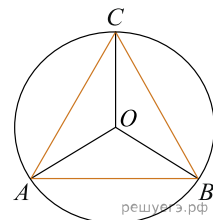


Вариант 27

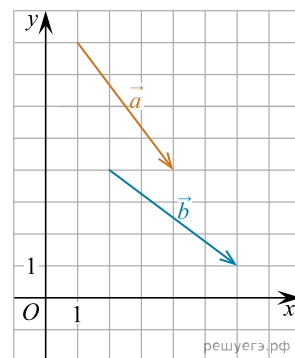
№ 1.

Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен $\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



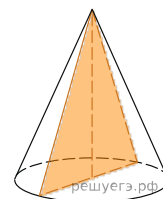
№ 2.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите косинус угла между ними.



№ 3.

Высота конуса равна 8, а длина образующей — 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

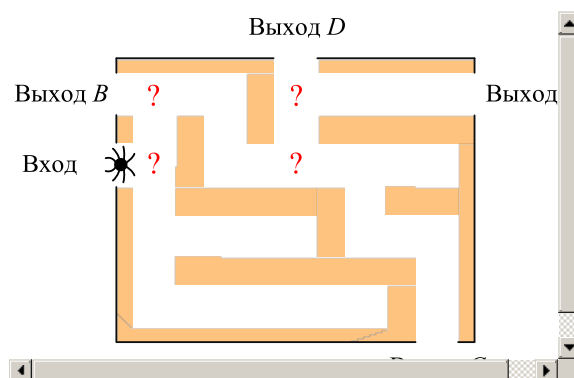


№ 4.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

№ 5.

На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу D .



№ 6.

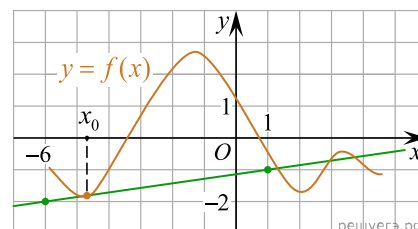
Найдите корень уравнения $\sqrt{-32-x} = 2$.

№ 7.

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

№ 8.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Найдите значение производной функции $g(x) = 9f(x) - \frac{2}{7}x + 7$ в точке x_0 .



№ 9.

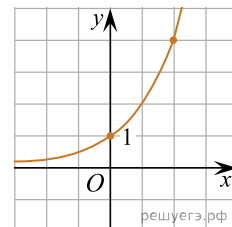
По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом— его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)

№ 10.

Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 32$.



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = (9 - x)e^{x+9}$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin 2x$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

№ 14.

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$ с центром O . Точка N — середина ребра SC , точка L — середина ребра SA .

- а) Докажите, что плоскость BNL делит ребро SD в отношении 1 : 2, считая от вершины S .
- б) Найдите угол между плоскостями BNL и ABC , если пирамида правильная, $SA = 8$, а тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды равен $\frac{\sqrt{7}}{5}$.

№ 15.

Решите неравенство $(3x + 7) \cdot \log_{2x+5}(x^2 + 4x + 5) \geq 0$.

№ 16.

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 150 тыс. руб.;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году будет равен 185,9 тыс. руб. Какую сумму (в тыс. руб.) планируется взять в кредит?

№ 17.

В треугольнике ABC угол ABC тупой, H — точка пересечения продолжений высот, угол AHC равен 60° .

а) Докажите, что угол ABC равен 120° .

б) Найдите BH , если $AB = 7$ и $BC = 8$.

№ 18.

Даны два уравнения

$$2ax^2 + (a+2)x + 1 = 0$$

и

$$\frac{x+1}{4-a^2} = \frac{1}{\sqrt{x-2}+2}.$$

Найдите все значения параметра $a \neq \pm 2$, при которых число различных корней первого уравнения на одно больше числа различных корней второго уравнения.

№ 19.

На доске написано 30 натуральных чисел. Какие-то из них красные, а какие-то зелёные. Красные числа кратны 8, а зелёные числа кратны 3. Все красные числа отличаются друг от друга, как и все зелёные. Но между красными и зелёными могут быть одинаковые.

а) Может ли сумма всех чисел, записанных на доске, быть меньше 1395, если на доске написаны только кратные 3 числа?

б) Может ли сумма чисел быть 1066, если только одно число красное?

в) Найдите наименьшее количество красных чисел, которое может быть при сумме 1066.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27893	3
2	649917	0,96
3	324455	48
4	282854	0,5
5	320212	0,0625
6	510839	-36
7	26776	5
8	525699	1
9	27972	4
10	26587	11
11	660992	5
12	26711	8

№ 13.

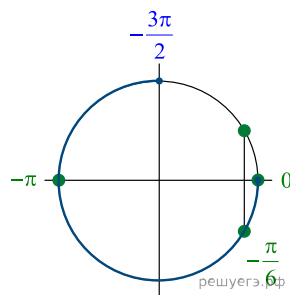
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), или получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos x \cos \frac{7\pi}{6} + 2\sqrt{3} \sin x \sin \frac{7\pi}{6} = 3 \cos x &\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 3 \cos x \Leftrightarrow \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos x \cos \frac{7\pi}{6} + 2\sqrt{3} \sin x \sin \frac{7\pi}{6} = 3 \cos x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 3 \cos x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0. \end{aligned}$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.
Получим числа $-\pi$, $-\frac{\pi}{6}$, 0 .



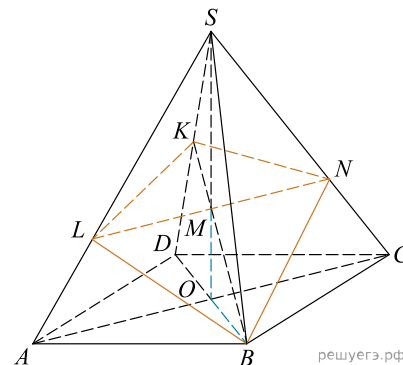
Ответ: а) πn , $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi$; $-\frac{\pi}{6}$; 0 .

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) или имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) или при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, или обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Проведем LN — среднюю линию треугольника SAC . Она является линией пересечения плоскости SAC и сечения BLN . Пусть O — точка пересечения диагоналей основания, пусть LN пересекает SO в точке M (оба отрезка лежат в плоскости SAC), и пусть BM пересекает SD в точке K (оба отрезка лежат в плоскости SBD). Тогда отрезок BM лежит в плоскости BLN и, следовательно, K — точка пересечения плоскости BLN с ребром SD . Заметим, что O — середина диагонали BD , а M — середина отрезка SO . Запишем теорему Менелая для треугольника SOD и прямой BK :

$$\frac{SK}{KD} \cdot \frac{DB}{BO} \cdot \frac{OM}{MS} = 1 \Leftrightarrow \frac{SK}{KD} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{SK}{KD} = \frac{1}{2}.$$



б) Пирамида правильная, поэтому SO — ее высота. Угол между боковым ребром и основанием равен углу SBO , $\operatorname{tg} \angle SBO = \frac{\sqrt{7}}{5}$. Пусть $OB = 5x$, тогда $SO = \sqrt{7}x$. Запишем теорему Пифагора для треугольника SBO :

$$SO^2 + OB^2 = SB^2 \Leftrightarrow 7x^2 + 25x^2 = 64 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Тогда $OB = 5\sqrt{2}$, $SO = \sqrt{14}$, $OM = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Прямая OB — проекция прямой MB на плоскость $ABCD$. Прямые OB и AC перпендикулярны, прямые LN и AC параллельны, поэтому прямые MB и LN перпендикулярны. Обе прямые OB и MB перпендикулярны линии пересечения плоскостей BLN и ABC . Следовательно, угол MBO — линейный угол двугранного угла между плоскостями BLN и ABC и равен искомому. Найдем

$$\operatorname{tg} \angle MBO = \frac{MO}{OB} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{2}}{2 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{10},$$

откуда искомый угол равен $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{10}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{10}$.

Приведем решение пункта б) Татьяны Шевелевой.

Прямая OB — проекция прямой MB на плоскость $ABCD$. Прямые OB и AC перпендикулярны, прямые LN и AC параллельны, поэтому прямые MB и LN перпендикулярны. Обе прямые OB и MB перпендикулярны линии пересечения плоскостей BLN и ABC . Следовательно, угол MBO — линейный угол двугранного угла между плоскостями BLN и ABC и равен искомому.

По доказанному в пункте а) $MO = \frac{1}{2}SO$, следовательно,

$$\operatorname{tg} \angle MBO = \frac{MO}{OB} = \frac{\frac{1}{2}SO}{OB} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \angle SBO = \frac{\sqrt{7}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{7}}{10},$$

откуда искомый угол равен $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{10}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Найдём ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} 2x+5 > 0, \\ 2x+5 \neq 1, \\ x^2+4x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2,5, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Применим теорему о знаке логарифма: знак $\log_a b$ на ОДЗ совпадает со знаком произведения $(a-1)(b-1)$. Имеем:

$$\begin{aligned} (3x+7)\log_{2x+5}(x^2+4x+5) &\geq 0 \Leftrightarrow_{\text{ОДЗ}} (3x+7)(2x+4)(x^2+4x+4) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(3x+7)(x+2)^3 &\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{7}{3}, \\ x \geq -2. \end{cases} (3x+7)\log_{2x+5}(x^2+4x+5) \geq 0 \Leftrightarrow_{\text{ОДЗ}} \\ \Leftrightarrow_{\text{ОДЗ}} (3x+7)(2x+4)(x^2+4x+4) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2(3x+7)(x+2)^3 &\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{7}{3}, \\ x \geq -2. \end{cases} \end{aligned}$$

С учётом ОДЗ получаем: $-\frac{5}{2} < x \leq -\frac{7}{3}$ или $x > -2$.

Ответ: $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{3}\right] \cup (-2; +\infty)$.

Приведём другое решение.

Заметим, что аргумент логарифма не меньше 1: $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 \geq 1$ при любых значениях x . Значит, логарифм положителен, если его основание больше 1, т.е. при $x > -2$, и отрицателен, если его основание меньше 1, если $-2,5 < x < -2$.

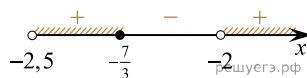
При $x > -2$ выражение $3x+7$ положительно, а при $-2,5 < x < -2$ исходное неравенство равносильно неравенству $3x+7 \leq 0$, откуда $x \leq -\frac{7}{3}$.

Таким образом, решение исходного неравенства:

$$-\frac{5}{2} < x \leq -\frac{7}{3} \text{ или } x > -2.$$

Приведём решение методом интервалов.

Найдём ОДЗ неравенства, значения переменной, при котором множители обращаются в 0, и значения переменной, при котором основание логарифма равно 1. Нанесем найденные значения на числовую ось и расставим знаки на промежутках между ними с учетом ОДЗ.



Это и даст ответ.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть сумма кредита равна S тыс.руб. В январе 2027 года долг (в тыс.руб.) будет равен $1,1S$, а в июле будет равен $1,1S - 150$. В январе 2028 года долг будет равен $1,21S - 165$, а в июле будет равен $1,21S - 315$. В январе 2029 года долг будет равен $1,331S - 346,5$. По условию к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью, значит,

платёж в 2029 году должен быть равен $1,331S - 346,5$ тыс. руб. Получаем

$$1,331S - 346,5 = 185,9 \Leftrightarrow 1,331S = 532,4,$$

откуда находим $S = 400$. Планируется взять кредит в размере 400 тыс. руб.

Ответ: 400 тыс. руб.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

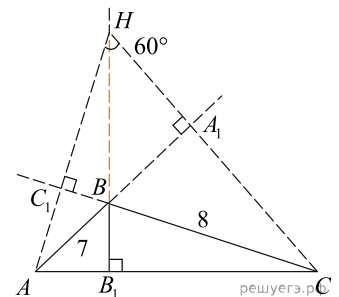
Решение. а) Рассмотрим треугольник AHC . В нем AA_1 и CC_1 — высоты. Тупой угол между высотами дополняет угол между сторонами, к которым они проведены, до 180° . Поэтому $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{AHC} = 120^\circ$.

б) Рассмотрим треугольник AHC , в нем $BH = AC \operatorname{ctg} \widehat{AHC} = \frac{AC}{\sqrt{3}}$. Сторону AC найдём по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 113 + 56 = 169. \\ AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = \\ &= 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 113 + 56 = 169. \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } AC = 13, BH = \frac{13}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: б) $\frac{13}{\sqrt{3}}$.



Докажем утверждение, использованное при решении пункта а).

В четырехугольнике HC_1BA_1 сумма прямых углов HC_1B и HA_1B равна 180° , поэтому сумма двух других углов C_1HA_1 и C_1BA_1 также равна 180° . Тогда $\angle C_1BA_1 = 180^\circ - \angle C_1HA_1$. Углы C_1BA_1 и ABC равны как вертикальные, поэтому $\angle ABC + \angle C_1HA_1 = 180^\circ$. Таким образом, тупой угол между высотами дополняет угол между сторонами, к которым они проведены, до 180° .

Сформулируем теорему, которую мы применили для решения пункта б).

Расстояние от вершины треугольника до точки пересечения его высот равно произведению стороны, противолежащей этой вершине, на котангенс угла при этой вершине. Действительно, пусть высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H . Стороны прямоугольных треугольников ACC_1 и BHC_1 взаимно перпендикулярны, а потому их острые углы ACC_1 и BHC_1 равны. Следовательно, эти треугольники подобны. Тогда $\frac{HB}{AC} = \frac{HC_1}{CC_1} = \operatorname{ctg} \widehat{C_1HC} = \operatorname{ctg} \widehat{AHC}$, откуда $HB = AC \operatorname{ctg} \widehat{AHC}$. Для остроугольного треугольника доказательство аналогично. Для прямоугольного треугольника доказательство напрямую следует из определения котангенса.

Рекомендуем сравнить эту задачу с заданием [505425](#) из экзаменационного варианта ЕГЭ 2014 года.

Приведем другое решение пункта б):

Рассмотрим треугольник C_1CH , заметим, что угол C_1CH равен 30° . Поэтому в прямоугольном треугольнике CBA_1 катет BA_1 вдвое меньше гипотенузы: $BA_1=4$. Значит, $AA_1 = 11$. Из треугольника AA_1H находим $HA_1 = AA_1 \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{11}{\sqrt{3}}$. Теперь по теореме Пифагора вычисляем:

$$BH = \sqrt{BA_1^2 + HA_1^2} = \sqrt{16 + \frac{121}{3}} = \frac{13}{\sqrt{3}}.$$

Приведем ещё одно решение пункта б):

Заметим, что в треугольнике AHC точка B — ортоцентр. В силу свойства ортоцентра $AB \cdot BA_1 = HB \cdot BB_1$, откуда получаем: $HB = \frac{AB \cdot BA_1}{BB_1}$ (это же следует из подобия треугольников ABB_1 и BCA_1).

Из прямоугольного треугольника CBA_1 находим катет BA_1 , противолежащий углу в 30° : $BA_1=4$. Из треугольника ABC находим высоту:

$$BB_1 = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ}{13} = \frac{28\sqrt{3}}{13}.$$

Тогда

$$HB = \frac{7 \cdot 4}{\frac{28\sqrt{3}}{13}} = \frac{13}{\sqrt{3}}.$$

Приведем решение пункта б) Николая Тихонова.

В треугольнике ABC найдем сторону AC по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 113 + 56 = 169, \\ AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = \\ &= 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 113 + 56 = 169, \end{aligned}$$

откуда $AC = 13$.

Пусть $BA_1 = x$, тогда в прямоугольном треугольнике BA_1C имеем: $CA_1^2 = BC^2 - BA_1^2 = 64 - x^2$.

В прямоугольном треугольнике A_1AC имеем: $AC^2 = (AB + BA_1)^2 + A_1C^2$, тогда

$$13^2 = (7 + x)^2 + (64 - x^2) \Rightarrow 169 = 49 + 14x + x^2 + 64 - x^2,$$

отсюда $x = 4$, тогда $BA_1 = 4$ и $A_1C = 4\sqrt{3}$.

Рассмотрим треугольник ABC , его площадь равна

$$S_{ABC} = 0,5 \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = B \cdot 0,5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

и

$$S_{ABC} = 0,5 \cdot AC \cdot BB_1 = 0,5 \cdot 13 \cdot BB_1 = 14\sqrt{3},$$

отсюда

$$BB_1 = \frac{28\sqrt{3}}{13}, \quad \sin \angle BAC = \frac{\left(\frac{28\sqrt{3}}{13}\right)}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{13}, \quad \sin \angle BAC = \cos \angle ABB_1.$$

Угол ABB_1 равен углу HBA_1 как вертикальные, следовательно,

$$\cos ABB_1 = \cos HBA_1 = \frac{4\sqrt{3}}{13}$$

и

$$HB = \frac{BA_1}{\cos HBA_1} = \frac{4 \cdot 13}{4\sqrt{3}} = \frac{13}{\sqrt{3}}.$$

Примечание.

Полезно будет сравнить эту задачу с заданием [519425](#) из экзаменационного варианта ЕГЭ 2014 года, заданием [519475](#) из ЕГЭ-2018, заданием [526342](#) из ЕГЭ-2019, заданием [656585](#) из ЕГЭ-2024.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Рассмотрим первое уравнение. При $a = 0$ оно принимает вид $2x + 1 = 0$ и имеет один корень. При прочиха это квадратное уравнение, и количество его корней зависит от знака его дискриминанта:

$$D = (a + 2)^2 - 4 \cdot 2a \cdot 1 = a^2 + 4a + 4 - 8a = (a - 2)^2,$$

поэтому при $a = 2$ существует одно решение, а при прочих $a \neq 0$ — два. Таким образом, осталось выяснить, будет ли второе уравнение иметь 0 корней при $a = 0$ или 1 корень при других a .

При $a = 0$ второе уравнение примет вид $\frac{x + 1}{4} = \frac{\sqrt{x - 2}}{2}$. Заметим, что $x \geq 2$. Но тогда левая часть не меньше $\frac{3}{4}$, а правая не больше $\frac{1}{2}$ и уравнение не имеет корней. Таким образом, $a = 0$ подходит.

Изучим прочие a : если $4 - a^2 < 0$, то при всех допустимых x левая часть отрицательна, а правая положительна, и уравнение корней не имеет.

Если же $4 - a^2 > 0$, как и при $a = 0$ левая часть не меньше $\frac{3}{4}$, а правая не больше $\frac{1}{2}$. поэтому корней это уравнение не имеет.

Ответ: $a = 0$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
--	-------

Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть на доске записано 30 зеленых чисел, тогда последнее число можно найти по формуле:

$$a_{30} = a_1 + d(n - 1) = 3 + 3(30 - 1) = 90$$

Тогда сумма всех зеленых чисел составит 1395.

Теперь заменим зеленое число 27 на красное число 24, тогда сумма чисел написанных на доске будет равна

$$1395 - 27 + 24 = 1392 < 1395.$$

При этом на доске написаны только кратные 3 числа.

б) Ясно, что сумма 30 зелёных чисел, приведённая в пункте а), минимальна, поскольку минимально значение $a_1 = 3$ (при больших значениях a_1 сумма будет возрастать). Чтобы получить минимально возможную сумму 29 зелёных чисел, вычтем из минимально возможной суммы 30 зелёных чисел самое большое — последнее число, равное 90:

$$1395 - 90 = 1305.$$

Теперь, чтобы получить минимально возможную сумму 29 зелёных и 1 красного чисел, прибавим к минимально возможной сумме 29 зелёных чисел минимально возможное красное число, то есть число 8:

$$1305 + 8 = 1313.$$

Таким образом, получаем, что минимально возможная сумма 29 зелёных и 1 красного чисел $1313 > 1066$, а это означает, что, если на доске написано только 1 красное число, то сумма чисел не может быть равна 1066.

в) Пусть n - число красных чисел, тогда число зелёных составит $(30-n)$. Суммы красных $S_{кр}$ и зелёных $S_{зел}$ чисел, по формуле суммы арифметической прогрессии будут составлять:

$$S_{кр} = \frac{8 + 8 + 8(n-1)}{2} \cdot n = \frac{8 + 8n}{2} \cdot n$$

и

$$S_{зел} = \frac{3 + 3 + 3(30-n-1)}{2} \cdot (30-n) = \frac{3 + 3(30-n)}{2} \cdot (30-n).$$

Сумма всех чисел S_o должна быть по крайней мере меньше или равна 1066, тогда

$$S_o = S_{кр} + S_{зел} = \frac{8 + 8n}{2} \cdot n + \frac{3 + 3(30-n)}{2} \cdot (30-n) \leq 1066 \Leftrightarrow 11n^2 - 175n + 658 \leq 0 \Leftrightarrow 7 \leq n \leq 9$$

$$S_o = S_{кр} + S_{зел} = \frac{8 + 8n}{2} \cdot n + \frac{3 + 3(30-n)}{2} \cdot (30-n) \leq 1066 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11n^2 - 175n + 658 \leq 0 \Leftrightarrow 7 \leq n \leq 9$$

Значит, необходимо заменить не менее 7 зеленых чисел. В ряду из 30 зелёных чисел заменим зеленые числа на красные: 90 на 8, 87 на 16, 84, на 24, 81 на 32, 78 на 40, 75 на 48. Таким образом, сумма записанных на доске чисел составит:

$$S_o = S_{6кр} + S_{24зел} = \frac{3 + 72}{2} \cdot 24 + \frac{8 + 48}{2} \cdot 6 = 900 + 168 = 1068.$$

Теперь заменим еще 66 на 64, получим:

$$S_o = (S_{6\text{кр}} + 64) + (S_{24\text{зел}} - 66) = 168 + 64 + 900 - 66 = 1066.$$

Таким образом, наименьшее количество красных чисел равно 7.

Ответ: а) да; б) нет; в) 7.
