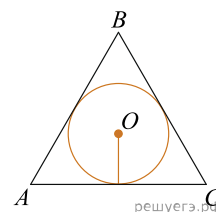


Вариант 265

ID: 13966

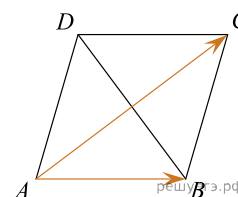
№ 1.

Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.



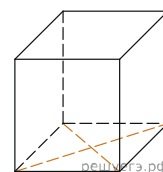
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.



№ 3.

В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 248. Найдите боковое ребро этой призмы.



№ 4.

Проводится жеребьёвка Лиги Чемпионов. На первом этапе жеребьёвки восемь команд, среди которых команда «Барселона», распределены случайным образом по восьми игровым группам— по одной команде в группу. Затем по этим же группам случайным образом распределяются еще восемь команд, среди которых команда «Зенит». Найдите вероятность того, что команды «Барселона» и «Зенит» окажутся в одной игровой группе.

№ 5.

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

№ 6.

null

№ 7.

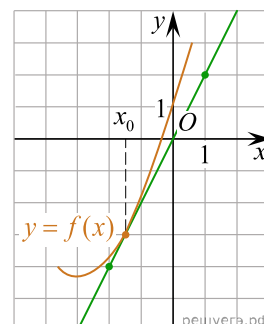
null

№ 8.

Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt[3]{7a^2})^6}{a^4}$ при $a \neq 0$.

№ 9.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



№ 10.

null

№ 11.

По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 90 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 1 минуте. Ответ дайте в метрах.

№ 12.

null

№ 13.

null

№ 14.

- а) Решите уравнение $\frac{1 - \sin x + \sqrt{3} \sin 2x}{2\sqrt{3} \cos x - 3} = \frac{1}{3} + \sin x$.
- б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right)$.
-

№ 15.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны углы: $\angle C_1 A A_1 = \alpha$, $\angle C_1 A B = \beta$, $\angle C_1 A D = \gamma$.

- а) Докажите, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
- б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью $A_1 B_1 C_1$, если $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.
-

№ 16.

Решите неравенство: $\frac{\log_2^2 x - \log_2(2x^3) + 2}{\log_2^2 x - 4} \leq 1$.

№ 17.

null

№ 18.

null

№ 19.

Найдите все значения a , при которых уравнение $a|x-4| = \frac{5}{x+1}$ на промежутке $[0, +\infty)$ имеет ровно два корня.

ОТВЕТЫ

Номер	Задание	Ответ
1	27907	2
2	27716	10
3	27148	10
4	500037	0,125
5	320173	0,02

№ 6.

null

null

№ 7.

null

null

82683249 9275032

№ 10.

null

null

1199611400

№ 12.

null

null

№ 13.

null

null

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Сведем уравнение к более простому, затем решим полученное уравнение введением вспомогательного угла:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -\sqrt{3} \cos x, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -\sqrt{3} \cos x, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -\sqrt{3} \cos x, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -\sqrt{3} \cos x, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -\sqrt{3} \cos x, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

б) Отберем корни при помощи двойного неравенства:

$$\begin{aligned}
-\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq \frac{3\pi}{2} & \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{6} \leq 2k \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0. \quad -\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow -\frac{7}{6} \leq 2k \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0.
\end{aligned}$$

Найденному значению параметра соответствует число $\frac{\pi}{6}$

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{\pi}{6}$.

№ 15.

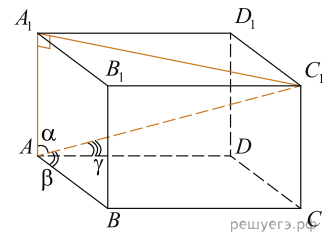
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Из прямоугольных треугольников AA_1C_1 , ABC_1 , ADC_1 соответственно находим:

$$\cos \alpha = \frac{AA_1}{AC_1},$$

$$\cos \beta = \frac{AB}{AC_1},$$

$$\cos \gamma = \frac{AD}{AC_1}.$$



Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его измерений, поэтому:

$$\begin{aligned} AC_1^2 &= AA_1^2 + AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{AA_1}{AC_1}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC_1}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AC_1}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \\ AC_1^2 &= AA_1^2 + AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{AA_1}{AC_1}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC_1}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AC_1}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad AC_1^2 = AA_1^2 + AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = \left(\frac{AA_1}{AC_1}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC_1}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AC_1}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \end{aligned}$$

б) Из доказанного в пункте а) находим:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ &= 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 \alpha &= \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ. \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ. \end{aligned}$$

Из прямоугольного треугольника AC_1A_1 получаем $\angle AC_1A_1 = 30^\circ$. Отрезок A_1C_1 есть проекция диагонали AC_1 на

плоскость $A_1B_1C_1$, следовательно, угол AC_1A_1 — искомый.

Ответ: б) 30° .

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $\log_2 x = t$, тогда

$$\log_2(2x^3) = \log_2 x^3 + \log_2 2 = 3\log_2 x + 1 = 3t + 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{t^2 - 3t - 1 + 2}{t^2 - 4} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{t^2 - 3t + 1}{t^2 - 4} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{t^2 - 3t + 1 - t^2 + 4}{t^2 - 4} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{5 - 3t}{(t - 2)(t + 2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < t \leq \frac{5}{3}, \\ t > 2. \end{cases} \frac{t^2 - 3t - 1 + 2}{t^2 - 4} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 3t + 1}{t^2 - 4} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{t^2 - 3t + 1 - t^2 + 4}{t^2 - 4} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{5 - 3t}{(t - 2)(t + 2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < t \leq \frac{5}{3}, \\ t > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Вернемся к исходной переменной, получим:

$$\begin{cases} -2 < \log_2 x \leq \frac{5}{3}, \\ \log_2 x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < x \leq 2^{\frac{5}{3}}, \\ x > 4. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; 2^{\frac{5}{3}}\right] \cup (4; +\infty)$.

№ 17.

null

null

№ 18.

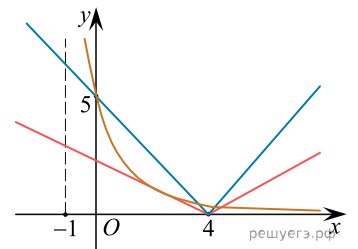
null

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. При $a \leq 0$ уравнение не имеет неотрицательных корней, поскольку его левая часть неположительна, а правая положительна. Определим, для $a > 0$ графики функции $y = a|x - 4|$ и $y = \frac{5}{x+1}$ имеют ровно две общие точки на области $x > 0$.

График функции $y = \frac{5}{x+1}$ — гипербола, её горизонтальная асимптота $y = 0$, вертикальная асимптота $x = -1$. При всех $a > 0$ график модуля пересекает гиперболу в точке, абсцисса которой больше числа 4 (см.рис.). Чтобы уравнение имело ровно два неотрицательных решения, значения параметра должны обеспечивать существование ровно одной второй точки пересечения на промежутке $[0; 4]$. Заметим, что на этом промежутке $|x - 4| = 4 - x$.



Абсциссы общих точек прямой $y = a(4 - x)$ и гиперболы определяются уравнением

$$a(4 - x) = \frac{5}{x+1} \Leftrightarrow a(4 - x)(x+1) = 5 \Leftrightarrow a(-x^2 + 3x + 4) = 5 \Leftrightarrow ax^2 - 3ax + 5 - 4a = 0. \quad a(4 - x) = \frac{5}{x+1} \Leftrightarrow a(4 - x)(x+1) = 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a(-x^2 + 3x + 4) = 5 \Leftrightarrow ax^2 - 3ax + 5 - 4a = 0.$$

Касанию соответствует нуль дискриминанта полученного квадратного уравнения:

$$D = 9a^2 - 4a(5 - 4a) = 9a^2 + 16a^2 - 20a = 25a^2 - 20a = 5a(5a - 4).$$

Дискриминант равен нулю при единственном положительном значении параметра $a = \frac{4}{5}$. Абсцисса точки касания при таком значении a действительно положительна: $x = \frac{3}{2}$ (а значит, рисунок верен, и найденное значение параметра подходит).

Определим значение параметра, при котором прямая $y = a(4 - x)$ проходит через точку $(0; 5)$. Поскольку $y(0) = 5$ находим: $a = \frac{5}{4}$. Следовательно, при $\frac{4}{5} < a \leq \frac{5}{4}$ на промежутке $[0; 4]$ график модуля пересекает гиперболу в двух точках, а при $a > \frac{5}{4}$ лишь в одной точке.

Итак, при $a = \frac{4}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$ уравнение имеет ровно два неотрицательных решения.

Ответ: при $a = \frac{4}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$.

Приведём авторское решение.

Рассмотрим функции $f(x) = a|x - 4|$ и $g(x) = \frac{5}{x+1}$. Исследуем $g(x) = f(x)$ на промежутке $[0, +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $[0, +\infty)$ неположительны, а все значения функции $g(x)$ — положительны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение не имеет решений на промежутке $(0, +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(4, +\infty)$, функция $g(x)$ убывает на этом промежутке, поэтому уравнение $g(x) = f(x)$ всегда имеет ровно одно решение на промежутке $[4, +\infty)$, поскольку $f(4) < g(4)$ и $f\left(4 + \frac{1}{a}\right) > g\left(4 + \frac{1}{a}\right)$.

На промежутке $[0, 4]$ уравнение $g(x) = f(x)$ принимает вид $4a - ax = \frac{5}{x+1}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 - 3ax + (5 - 4a) = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 9a^2 - 4a(5 - 4a) = 25a^2 - 20a$, поэтому при $0 < a < \frac{4}{5}$ это уравнение не имеет корней, при $a = \frac{4}{5}$ уравнение имеет единственный корень, равный $\frac{3}{2}$, при $a > \frac{4}{5}$ уравнение имеет два корня.

Пусть уравнение имеет два корня, то есть $a > \frac{4}{5}$. Тогда оба корня меньше 4, поскольку при $x \geq 4$ значения функции $4a - ax$ неположительны, а значения функции $\frac{5}{x+1}$ положительны. По теореме Виета сумма корней равна 3, а произведение равно $\frac{5}{a} - 4$. Значит, больший корень всегда принадлежит промежутку $[0, 4]$, а меньший принадлежит этому промежутку тогда и только тогда, когда $\frac{5}{a} - 4 \geq 0$.

Таким образом, исходное уравнение $a|x-4| = \frac{5}{x+1}$ имеет следующее количество корней на промежутке $[0, \infty)$:

- 1) Нет корней при $a \leq 0$.
- 2) Один корень при $0 < a < \frac{4}{5}$.
- 3) Два корня при $a = \frac{4}{5}$ и $a > \frac{5}{4}$.
- 4) Три корня при $\frac{4}{5} < a \leq \frac{5}{4}$.

Ответ: $a = \frac{4}{5}, a > \frac{5}{4}$.
