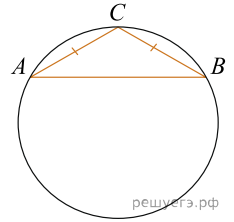


Вариант 266

ID: 13985

№ 1.

Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120° . Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.



№ 2.

Даны векторы $\vec{a} = (17; 0)$, $\vec{b} = (-1; 1)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + 12\vec{b}$.

№ 3.

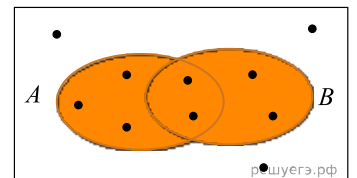
В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SC = 5$, $AC = 6$. Найдите длину отрезка SO .

№ 4.

В праздничном наборе 100 шариков: 10 красных, 20 синих, остальные желтые и зеленые, их поровну. Какова вероятность того, что из набора достали один шарик синего или желтого цвета?

№ 5.

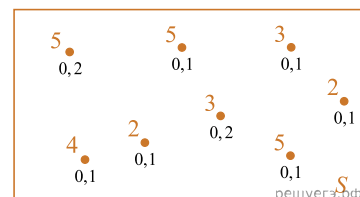
На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность события B при условии A .



№ 6.

На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X .

Найдите вероятность события $X = 5$.



№ 7.

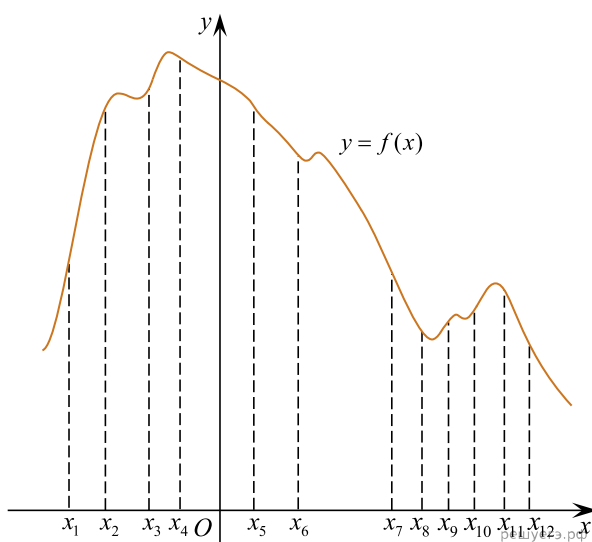
Решите уравнение $2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$.

№ 8.

Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0,4$.

№ 9.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



№ 10.

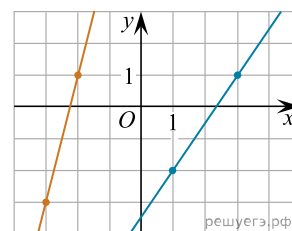
Гоночный автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч². Скорость v в конце пути вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь в км. Определите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 250 метров, приобрести скорость 60 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

№ 11.

Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

№ 12.

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.

**№ 13.**

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 500 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть 200 тыс. руб.;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Сколько тысяч рублей составит платёж в 2029 году?

№ 14.

а) Решите уравнение $(2\sin x + 2\cos(x + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{2}) \cdot \log_5(-\sin x) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

№ 15.

Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

- а) Докажите, что прямая BQ перпендикулярна прямой $B_1 P$.
б) Пусть H — проекция точки Q на прямую $B_1 P$. Найдите PH , если $AB = 12$.
-

№ 16.

Решите неравенство: $\frac{0,5^x - 8}{0,5^x - 4} \leq 0,5^x + 1$.

№ 17.

Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит 20 t Гбайт, а с сервера №2 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит 21 t Гбайт обработанной информации, $25 < t < 55$. Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3364 Гбайт?

№ 18.

Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .

- а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.
б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = 0,6$ и сторона $AC = 24$.
-

№ 19.

Найдите значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 - 5xy + y^2 + x - y - 2 = 0, \\ y = ax - 5 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

№ 20.

На столе лежат 140 карточек — синие и белые, на каждой карточке записано ровно одно натуральное число. Все числа на белых карточках различны, и число на любой синей карточке не меньше числа на любой белой карточке. Среднее арифметическое всех записанных чисел равно 70. Если все числа на синих карточках уменьшить на 5, а все числа на белых карточках увеличить на 2, то среднее арифметическое всех чисел станет равным 67,5 (при уменьшении некоторые числа могут не быть натуральными).

- а) Могут ли все числа на белых карточках быть четными?
- б) Может ли среднее арифметическое чисел на синих карточках равняться 70,5?
- в) Какое наименьшее среднее арифметическое может быть у чисел на синих карточках?

Ответы

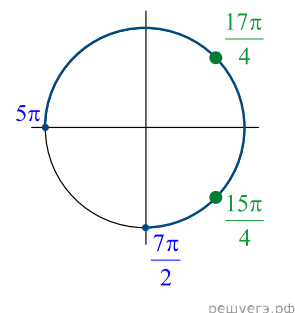
Номер	Задание	Ответ
1	27900	2
2	660709	13
3	284349	4
4	672740	0,55
5	509332	0,4
6	509533	0,4
7	77379	-2
8	26786	-2,5
9	317540	7
10	510825	7200
11	99586	320000
12	509197	-5
13	630197	336

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Используем формулы синуса суммы и косинуса суммы:

$$\begin{aligned}
 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) &= \sqrt{6} - 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{6} - (\sqrt{3} \cos x - \sin x) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{6} - 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x &= \sqrt{6} - (\sqrt{3} \cos x - \sin x) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



б) Отберем корни при помощи единичной окружности (см. рис.). Подходят числа $\frac{15\pi}{4}$ и $\frac{17\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{15\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

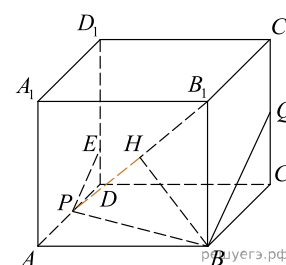
Решение. а) Пусть ребро куба равно $4a$. Отметим на ребре DD_1 такую точку E , что $DE = a$. Прямая PE параллельна прямой BQ , следовательно, необходимо проверить, что $\angle EPB_1 = 90^\circ$.

По теореме Пифагора вычислим длины сторон треугольника EPB_1 :

$$PE^2 = PD^2 + DE^2 = 5a^2,$$

$$B_1E^2 = B_1D_1^2 + D_1E^2 = 32a^2 + 9a^2 = 41a^2,$$

$$B_1P^2 = B_1B^2 + BA^2 + AP^2 = 16a^2 + 16a^2 + 4a^2 = 36a^2, \quad B_1P = 6a.$$



Поскольку

$$5a^2 + 36a^2 = 41a^2 = B_1E^2 = PE^2 + B_1P^2,$$

по теореме, обратной теореме Пифагора, получаем, что $\angle EPB_1 = 90^\circ$, то есть прямая BQ перпендикулярна прямой B_1P .

б) Поскольку прямая BQ перпендикулярна прямой B_1P , проекции точек B и Q на прямую B_1P совпадают. В прямоугольном треугольнике BB_1P имеем

$$\cos \angle HPB = \frac{HP}{PB} = \frac{PB}{PB_1},$$

откуда

$$PH = \frac{PB^2}{PB_1} = \frac{6^2 + 12^2}{18} = 10.$$

Ответ: б) 10.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Обозначим $t = 0,5^x$, получим неравенство рациональное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{t-8}{t-4} \leq t+1 &\Leftrightarrow \frac{t-8-(t+1)(t-4)}{t-4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t-8-(t^2-3t-4)}{t-4} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{t^2-4t+4}{t-4} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{(t-2)^2}{t-4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2, \\ t > 4. \end{cases} \frac{t-8}{t-4} \leq t+1 \Leftrightarrow \frac{t-8-(t+1)(t-4)}{t-4} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{t-8-(t^2-3t-4)}{t-4} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{t^2-4t+4}{t-4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-2)^2}{t-4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2, \\ t > 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Вернемся к исходной переменной, получим уравнение $0,5^x = 2$, решением которого является число -1 , и неравенство $0,5^x > 4$, решениями которого являются числа, меньшие -2 .

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \{-1\}$.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2 , а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гбайт информации. Требуется найти максимум суммы $20x + 21y$ при условии

$$x^2 + y^2 = 3364, \quad 25 < x < 55, \quad 25 < y < 55.$$

$3364 = 58^2$, поэтому $x = 58 \cos \alpha$, $y = 58 \sin \alpha$ для некоторого угла $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. $20^2 + 21^2 = 29^2$, поэтому

$$\begin{aligned} 20x + 21y &= 58(20 \cos \alpha + 21 \sin \alpha) = 58 \cdot 29 \left(\frac{20}{29} \cos \alpha + \frac{21}{29} \sin \alpha \right) = 58 \cdot 29 \sin(\alpha + \varphi) \\ 20x + 21y &= 58(20 \cos \alpha + 21 \sin \alpha) = \\ &= 58 \cdot 29 \left(\frac{20}{29} \cos \alpha + \frac{21}{29} \sin \alpha \right) = 58 \cdot 29 \sin(\alpha + \varphi) \end{aligned}$$

для некоторого вспомогательного угла φ с $\cos \varphi = \frac{20}{29}$, $\sin \varphi = \frac{21}{29}$. Следовательно, наибольшее значение суммы $20x + 21y = 58 \cdot 29 = 1682$. Оно достигается при $\cos \alpha = \frac{20}{29}$, $\sin \alpha = \frac{21}{29}$, $x = 40$, $y = 42$, то есть для значений, удовлетворяющих условиям $25 < x < 55$, $25 < y < 55$.

Приведём другое решение.

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2 , а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гбайт информации. Выразим y через x : $y = \sqrt{3364 - x^2}$. Требуется найти наибольшее значение функции $f(x) = 20x + 21\sqrt{3364 - x^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 20 - \frac{21x}{\sqrt{3364 - x^2}} = 0 &\Leftrightarrow 400 = \frac{441x^2}{3364 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{400 \cdot 3364}{841} = 1600 \Leftrightarrow x = 40. \\ f'(x) = 20 - \frac{21x}{\sqrt{3364 - x^2}} = 0 &\Leftrightarrow 400 = \frac{441x^2}{3364 - x^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{400 \cdot 3364}{841} = 1600 \Leftrightarrow x = 40. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что $x = 40$ — точка максимума функции, при этом $y = \sqrt{3364 - 1600} = 42$. Условия $25 < x < 55$, $25 < y < 55$ выполнены. Значит, $f_{\text{наиб}} = f(40) = 20 \cdot 40 + 21 \cdot 42 = 1682$.

Приведём третий вариант решения.

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2 , а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $C = 20x + 21y$ Гбайт информации.

$3364 = 58^2$, поэтому уравнение $x^2 + y^2 = 3364$ задает окружность радиуса 58 с центром в начале координат. Заметим, что уравнение $C = 20x + 21y$ задает семейство параллельных прямых. Мы ищем наибольшее значение C такое, что прямая $C = 20x + 21y$ имеет общие точки с окружностью. Из всех прямых семейства пересекающих окружность, наибольшее значение C будет достигаться в случае касания.

Проведем из начала координат в первый координатный квадрант вектор $\vec{a}(20; 21)$ перпендикулярный прямой $20x + 21y = C$. Луч, коллинеарный вектору $\vec{a}$, пересечёт окружность ω в точке $A(40; 42)$. Это и будет точка касания в которой достигается наибольшее значение C . Условия $25 < x < 55$, $25 < y < 55$ для точки $A(40; 42)$ выполнены. Значит, $C_{\text{наиб}} = 20 \cdot 40 + 21 \cdot 42 = 1682$.

Ответ: 1682.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть $\angle BAK = \alpha$, тогда из равнобедренности треугольника BKA следует, что $\angle KBA = \alpha$. Значит, треугольники ACK и BCA подобны по двум углам (угол C — общий). Из подобия получаем: $\frac{AC}{BC} = \frac{CK}{CA}$, откуда $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Заметим, что $\angle CKA = 2\alpha$. Следовательно,

$$\sin \angle CKA = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot 0,6 \cdot \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,96.$$

Тогда по теореме синусов получаем, что $\frac{KC}{0,6} = \frac{24}{0,96}$, откуда $KC = 15$. Находим:

$$\begin{aligned} AK &= KC \cdot \cos 2\alpha + AC \cdot \cos \alpha = 15 \sqrt{1 - 0,96^2} + 24 \cdot \sqrt{1 - 0,6^2} = 15 \cdot \frac{7}{25} + 24 \cdot \frac{4}{5} = \frac{117}{5}. \\ AK &= KC \cdot \cos 2\alpha + AC \cdot \cos \alpha = \\ &= 15 \sqrt{1 - 0,96^2} + 24 \cdot \sqrt{1 - 0,6^2} = 15 \cdot \frac{7}{25} + 24 \cdot \frac{4}{5} = \frac{117}{5}. \\ &= 15 \sqrt{1 - 0,96^2} + 24 \cdot \sqrt{1 - 0,6^2} = \\ &= 15 \cdot \frac{7}{25} + 24 \cdot \frac{4}{5} = \frac{117}{5}. \end{aligned}$$

Высота CH треугольника $СКА$ равна

$$CK \cdot \sin 2\alpha = \frac{15 \cdot 24}{25} = \frac{72}{5}.$$

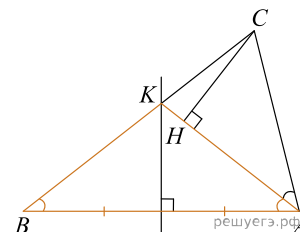
Поэтому

$$S_{СКА} = \frac{1}{2} \cdot \frac{117}{5} \cdot \frac{72}{5} = \frac{117 \cdot 36}{25}.$$

Найдём радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{117 \cdot 36}{25} : \left(\frac{15 + 24 + \frac{117}{5}}{2} \right) = \frac{117 \cdot 36}{25} \cdot \frac{5}{4 \cdot 39} = \frac{27}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{27}{5}$.



№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Подставим u из второго уравнения в первое, получим уравнение

$$(a^2 - 5a + 6)x^2 + (26 - 11a)x + 28 = 0. \quad (*)$$

Система будет иметь единственное решение, если полученное уравнение будет иметь ровно один корень. Найдём соответствующие значения параметра.

Если старший коэффициент уравнения $(*)$ равен нулю, то его степень не больше 1, поэтому оно может иметь единственное решение, не иметь решений или иметь бесконечно много решений. Из уравнения $a^2 - 5a + 6 = 0$ найдём $a = 2$ или $a = 3$. Эти значения приводят к уравнениям $4x + 28 = 0$ и $-7x + 28 = 0$ соответственно, имеющим единственное решение.

При прочих a уравнение $(*)$ является квадратным и имеет единственное решение, тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю:

$$D = (26 - 11a)^2 - 4 \cdot 28(a^2 - 5a + 6) = 9a^2 - 12a + 4 = (3a - 2)^2,$$

откуда $a = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$, 2, 3.

№ 20.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Сумма всех чисел равна $70 \cdot 140 = 9800$. Пусть на белых карточках записано x чисел с суммой S , тогда на синих записано $140 - x$ чисел с суммой $9800 - S$. После изменения сумма чисел на белых карточках станет равной $S + 2x$, на синих — $9800 - S - 5(140 - x)$, поэтому их среднее арифметическое будет равно

$$\frac{S + 2x + 9100 - S + 5x}{140} = \frac{9100 + 7x}{140} = 65 + \frac{x}{20} = 67,5,$$

откуда $x=50$. Итак, есть 50 чисел с суммой S на белых карточках и $140-50=90$ чисел с суммой $9800-S$ на синих карточках.

а) Если все числа на белых карточках четны, то максимальное из них не меньше $50 \cdot 2 = 100$, поэтому все числа на синих карточках не меньше 100. При этом сумма чисел на белых карточках не меньше $2 + 4 + \dots + 100 = 102 \cdot 25 = 2550$, а на синих — не меньше $90 \cdot 100 = 9000$, поэтому общая сумма больше 9800. Получено противоречие.

б) Это условие сводится к уравнению $\frac{9800 - S}{90} = 70,5$, откуда $S = 3455$. Значит, сумма чисел на синих карточках равна 6345, и число хотя бы на одной из них не превосходит $\frac{6345}{90} = 70,5$, поэтому все числа на белых карточках не превосходят 70. Тогда их сумма не превосходит $70 + 69 + \dots + 21 = 91 \cdot 25 < 3455$. Получено противоречие.

в) Пусть $\frac{9800 - S}{90} = t$, тогда среди чисел на синих карточках есть число, не превосходящее t . Значит, сумма чисел на белых карточках не превосходит $t + (t - 1) + \dots + (t - 49) = 50t - 1225$. Сумма же чисел на синих карточках равна $90t$. Общая сумма не превосходит 9800:

$$90t + 50t - 1225 \geq 9800 \Leftrightarrow 140t \geq 11025 \Leftrightarrow t \geq 78,75.$$

Приведем пример, когда это среднее не больше 79. Пусть на всех синих карточках написано 79, тогда $S = 9800 - 90 \cdot 79 = 2690$. При этом $79 + 78 + \dots + 30 = 109 \cdot 25 = 2725$, и если взять для белых карточек набор чисел $79 + 78 + \dots + 32 + 16 + 10$, то все условия будут выполнены. Итак, $t \leq 79$. Допустим, что $t < 79$, тогда среди синих карточек есть карточка с числом, не превосходящим 78, поэтому сумма чисел на белых карточках не превосходит

$$78 + 77 + \dots + 29 = 107 \cdot 25 = 2675,$$

и тогда

$$\frac{9800 - S}{90} \geq \frac{9800 - 2675}{90} = 79\frac{1}{6}.$$

Вновь получено противоречие.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 79.
