

Вариант 267

ID: 13986

№ 1.

Найдите центральный угол AOB , если он на 15° больше вписанного угла ACB , опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.

№ 2.

Даны векторы $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; -6)$ и $\vec{c} = (4; -3)$. Найдите значение выражения $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

№ 3.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 24$, $AD = 10$, $AA_1 = 22$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A , A_1 и C .

№ 4.

В классе 26 учащихся, среди них два друга — Андрей и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

№ 5.

Маша коллекционирует принцесс из Kinder-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Kinder-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

№ 6.

Симметричную монету бросают до тех пор, пока решка и орёл не выпадут хотя бы по одному разу. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сделанных бросков».

№ 7.

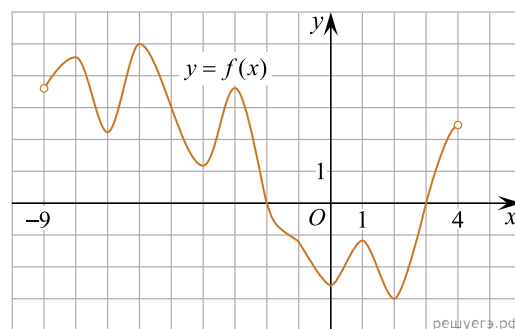
Найдите корень уравнения $\frac{1}{3}x^2 = 16\frac{1}{3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

№ 8.

Найдите значение выражения $\frac{6n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{12}} \cdot n^{\frac{1}{4}}}$ при $n > 0$.

№ 9.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



№ 10.

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 6,4 километров?

№ 11.

Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

№ 12.

На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(4)$. □

№ 13.

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере 5 млн рублей, где 5 — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029	Июль 2030
Долг (в млн руб.)	5	$0,75$	$0,45$	$0,25$	0

Найдите наименьшее значение 5 , при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

№ 14.

а) Решите уравнение $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$.

№ 15.

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC$, $AC = 4\sqrt{2}$. На ребре BB_1 выбрана точка K так, что $BK : B_1K = 2 : 3$. Угол между плоскостями ABC и AKC равен 45° .

а) Докажите, что расстояние между прямыми AB и A_1C_1 равно боковому ребру призмы.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и A_1C_1 , если $KC = 8$.

№ 16.

Решите неравенство $\frac{\log_3^2(3x) - 1}{\log_3(9x)} + \frac{1}{\log_3 x - 4} \leq 6$.

№ 17.

Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей типа 1 и 2010 деталей типа 2. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление двух деталей типа 1 время, за которое он мог бы изготовить одну деталь типа 2. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

№ 18.

В треугольнике FQH угол Q прямой. Точка D лежит на стороне FH . A и B — точки пересечения медиан треугольников FGD и DQH соответственно, L — середина DF , K — середина DH .

а) Докажите, что $KL : FH = 1 : 2$.

б) Найдите площадь треугольника QAB , если $FQ = 8$, $QH = 2$.

№ 19.

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех x .

№ 20.

Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и

- а) пять;
- б) четыре;
- в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	245385	30
2	647124	28
3	316552	572
4	320192	0.48
5	509078	0.192
6	509448	3
7	77371	-7
8	26831	6
9	628235	3
10	27985	1.4
11	99568	27
12	639480	0.0625
13	643163	7

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем исходное уравнение:

□

$$3^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x} \Leftrightarrow 5^{\cos x} = 5^{\sin x} \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{21\pi}{4}; \frac{25\pi}{4}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Прямые AB и A_1C_1 — скрещивающиеся и лежат в параллельных основаниях призмы. Поэтому расстояние между этими прямыми равно расстоянию между основаниями, то есть боковому ребру призмы.

б) Проведём BM — высоту равнобедренного треугольника ABC , являющуюся также медианой. Прямая KM — наклонная, по теореме о трёх перпендикулярах прямые KM и AC взаимно перпендикулярны. Таким образом, угол KMB — линейный угол двугранного угла между плоскостями ABC и AKC и, следовательно, равен 45° , а треугольник KMB — прямоугольный и равнобедренный. Тогда

$$CM = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2},$$

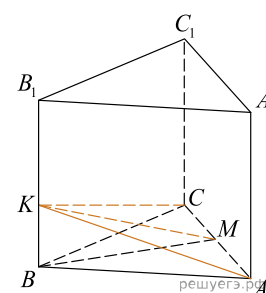
$$KM = \sqrt{KC^2 - CM^2} = 2\sqrt{14}.$$

Далее, поскольку $KB = BM$, находим:

$$KB^2 + BM^2 = KM^2 \Leftrightarrow KB = 2\sqrt{7},$$

$$BB_1 = \frac{5}{2}KB = 5\sqrt{7}.$$

Ответ: б) $5\sqrt{7}$.



№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{\log_3^2(3x) - 1}{\log_3(9x)} + \frac{1}{\log_3 x - 4} &\leq 6 \Leftrightarrow \frac{(\log_3 3 + \log_3 x)^2 - 1}{\log_3 9 + \log_3 x} + \frac{1}{\log_3 x - 4} \leq 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\log_3^2 x + 2\log_3 x}{\log_3 x + 2} + \frac{1}{\log_3 x - 4} &\leq 6. \frac{\log_3^2(3x) - 1}{\log_3(9x)} + \frac{1}{\log_3 x - 4} \leq 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(\log_3 3 + \log_3 x)^2 - 1}{\log_3 9 + \log_3 x} + \frac{1}{\log_3 x - 4} &\leq 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\log_3^2 x + 2\log_3 x}{\log_3 x + 2} + \frac{1}{\log_3 x - 4} &\leq 6. \end{aligned}$$

Пусть $t = \log_3 x$, решим рациональное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{t^2 + 2t}{t + 2} + \frac{1}{t - 4} &\leq 6 \Leftrightarrow \frac{t(t + 2)}{t + 2} + \frac{1}{t - 4} \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t - 4} - 6 \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 4t + 1 - 6t + 24}{t - 4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 10t + 25}{t - 4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(t - 5)^2}{t - 4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} t < 4, \\ t = 5, \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -2, \\ -2 < t < 4, \\ t = 5. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 + 2t}{t + 2} + \frac{1}{t - 4} \leq 6 \Leftrightarrow \frac{t(t + 2)}{t + 2} + \frac{1}{t - 4} \leq 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t - 4} - 6 \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 4t + 1 - 6t + 24}{t - 4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 10t + 25}{t - 4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(t - 5)^2}{t - 4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} t < 4, \\ t = 5, \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -2, \\ -2 < t < 4, \\ t = 5. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 + 2t}{t + 2} + \frac{1}{t - 4} \leq 6 \Leftrightarrow \frac{t(t + 2)}{t + 2} + \frac{1}{t - 4} \leq 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t - 4} - 6 \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 4t + 1 - 6t + 24}{t - 4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 10t + 25}{t - 4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(t - 5)^2}{t - 4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} t < 4, \\ t = 5, \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -2, \\ -2 < t < 4, \\ t = 5. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 + 2t}{t + 2} + \frac{1}{t - 4} \leq 6 \Leftrightarrow \frac{t(t + 2)}{t + 2} + \frac{1}{t - 4} \leq 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t - 4} - 6 \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 4t + 1 - 6t + 24}{t - 4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 10t + 25}{t - 4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(t - 5)^2}{t - 4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} t < 4, \\ t = 5, \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -2, \\ -2 < t < 4, \\ t = 5. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Вернемся к исходной переменной. находим:

$$\begin{cases} \log_3 x < -2, \\ -2 < \log_3 x < 4, \\ \log_3 x = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{9}, \\ \frac{1}{9} < x < 81, \\ x = 243. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{9}; 81\right) \cup \{243\}.$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть в первой бригаде будет x рабочих, тогда во второй бригаде окажется $192 - x$ рабочих. За единицу времени каждый рабочий первой бригады изготавливает две детали типа 1, а каждый рабочий второй бригады — одну деталь типа 2. Тогда время, которое затратит первая бригада на изготовление 1005 деталей типа 1, равно $\frac{1005}{2x}$, а время, которое затратит вторая бригада на изготовление 2010 деталей типа 2, равно $\frac{2010}{192 - x}$. Найдём при каком значении x , время работы обеих бригад окажется одинаковым. Для этого решим уравнение:

$$\frac{1005}{2x} = \frac{2010}{192 - x} \Leftrightarrow 5x = 192 \Leftrightarrow x = 38,4.$$

С увеличением значения x время работы первой бригады будет уменьшаться, а время работы второй — увеличиваться. Значит, минимальное время изготовления заказа двумя бригадами будет, если $x = 38$ или $x = 39$. Вычислим время выполнения заказа для двух этих случаев:

Число рабочих в первой бригаде	Время работы первой бригады, ед. времени	Время работы второй бригады, ед. времени	Время выполнения заказа, ед. времени
38	$\frac{1005}{2 \cdot 38} = 13\frac{17}{76}$	$\frac{2010}{192 - 38} = 13\frac{4}{77}$	$13\frac{17}{76}$
39	$\frac{1005}{2 \cdot 39} = 12\frac{23}{26}$	$\frac{2010}{192 - 39} = 13\frac{7}{51}$	$13\frac{7}{51}$

Заметим, что

$$\frac{17}{76} = \frac{867}{76 \cdot 51} > \frac{532}{76 \cdot 51} = \frac{7}{51},$$

значит, при $x = 39$ время выполнения заказа будет наименьшим. Таким образом, в первой бригаде должно быть 39 рабочих, а во второй — 153 рабочих.

Ответ: 39 и 153.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что

$$KL = KD + DL = \frac{1}{2}DH + \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}(DH + DF) = \frac{1}{2}HF,$$

откуда и следует, что $KL : FH = 1 : 2$.

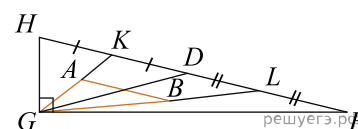
б) Отрезки GK и GL являются медианами треугольников GHD и GDF соответственно, откуда $\frac{GA}{GK} = \frac{GB}{GL} = \frac{2}{3}$. Далее,

$$\frac{S_{GAB}}{S_{GKL}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot GA \cdot GB \cdot \sin \angle AGB}{\frac{1}{2} \cdot GK \cdot GL \cdot \sin \angle KGL} = \frac{4}{9}.$$

Площади треугольников GKL и GHF относятся как $\frac{1}{2}$, потому что $KL = \frac{1}{2}HF$, следовательно,

$$S_{GAB} = \frac{2}{9}S_{GHF} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = \frac{16}{9}.$$

Ответ: б) $\frac{16}{9}$.



№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены искомые значения, отличающиеся от верных только конечным числом значений	3
С помощью верного рассуждения получены все «граничные» значения параметра	2
Верно получено хотя бы одно «граничное» значение параметра	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Поскольку $x^2 + x + 1 > 0$ для всех значений x , получаем:

$$|x^2 + ax + 1| < 3x^2 + 3x + 3.$$

Решим полученное неравенство:

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 < 3x^2 + 3x + 3, \\ x^2 + ax + 1 > -3x^2 - 3x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (3-a)x + 2 > 0, \\ 4x^2 + (3+a)x + 4 > 0. \end{cases}$$

Для того чтобы любое значение x удовлетворяло этой системе неравенств, нужно, чтобы каждое из неравенств системы было верным для любого значения x , то есть дискриминанты левых частей этих неравенств должны быть отрицательными:

$$\begin{cases} (3-a)^2 - 16 < 0, \\ (3+a)^2 - 64 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-3| < 4, \\ |3+a| < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 7, \\ -11 < a < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < a < 5.$$

Ответ: $-1 < a < 5$.

№ 20.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно выполнены: а), б), в)	4
Верно выполнены б) и один пункт из двух: а), в)	3
Верно выполнено б) или а) и в)	2
Верно выполнен один пункт из двух: а), в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Заметим, что $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$.

а) Пусть это a, aq, aq^2, aq^3, aq^4 . Тогда их произведение равно $a^5 q^{10}$, и $aq^2 = \sqrt[5]{792} \notin \mathbb{Z}$.

б) Пусть это a, aq, aq^2, aq^3, b ; q не обязано быть целым, но должно быть рациональным.

Пусть $q = \frac{x}{y}$ — несократимая дробь, тогда имеем $\frac{a^4 x^6 b}{y^6} = 792$. Значит, 792 кратно x^6 (оно не может сокращаться со знаменателем), откуда $x = 1$. Значит, a кратно y^3 (иначе aq^3 — нецелое), a^4 кратно y^{12} , 792 кратно y^6 (оно не сократилось), откуда $y = 1$ и прогрессия постоянна.

в) Да, например, 1, 2, 4, 9, 11.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.