при $a < -3$; $-3 < a < 0$; $3 < a < \frac{25}{8}$.

Ответ: $a < -3$; $-3 < a < 0$; $3 < a < \frac{25}{8}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Пусть Петя в первый день решил x задач. Тогда в оставшиеся дни он решил $x+2$, $x+4$, $x+6$, $x+8$ задач. Всего в сборнике оказывается $5x+20$ задач. Вася в первый день решил $x-1$ задачу. В следующие дни он решал x , $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, ... задач. За пять дней решить все задачи Вася не мог. Если Вася решил все задачи сборника за шесть дней, то он решил $6x+9$ задач. Уравнение $5x+20 = 6x+9$ имеет решение $x = 11$. Таким образом, приведен пример, удовлетворяющий условию: Вася решил в первый день 10 задач, Петя — 11 задач.

б) Вновь обозначим за x число задач, решенных Петей в первый день. Тогда всего Петя решил $4x+12$ задач. Вася решал $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$, ... задач. Если Вася решил все задачи сборника за четыре дня или менее, то он решил не более $4x+10$ задач. Но тогда Вася решил меньше задач, чем Петя. Противоречие. Если Вася решал задачи пять дней или более, то он решил как минимум $5x+15$ задач. Тогда Вася решил больше задач, чем Петя. Противоречие.

в) Петя решал задачи не менее семи дней. Начнем со случая, когда он решал задачи ровно семь дней.

Тогда в сборнике оказывается $7x+42$ задачи. Если Вася решил в первый день на одну задачу больше, чем Петя, то за семь дней он решил $7x+28$ задач. Следовательно, Вася решал задачи более семи дней. За восемь дней он бы решил $8x+36$ задач. Уравнение $7x+42 = 8x+36$ имеет решение $x=6$. За девять или более дней Вася бы решил как минимум $9x+45$ задач, что превосходит число задач в сборнике. Если Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, то вновь ему, очевидно, придется решать задачи более семи дней. За восемь дней он бы решил $8x+20$ задач, за девять дней $9x+27$ задач, за десять дней $10x+35$ задач, за большее число дней как минимум $11x+44$ задачи (что заведомо больше числа задач в сборнике). Уравнения $7x+42 = 8x+20$, $7x+42 = 9x+27$, $7x+42 = 10x+35$ не имеют целых решений, меньших 6.

Таким образом, в случае, когда Петя решал задачи ровно семь дней, в сборнике не могло оказаться меньше $7x+42 = 7 \cdot 6 + 42 = 84$ задач (напомним, что такое могло быть, если Петя решил в первый день 6 задач, а Вася — 7, Петя решал задачи 7 дней, а Вася — 8).

Перейдем к случаям, когда Петя решал задачи более семи дней. Перечислим всевозможные значения, которые может принимать сумма $1+2+\dots+n$: это 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, ... (так называемые треугольные числа).

Если Петя решил весь сборник за 8 дней, то он решил $8x+56$ задач. Нас интересует, может ли это число быть меньше 84. Необходимо проверить $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

При $x=1$ задач в сборнике $8 \cdot 1 + 56 = 64$. Вася в первый день решил 2 задачи, то есть всего Вася решил $2+3+4+5+\dots$ задач. Следовательно, 64 должно быть меньше треугольного числа на 1. Противоречие.

При $x=2$ задач в сборнике $8 \cdot 2 + 56 = 72$. Вася в первый день решил или 1 задачу, или 3 задачи. Следовательно, 72 должно или совпадать с треугольным числом, или быть меньше него на $1+2=3$. Противоречие.

При $x=3$ задач в сборнике $8 \cdot 3 + 56 = 80$. Вася в первый день решил или 2, или 4 задачи. Следовательно, 80 должно быть меньше треугольного числа или на 1, или на $1+2+3=6$. Противоречие.

Если же Петя решил весь сборник за 9 дней, то он решил $9x+72$ задач. Единственная подходящая возможность, чтобы задач в сборнике было меньше 84, это $x=1$. Но тогда в сборнике 81 задача. В первый день Вася решил 2 задачи. Следовательно, 81 должно быть на 1 меньше треугольного числа. Противоречие.

Если Петя решал сборник более 9 дней, то он решил как минимум $10x+90$ задач, что заведомо больше 84.

Ответ: а) да; б) нет; в) 84.

