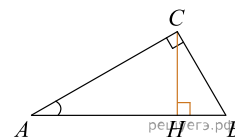


Вариант 275

ID: 14032

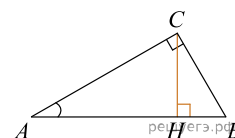
№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 5$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите высоту CH .



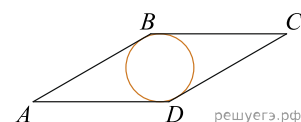
№ 2.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 4, $BC = 8$. Найдите $\cos A$.



№ 3.

Сторона ромба равна 1, острый угол равен 30° . Найдите радиус вписанной окружности этого ромба.



№ 4.

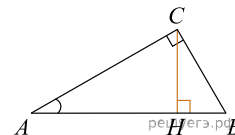
В ромбе $ABCD$ угол ACD равен 43° . Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.

№ 5.

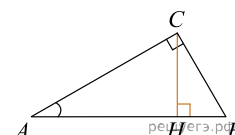
В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 5$, $\cos \angle BAC = \frac{7}{25}$. Найдите высоту AH .

№ 6.

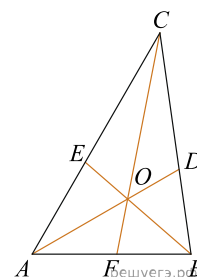
В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 3$, $\cos A = \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите AH .

**№ 7.**

В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 8, $BH = 4$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

**№ 8.**

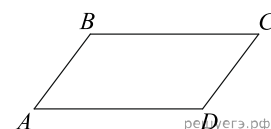
В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 82° . AD , BE и CF — биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOF . Ответ дайте в градусах.

**№ 9.**

Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

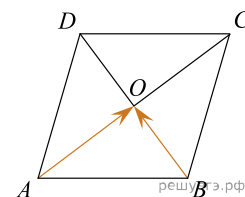
№ 10.

Один угол параллелограмма больше другого на 70° . Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.



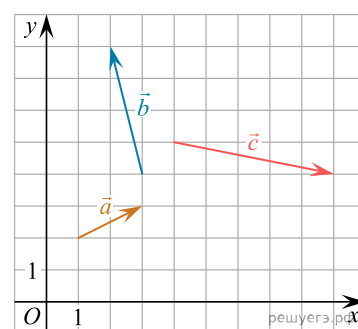
№ 11.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AO} + \vec{BO}$.



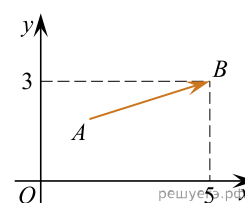
№ 12.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значение выражения $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



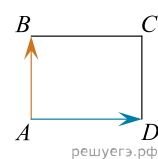
№ 13.

Вектор $\vec{AB}$ с концом в точке $B(5; 3)$ имеет координаты $(3; 1)$. Найдите ординату точки A .



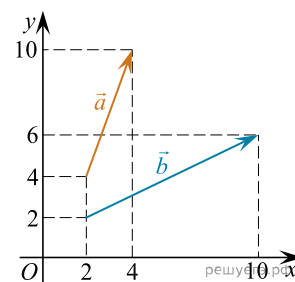
№ 14.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину разности векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.



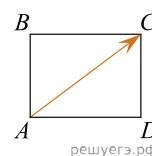
№ 15.

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



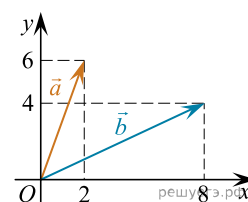
№ 16.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину вектора $\vec{AC}$.



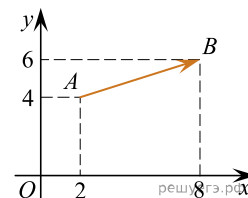
№ 17.

Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 18.

Найдите сумму координат вектора $\vec{AB}$.



№ 19.

Даны векторы $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; -6)$ и $\vec{c} = (4; -3)$. Найдите значение выражения $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

№ 20.

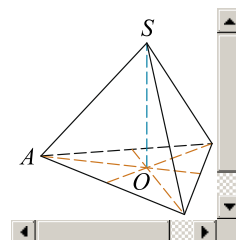
Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $2\sqrt{3}$ и 5, а угол между ними равен 150° . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

№ 21.

Шар вписан в конус. Радиус основания конуса равен 3, а образующая равна 6. Найдите площадь поверхности шара, делённую на π .

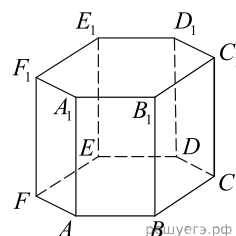
№ 22.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 4; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS .



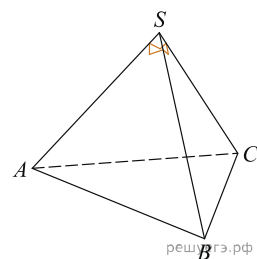
№ 23.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками B и E .



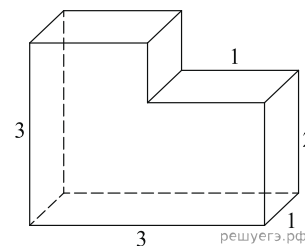
№ 24.

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



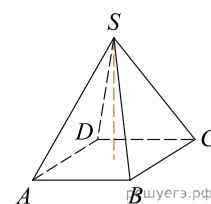
№ 25.

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



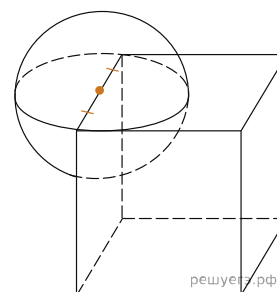
№ 26.

Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.



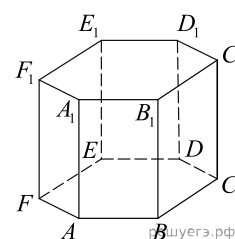
№ 27.

Середина ребра куба со стороной 1,9 является центром шара радиуса 0,95. Найдите площадь S части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите S/π .



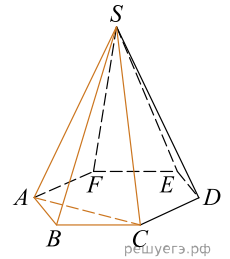
№ 28.

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.



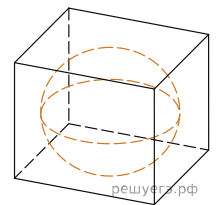
№ 29.

Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.



№ 30.

Куб описан около сферы радиуса 6. Найдите объем куба.



№ 31.

Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

№ 32.

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 190 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

№ 33.

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

№ 34.

За круглый стол на 5 стульев в случайном порядке рассаживаются 3 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки не будут сидеть рядом.

№ 35.

В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 10 черных, 2 желтых и 8 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней придет зеленое такси.

№ 36.

За круглый стол на 201 стул в случайном порядке рассаживаются 199 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между девочками будет сидеть один мальчик.

№ 37.

Игральный кубик подбросили два раза. Известно, что три очка не выпало ни разу. Какова вероятность, что выпало два чётных числа?

№ 38.

В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

№ 39.

В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос о Великой Отечественной войне. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос о Великой Отечественной войне.

№ 40.

Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1.

№ 41.

Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Мотор» по очереди играет с командами «Статор», «Стартер» и «Ротор». Найдите вероятность того, что «Мотор» будет начинать с мячом только вторую игру.

№ 42.

Вероятность того, что на тестировании по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

№ 43.

Платежный терминал в течение рабочего дня может выйти из строя. Вероятность этого события 0,07. В торговом центре независимо друг от друга работают два таких платёжных терминала. Найдите вероятность того, что хотя бы один из них в течение рабочего дня будет исправен.

№ 44.

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

№ 45.

Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

№ 46.

Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p=0,8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1-p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1 ?

№ 47.

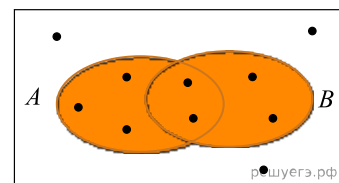
Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов— математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов— математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

№ 48.

На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность события B при условии A .

**№ 49.**

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

№ 50.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 5 и 6 встречаются по три раза. В остальных кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 5 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

№ 51.

При выборочном обследовании клиентов сети автозаправочных станций «Огонек», 24 из 36 случайных респондентов ответили «Да» на вопрос, есть ли у них бонусная карта сети. Найдите интервальную оценку доли клиентов, имеющих бонусную карту, пользуясь правилом «частота плюс-минус 2 стандартных отклонения». В ответ запишите верхнюю границу доверительного интервала. *Ответ округлите до десятых.*

№ 52.

Найдите дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $E(X) = 1,2$.

№ 53.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,8. Вероятность события «К вечеру в втором автомате закончится кофе» равна 0,3. Считая эти события независимыми, найдите математическое ожидание числа автоматов, в которых к вечеру останется кофе.

№ 54.

Сколько раз нужно в среднем бросить кубик, чтобы на нём выпала шестёрка?

№ 55.

Баскетболист попадает в корзину с вероятностью 0,6. За игру он сделал 47 бросков. Чему равно математическое ожидание числа попаданий?

№ 56.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,2. Вероятность события «К вечеру в втором автомате закончится кофе» равна 0,6. Считая эти события независимыми, найдите математическое ожидание числа автоматов, в которых к вечеру закончится кофе.

№ 57.

В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	10	50	100	5000
Количество билетов	990	6	3	1

№ 58.

Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z = 3X + 2Y$, если известно, что $D(X) = 5$, $D(Y) = 6$.

№ 59.

При изготовлении подшипников с номинальным внешним диаметром 32 мм стандартное отклонение внешнего диаметра равно 0,004 мм. При помощи неравенства Чебышёва найдите верхнюю оценку вероятности события «диаметр случайно выбранного подшипника отличается от среднего значения более чем на 0,008 мм».

№ 60.

Монету подбрасывают до тех пор, пока орёл не выпадет два раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков.

№ 61.

Найдите корень уравнения $(x-1)^3 = -8$.

№ 62.

Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x+3} = 5$.

№ 63.

Найдите корень уравнения: $\frac{1}{9x-7} = \frac{1}{2}$.

№ 64.

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13} = 3$.

№ 65.

Найдите корень уравнения $\sqrt{-32-x} = 2$.

№ 66.

Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

№ 67.

Решите уравнение $\log_{x-5} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

№ 68.

Найдите корень уравнения $\log_5(5-x) = 2\log_5 3$.

№ 69.

Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{15-4x}} = 0,2$.

№ 70.

Найдите решение уравнения: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-8} = 2^x$.

№ 71.

Найдите значение выражения: $4\sqrt{2}\cos^2\frac{15\pi}{8} - 2\sqrt{2}$.

№ 72.

Найдите значение выражения $4^8 \cdot 11^{10} : 44^8$.

№ 73.

Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt[3]{7a^2})^6}{a^4}$ при $a \neq 0$.

№ 74.

Найдите $\log_a \frac{a}{b^3}$, если $\log_a b = 5$.

№ 75.

Найдите значение выражения $-18\sqrt{2}\sin(-135^\circ)$.

№ 76.

Найдите значение выражения $\log_3 1,8 + \log_3 5$.

№ 77.

Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

№ 78.

Найдите значение выражения $\frac{(3x+2y)^2 - 9x^2 - 4y^2}{6xy}$.

№ 79.

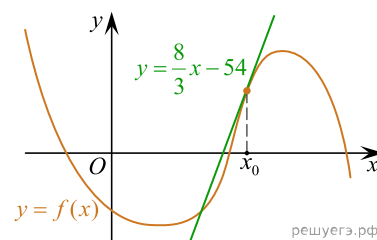
Найдите значение выражения $\left(\frac{3}{4} + 2\frac{3}{8}\right) \cdot 25,6$.

№ 80.

Найдите $p(x-7) + p(13-x)$, если $p(x) = 2x + 1$.

№ 81.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение функции $g(x) = (f'(x) - 0,5) \cdot 6$ в точке x_0 .

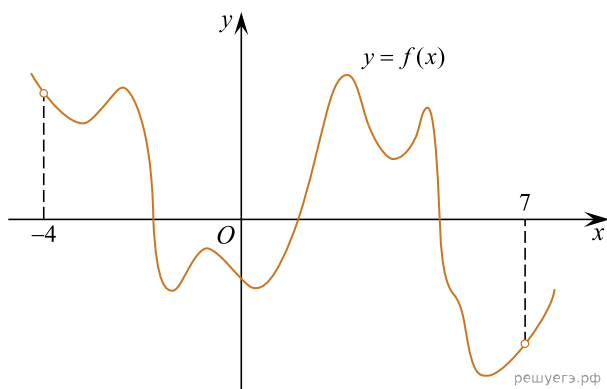


№ 82.

Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $y = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

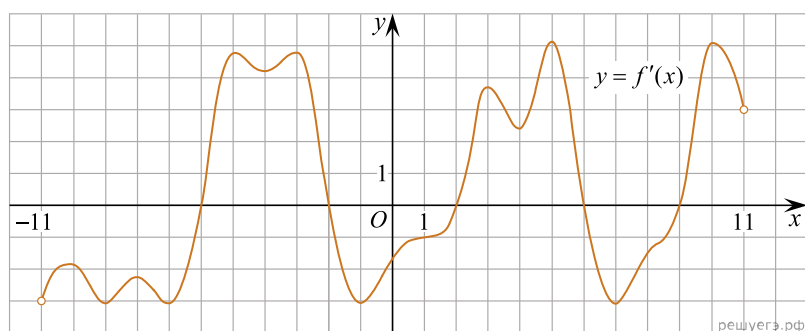
№ 83.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих интервалу $(-4; 7)$.



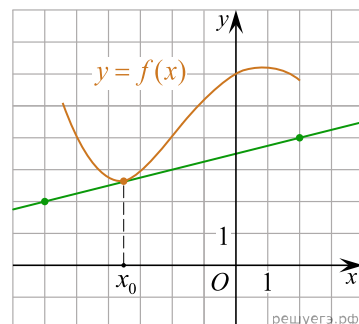
№ 84.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11; 11)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-10; 10]$.



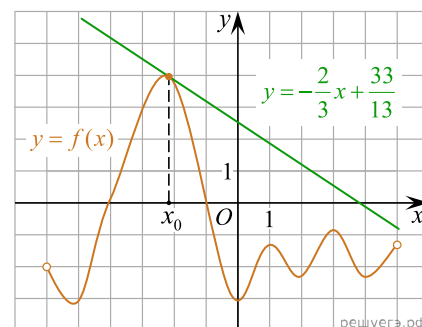
№ 85.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



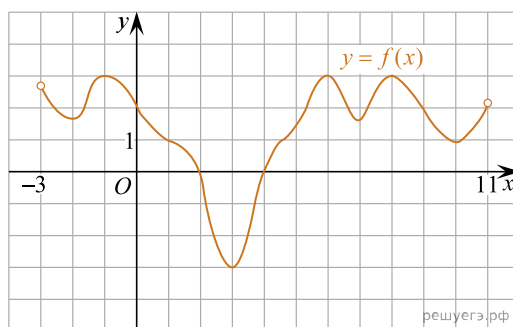
№ 86.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = 12f(x) + \frac{6}{13}$ в точке x_0 .



№ 87.

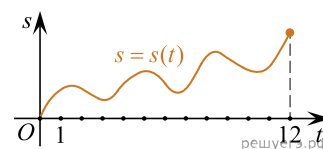
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 11)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[4; 9]$.



№ 88.

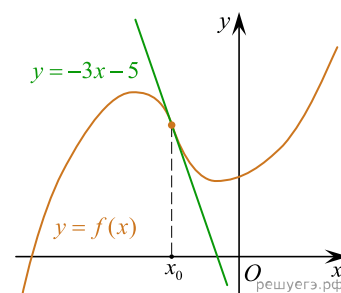
Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s .

Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



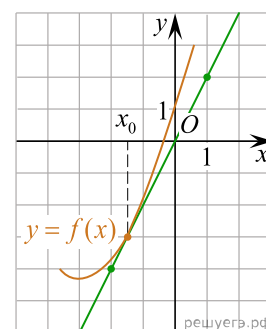
№ 89.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = -7f(x) + 21x + \frac{1}{441}$ в точке x_0 .



№ 90.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



№ 91.

Электрический прибор после включения в сеть нагревается и через некоторое время автоматически выключается и начинает остывать. Температура прибора в градусах Цельсия вычисляется по формуле: $T = -t^2 + 14t + T_0$, где t — время в минутах, прошедшее после включения прибора в сеть, $T_0 = 25^\circ\text{C}$ — начальная температура прибора. На протяжении какого времени в минутах температура прибора будет не менее 70°C ?

№ 92.

Очень легкий заряженный металлический шарик зарядом $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 5$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_L = qvB \sin \alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвется от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила F_L была не менее чем $2 \cdot 10^{-8}$ Н? Ответ дайте в градусах.

№ 93.

Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{н}} = 20^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 60^\circ\text{C}$ до температуры T ($^\circ\text{C}$), причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{н}}}{T - T_{\text{н}}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м.

№ 94.

Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 3$ моль воздуха объемом $V_1 = 8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 5,75$ — постоянная, а $T = 300\text{К}$ — температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

№ 95.

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км) — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 4 километра? Ответ выразите в километрах.

№ 96.

Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 15%, если температура холодильника $T_2 = 340$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

№ 97.

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

№ 98.

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{16} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $9,12 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

№ 99.

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 256л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

№ 100.

Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где $p(\text{Па})$ — давление газа, V — объём газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в 25раз объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 5 раз?

№ 101.

Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

№ 102.

Смешали некоторое количество 15%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 19%-го раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

№ 103.

При двух одновременно работающих принтерах расход бумаги составляет 1 пачку за 12 минут. Определите, за сколько минут израсходует пачку бумаги первый принтер, если известно, что он сделает это на 10 минут быстрее, чем второй.

№ 104.

Васе надо решить 434 задачи. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вася решил 5 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 14 дней.

№ 105.

Баржа в 10:00 вышла из пункта A в пункт B , расположенный в 15 км от A . Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

№ 106.

Смешали равные массы двух растворов кислоты, концентрации которых относятся как 2:5, и получили новый раствор, содержащий 49% кислоты. Найдите разность концентраций второго и первого растворов. Ответ дайте в процентах.

№ 107.

Два человека отправляются из одного дома на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,4 км от дома. Один идёт со скоростью 2,5 км/ч, а другой — со скоростью 3 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от дома произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

№ 108.

После смешения двух растворов, первый из которых содержал 150г кислоты, а второй содержал 60г такой же кислоты, получили 400г нового раствора. Найдите концентрацию первого раствора (в процентах), если известно, что она на 20 больше концентрации второго (в процентах).

№ 109.

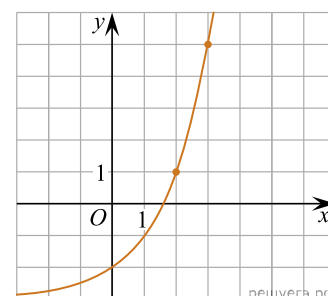
Часы со стрелками показывают 8 часов ровно. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

№ 110.

Расстояние между городами A и B равно 470км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через 3 часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 60км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350 км от города A . Ответ дайте в км/ч.

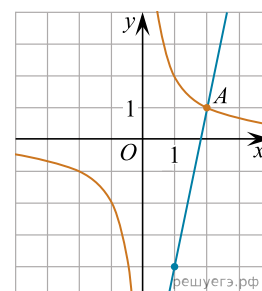
№ 111.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(6)$.



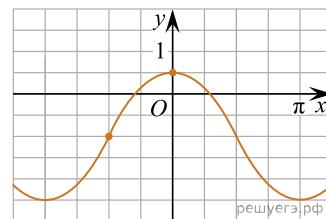
№ 112.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



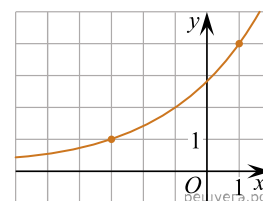
№ 113.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите b .



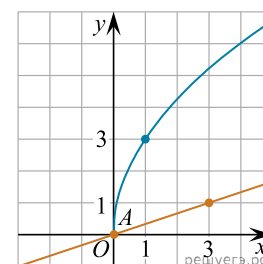
№ 114.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 16$.



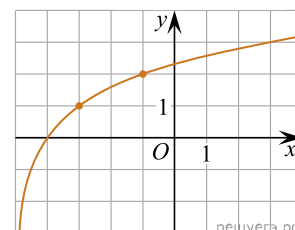
№ 115.

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



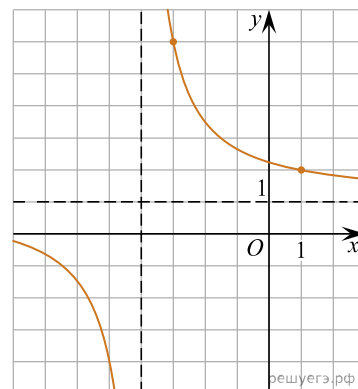
№ 116.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите $f(11)$.



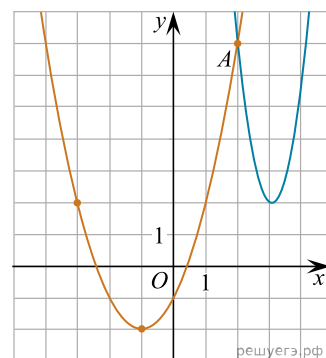
№ 117.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx+a}{x+b}$. Найдите k .



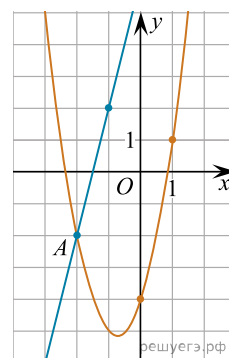
№ 118.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .



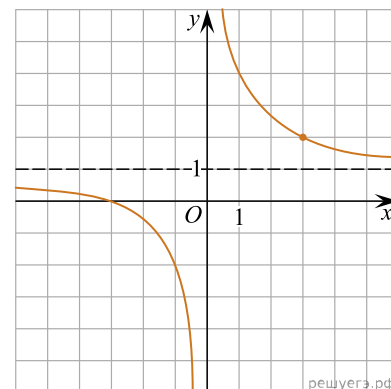
№ 119.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx + d$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



№ 120.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,8.



№ 121.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 147 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами, то есть за два года.

№ 122.

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 150 тыс. руб.;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году будет равен 185,9 тыс. руб. Какую сумму (в тыс. руб.) планируется взять в кредит?

№ 123.

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 700тысячрублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- платёж в 2027 и 2028 годах должен быть по 400 тыс. рублей;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита. Ответ дайте в рублях.

№ 124.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 545 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 40% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

№ 125.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в млн руб-лей)	S	$0,8S$	$0,6S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

№ 126.

В июле 2030 года планируется взять кредит 182 000 рублей в банке на три года.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей составит общая сумма платежей после полного погашения кредита, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами?

№ 127.

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году составит 590,4 тысяч рублей. Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

№ 128.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат (в миллионах рублей) после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 3,6 млн рублей?

№ 129.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 27 млн рублей?

№ 130.

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее S , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн руб.

№ 131.

- а) Решите уравнение $2\sin^3 x - \sqrt{2}\cos 2x + \sin x = -\sqrt{2}$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.
-

№ 132.

- а) Решите уравнение $\cos 3x \sin 3x = \cos \frac{\pi}{3} \cos \left(12x + \frac{3\pi}{2}\right)$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$.
-

№ 133.

- а) Решите уравнение $\frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{2\sin x + 1} = 0$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.
-

№ 134.

- а) Решите уравнение $\frac{\cos 2x + \sqrt{3}\sin x - 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

№ 135.

- а) Решите уравнение $2 - 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} - 2\sin(x + \pi)$
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.
-

№ 136.

- а) Решите уравнение $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{3}\sin^2 x = \sin x - 2\sqrt{3}$.
- б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.
-

№ 137.

- а) Решите уравнение $2024 \cdot 3^{\sqrt{1-\cos^2 x}} - 3^{\sin x} = 2023$.
- б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.
-

№ 138.

- а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin 2x$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.
-

№ 139.

- а) Решите уравнение $\log_{\sin x}(\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin^2 x + \sin x) = 1$.
- б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.
-

№ 140.

- а) Решите уравнение $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$.
- б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№ 141.

В пирамиде $ABCD$ ребра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, так что $AB = BC = AC = 1$. На ребрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причем $DM : MA = DN : NC = 2 : 5$.

- а) Докажите, что пирамида $ABCD$ правильная.
 - б) Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB .
-

№ 142.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро $SA = 5$, а высота $SO = \sqrt{15}$. Точки M и N — середины ребер CD и AB соответственно. Точка N — вершина пирамиды $NSCD$, NT — ее высота.

- а) Докажите, что точка T делит SM пополам.
 - б) Найдите расстояние между прямыми NT и SC .
-

№ 143.

В правильной четырёхугольной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 20, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка M принадлежит ребру A_1D_1 и делит его в отношении $2 : 3$, считая от вершины D_1 .

- а) Докажите, что точки A и C равноудалены от плоскости, проходящей через точки B , D и M .
 - б) Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B , D и M .
-

№ 144.

Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB . На AB отмечена точка P такая, что $AP : PB = 3 : 1$. Точка Q делит пополам ребро B_1C_1 . Точка M делит пополам ребро BC . Через точку M проведена плоскость α , перпендикулярная PQ .

- а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α .
 - б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ , если $AA_1 = 5$, $AB = 12$ и $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$.
-

№ 145.

Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ является ромб с тупым углом B , равным 120° . Все ребра этой призмы равны 10. Точки P и K — середины ребер CC_1 и CD соответственно.

- а) Докажите, что прямые PK и PB_1 взаимно перпендикулярны.
- б) Найдите угол между плоскостями PKB_1 и C_1B_1B .

№ 146.

Конус и полусфера имеют общее основание, радиус которого относится к высоте конуса как $1 : 3$.

а) Докажите, что поверхность полусферы делит образующую конуса в отношении $4:1$, считая от вершины конуса.

б) Найдите площадь поверхности полусферы, находящейся внутри конуса, если радиус их общего основания равен 5 .

№ 147.

Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D . Боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{43}$, высота равна $\sqrt{31}$.

а) Докажите, что сечение пирамиды, проходящее через середины ребер BD , AC и AD , является прямоугольником.

б) Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT , где точки M и T — середины ребер AC и AD соответственно.

№ 148.

Дана прямая призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Основание призмы — ромб с острым углом $A = 60^\circ$.

а) Докажите, что $AD_1 = DB_1$.

б) Найдите угол между плоскостью $AC_1 B$ и плоскостью ABD , если высота призмы равна 5 , а ребро основания равно 4 .

№ 149.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 5$, $AA_1 = 5$, $AD = 3$.

а) Докажите, что прямые $A_1 B$ и $B_1 D$ перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми $A_1 B$ и $B_1 D$.

№ 150.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S на ребрах AB , BC и SC отмечены точки K , L и M соответственно. Известно, что $AK : KB = BL : LC = 2 : 1$, $SM : MC = 7 : 1$.

а) Докажите, что плоскость KLM проходит через середину ребра SD .

б) Найдите угол между плоскостью KLM и плоскостью основания пирамиды, если высота пирамиды равна диагонали основания.

№ 151.

Решите неравенство $2^{\log_5 x^2} + |x|^{\log_5 4} \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,2}(x+6)}$.

№ 152.

Решите неравенство $333^3 + 3x^2 \cdot 333 + 3^{\log_x(x-333)} \geq x^3 + 3^3 \cdot x \cdot 12321$.

№ 153.

Решите неравенство $\frac{11 - 5^{x+1}}{25^x - 5(35 \cdot 5^{x-2} - 2)} \geq 1,5$.

№ 154.

Решите неравенство

$$\log_2 \left((7^{-x^2} - 3) \times (7^{-x^2+16} - 1) \right) + \log_2 \frac{7^{-x^2} - 3}{7^{-x^2+16} - 1} > \log_2 (7^{7-x^2} - 2)^2.$$

№ 155.

Решите неравенство: $\frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} \geq \log_x \frac{x}{4} + \log_7 x$.

№ 156.

Решите неравенство $9^{x-3} - 9^{x-2} + 9^{x-1} > 511$.

№ 157.

Решите неравенство $\frac{-2x^2 + 19x + 10}{5x + 2x^2 + 2} \geq 1 + \frac{2}{x}$.

№ 158.

Решите неравенство: $\log_{\log_x 2x}(9x - 4) \geq 0$.

№ 159.

Решите неравенство: $5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0$.

№ 160.

Решите неравенство $\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3(3x)} \cdot \left(\frac{2}{\log_3 x + 4} - 1 \right) \leq 0$.

№ 161.

На каждом из двух комбинатов изготавливают детали *A* и *B*. На первом комбинате работает 500 человек, и один рабочий изготавливает за смену 8 деталей *A* или 2 детали *B*. На втором комбинате работает 200 человек, и один рабочий изготавливает за смену 2 детали *A* или 8 деталей *B*. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, на котором собирают изделие, для изготовления которого нужна 1 деталь *A* и 3 детали *B*. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

№ 162.

Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние? *Считайте, что перекресток не Т-образный, обе дороги продолжают за перекрестком.*

№ 163.

Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей типа *A* и 2010 деталей типа *B*. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление двух деталей типа *A* время, за которое он мог бы изготовить одну деталь типа *B*. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

№ 164.

При подключении последовательного контура к источнику переменного тока амплитуда силы тока I (в амперах) в цепи зависит от циклической частоты ω (в рад/с) и выражается формулой:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

где $U=220\text{В}$ — амплитуда напряжения источника, $R=44\text{Ом}$ — активное сопротивление цепи, $L=0,2\text{Гн}$ — индуктивность катушки, а $C = 20\text{ мкФ} = 20 \cdot 10^{-6}\text{Ф}$ — емкость конденсатора. Найдите наибольшую возможную силу тока (в амперах) в этой цепи.

№ 165.

В растворе X содержится 30% вещества A и 50% вещества B , в растворе Y содержится 50% вещества A и 40% вещества B , в растворе Z содержится 80% вещества A и 10% вещества B . В результате смешивания получился раствор, содержащий 60% вещества A . Найдите наименьшее возможное содержание вещества B в получившемся растворе.

№ 166.

Кооператив «Красный труженик», состоящий из нескольких цехов, производящих однотипную продукцию, в 1925 году увеличил к концу года ежедневный объем выпуска продукции на p_1 процентов по сравнению с началом года. Однако с первого дня 1926 года несколько цехов, достигших суммарно к концу предыдущего года ежедневного объема выпуска продукции, равного половине ежедневного объема выпускаемой продукции всего кооператива в начале 1925 года, были закрыты на реконструкцию до начала следующего года. Остальные цеха увеличили к концу 1926 года ежедневный объем выпуска своей продукции на p_2 процентов по сравнению с началом этого года. Известно, что $p_1 + p_2 = 60$. При каком значении p_1 общий ежедневный объем выпуска продукции кооператива к концу 1926 года будет иметь максимальное значение?

№ 167.

В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1кг алюминия или 0,3кг никеля. Во второй области рабочие объединены в две бригады, одна из которых добывает алюминий, а другая— никель, причем для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую суммарную массу металлов можно добыть в двух областях за сутки?

№ 168.

На каждом из двух заводов работает по 100 человек. На первом заводе один рабочий изготавливает за смену 3 детали A или 1 деталь B . На втором заводе для изготовления t деталей (и A , и B) требуется t^2 человеко-смен. Оба завода поставляют детали на комбинат, где собирают изделие, причем для его изготовления нужна 1 деталь A и 3 детали B . При этом заводы договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

№ 169.

В бассейн проведены три трубы. Первая труба наливает 30 м^3 воды в час. Вторая труба наливает в час на $3V\text{ м}^3$ меньше, чем первая ($0 < V < 10$), а третья труба наливает в час на $10V\text{ м}^3$ больше первой. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают 30% бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся 0,7 бассейна. При каком значении V бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

№ 170.

В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области рабочие объединены в две бригады, одна из которых добывает алюминий, а другая — никель, причем для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

№ 171.

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = AE$. Отрезок BE пересекает AC в точке M , а отрезок AD в точке N .

- а) Докажите, что точки C , D , M , N лежат на одной окружности.
 - б) Точка O — центр описанной вокруг треугольника CMD окружности. Найдите радиус этой окружности, если $AO = 12$, $AB = 4$.
-

№ 172.

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. На боковой стороне AB и большем основании AD взяты соответственно точки K и L так, что прямые KL и CD параллельны и $CK = DL$.

- а) Докажите, что $\angle BCK = \angle AKL$.
- б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $KL = 12$, $DL = 2$, SBK и $S_{CDLK} = 26\sqrt{6}$.

№ 173.

В треугольнике ABC на стороне BC отметили точку D так, что $AB = BD$. Биссектриса BF пересекает AD в точке E . Из точки C на прямую AD опущен перпендикуляр CK .

- а) Докажите, что $AB : BC = AE : EK$.
 - б) Найдите отношение площади ABE к площади $CDEF$, если $BD : DC = 5 : 2$.
-

№ 174.

В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CT к боковым сторонам BC и AB . Из точки H проведены перпендикуляры HK и HM на стороны AC и AB соответственно. Прямая MK пересекает прямую CT в точке E .

- а) Докажите, что прямые EH и AB параллельны.
 - б) Найдите ME , если известно, что $AB = 17$ и $AC = 16$.
-

№ 175.

В треугольнике ABC на продолжении стороны AC за вершину A отложен отрезок AD , равный стороне AB . Прямая, проходящая через точку A параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .

- а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC .
 - б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 216 и известно отношение $AC : AB = 5 : 4$.
-

№ 176.

В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD угол ABC прямой. Прямая, перпендикулярная стороне CD , пересекает сторону AB в точке M , а сторону CD — в точке N , DH — перпендикуляр, проведенный из точки D к прямой MC .

- а) Докажите, что расстояние от точки A до прямой BN равно $\frac{BN \cdot DH}{MC}$.
 - б) Найдите отношение боковых сторон трапеции, если $MC = 4$ и $BN = 2$.
-

№ 177.

В треугольнике ABC угол ABC равен 60° . Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M .

- а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.
- б) Найдите $\sin \angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

№ 178.

Периметр треугольника ABC равен 24. Точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC .

- а) Докажите, что $AC = 6$.
 - б) Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle ACB = 90^\circ$.
-

№ 179.

В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ точки P и Q — середины сторон NK и LM соответственно. Диагональ KM делит точкой пересечения отрезок PQ пополам.

- а) Докажите, что площадь четырехугольника $KLMN$ в 4 раза больше площади треугольника PMN .
 - б) Найдите синус угла между диагоналями четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон четырехугольника $KLMN$, если площадь PMN равна $6\sqrt{3}$, $KM = 12$, $NL = 8$.
-

№ 180.

В полуокружности с диаметром MN расположены две окружности с центрами O_1 и O_2 , касающиеся друг друга, полуокружности и прямой MN (при этом точки касания с полуокружностью — это соответственно A и B).

- а) Докажите, что прямые O_1A , O_2B и MN пересекаются в одной точке.
 - б) Радиусы окружностей равны 2 и 5. Найдите радиус полуокружности.
-

№ 181.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (4a - 2x)^3 + 6x^2 + 8a = 4x$$

не имеет корней.

№ 182.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq a^2 + 10a + 20, \\ 5x^2 + 5y^2 - 2ax + 4ay \leq 5 - a^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

№ 183.

Найдите все значения a , при которых система

$$\begin{cases} y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 1, \\ x = (a+2)y^2 + 2ay + a - 1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

№ 184.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2a^2 + 5ax - 3x^2} = \sqrt{16x - x^2 + 4a^2 - 2a - 40}$$

имеет единственный корень на отрезке $[0; 8]$.

№ 185.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a-y^2} = \sqrt{a-x^2}, \\ x^2 + y^2 = 2x + 4y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

№ 186.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$$

имеет ровно 4 различных решения.

№ 187.

Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения

$$(a-1)\log_3^2(x-2) - 2(a+1)\log_3(x-2) + a-3 = 0$$

меньше 3.

№ 188.

Найдите все значений a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (y^2 - xy + x - 3y + 2)\sqrt{x+3} = 0, \\ a - x - y = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

№ 189.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых число корней уравнения $|x^2 - 5x + 6| = a$ равно наименьшему значению выражения $|x - a| + |2x - a| + 4|x - 1| + 1$.

№ 190.

Найдите все значения a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a - (a^2 - 2a)\cos 2x + 2}{3 - \cos 4x + a^2} < 1$$

содержит отрезок $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6}\right]$.

№ 191.

Известно, что в кошельке лежало n монет, каждая из которых могла иметь достоинство 2, 5 и 10 рублей. Аня сделала все свои покупки, расплатившись за каждую покупку отдельно без сдачи только этими монетами, потратив при этом все монеты из кошелька.

а) Могли ли все её покупки состоять из блокнота за 56 рублей и ручки за 29 рублей, если $n = 14$?

б) Могли ли её покупки состоять из чашки чая за 10 рублей, сырка за 15 рублей и пирожка за 20 рублей, если $n = 19$?

в) Какое наименьшее количество пятирублёвых монет могло быть в кошельке, если Аня купила только альбом за 85 рублей и $n = 24$?

№ 192.

Верно ли, что для любого набора положительных чисел, каждое из которых не превосходит 11, а сумма которых больше 110, всегда можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была не больше 110, но больше:

а) 99;

б) 101;

в) 100.

№ 193.

Бесконечная последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ задана следующим соотношением: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 10 \cdot a_n + 1$ ($n \geq 1$).

- а) Делится ли число a_{2022} на 33?
 - б) Может ли член этой последовательности a_n при $n > 1$ быть точным квадратом?
 - в) Какие остатки при делении на 7 могут иметь члены этой последовательности?
-

№ 194.

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

- а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?
 - б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 900?
 - в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 123.
-

№ 195.

У Вани есть несколько пакетов с вещами, каждый из которых весит целое число килограммов. Он хочет разложить все эти пакеты, не перекладывая их содержимое, по n имеющимся у него одинаковым рюкзакам. В каждый рюкзак можно положить любое число пакетов, суммарная масса которых не превосходит m килограммов.

- а) Сможет ли Ваня разложить таким образом семь пакетов, которые весят 3, 6, 9, 12, 15, 18 и 21 кг, если $n = 3$ и $m = 29$?
 - б) Сможет ли Ваня разложить таким образом семь пакетов, которые весят 2, 5, 8, 11, 14, 17 и 20 кг, если $n = 3$ и $m = 26$?
 - в) Какое наименьшее значение может принимать m , чтобы Ваня при $n=4$ смог разложить таким образом девять пакетов, которые весят 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 и 19 кг?
-

№ 196.

Каждую цифру a в записи натурального числа n заменим последней цифрой числа $7a$. Обозначим полученное число через n^* . Например, $(2351078)^* = 4157096$.

- а) Сколько решений имеет уравнение $n + n^* = 1292$?
- б) Существует ли решение уравнения $n + n^* = 942$?
- в) Сколько существует трехзначных чисел b , для которых уравнение $n + n^* = 2b$ не имеет решения?

№ 197.

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 50 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

- а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 2 раза?
 - б) Средний балл в школе №1 уменьшился на 2%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 2%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 9?
 - в) Средний балл в школе №1 уменьшился на 2%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 2%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.
-

№ 198.

В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

- а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.
 - б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?
 - в) Сколько в роте может быть солдат?
-

№ 199.

Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

- а) В мешке находятся 1 желтый, 1 зеленый и 2 красных шара. Из мешка случайным образом вынимают 2 шара разного цвета и заменяют одним шаром третьего цвета. Этот процесс продолжают до тех пор, пока все оставшиеся шары в мешке не окажутся одного цвета (возможно, что при этом в мешке останется один шар) Какого цвета шары (или шар) могут остаться в мешке?
 - б) В мешке 3 желтых, 4 зеленых и 5 красных шаров. Какого цвета шары (или шар) могут остаться в мешке в конце после применения описанной в предыдущем пункте процедуры?
 - в) В мешке находятся 3 желтых, 4 зеленых и 5 красных шаров. Из мешка случайным образом вынимают 2 шара разного цвета и заменяют двумя шарами третьего цвета. Можно ли, применяя эту процедуру многократно, добиться того, чтобы в мешке оказались шары одного цвета? Если можно, то какого цвета эти шары?
-

№ 200.

На доске написано n единиц, между некоторыми из которых поставили знаки + и посчитали сумму. Например, если изначально было написано $n = 12$ единиц, то могла получиться, например, такая сумма:

$$1 + 11 + 11 + 111 + 11 + 1 + 1 = 147.$$

- а) Могла ли сумма равняться 150, если $n = 60$?
- б) Могла ли сумма равняться 150, если $n = 80$?
- в) Чему могло равняться n , если полученная сумма чисел равна 150?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27270	4,8
2	27340	0,5
3	27913	0,25
4	282852	94
5	27322	4,8
6	27271	17,5
7	27344	0,5
8	27778	49
9	27611	6
10	27807	125
11	27717	10
12	649902	18
13	27728	2
14	27709	10
15	27740	40
16	27707	10
17	27731	200
18	27723	8
19	647124	28
20	649909	-15
21	676923	12
22	905	4,5
23	245365	2
24	27111	4,5
25	27044	8
26	27086	4
27	27207	0,9025
28	245343	4
29	27113	6
30	505096	1728
31	320195	0,006
32	283639	0,96
33	500250	0,92
34	325907	0,5
35	1011	0,4

36	325909	0,01
37	676847	0,36
38	320181	0,4
39	504230	0,26
40	320209	0,25
41	526004	0,125
42	320198	0,07
43	628364	0,9951
44	320175	0,91
45	509078	0,192
46	508876	0,25
47	320199	0,408
48	509332	0,4
49	509313	0,88
50	508893	0,9
51	663484	0,8
52	704655	0,48
53	638980	0,9
54	704665	6
55	704663	28,2
56	638979	0,8
57	509353	34,5
58	704653	69
59	509454	0,25
60	509393	4
61	282850	-1
62	504427	-0,4
63	77383	1
64	26655	12,5
65	510839	-36
66	26668	-9
67	77382	12
68	26659	-4
69	77373	-2,5
70	26671	4
71	563891	2
72	26897	121
73	26832	49
74	77416	-14

75	26763	18
76	4491	2
77	510424	-0,2
78	26809	2
79	26900	80
80	26822	14
81	525691	13
82	119973	-33
83	523394	5
84	27496	5
85	27504	0,25
86	525698	-8
87	672746	3
88	501059	6
89	525690	42
90	27503	2
91	676852	4
92	28002	30
93	27995	30
94	27996	2
95	263802	0,00125
96	27976	400
97	27959	50
98	27969	4000
99	525114	8
100	42849	0,5
101	99596	20
102	99572	17
103	689013	20
104	99581	57
105	26610	2
106	676853	42
107	323849	4
108	639947	60
109	99600	240
110	99591	70
111	509089	61
112	509167	-0,2
113	509130	-1

114	509107	5
115	661823	81
116	509042	4
117	508993	1
118	509262	62
119	642371	2,5
120	508961	-15
121	517503	169400
122	672873	400
123	630129	953500
124	660699	1029000
125	526017	29
126	704627	259200
127	697032	1190,4
128	517480	14,4
129	517569	9
130	525142	8

№ 131.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 1.$$

Заметим, что

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)^2 - \frac{1}{2}.$$

Подставив в уравнение, получим

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x) \left(1 - \left(\frac{1}{2} (\sin x + \cos x)^2 - \frac{1}{2} \right) \right) &= 1 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)^2 \right) = 1. \\ (\sin x + \cos x) \left(1 - \left(\frac{1}{2} (\sin x + \cos x)^2 - \frac{1}{2} \right) \right) &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)^2 \right) &= 1. \end{aligned}$$

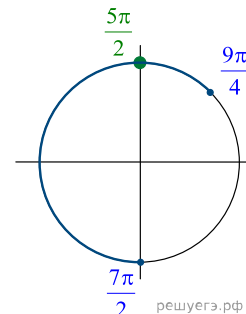
Сделав замену $t = \sin x + \cos x$, получим уравнение

$$t(3 - t^2) = 2 \Leftrightarrow t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2(t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} &= \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} &= \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} &k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



б) Отберём корни при помощи единичной окружности. Подходит $\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{2}$.

Приведем другое решение пункта а).

Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^3 x - \sin^2 x + \cos^3 - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) &= 0. \quad \sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^3 x - \sin^2 x + \cos^3 - \cos^2 x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $\sin x - 1 \leq 0$ и $\cos x - 1 \leq 0$ при любом x , следовательно, оба слагаемых не больше 0, поэтому их сумма может быть равна 0, только если слагаемые одновременно равны 0:

$$\begin{cases} \sin^2 x(\sin x - 1) = 0, \\ \cos^2 x(\cos x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = 1 \\ \cos x = 0, \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

№ 132.

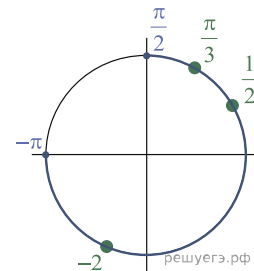
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$(x+2)(1-2x)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = \frac{1}{2}, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (x+2)(1-2x)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = \frac{1}{2}, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) Заметим, что $-\pi < -2 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$. С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$. Получим корни (см. рис.): $-2, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}$.



Ответ: а) $\left\{-2; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-2, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}$.

№ 133.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

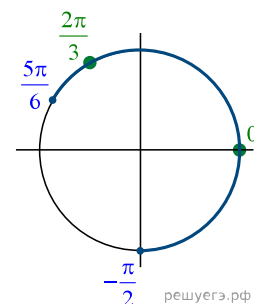
Решение. а) Преобразуем уравнение при условиях $\cos 3x \neq -1, \cos 3x \neq 0$:

$$\frac{\operatorname{tg} 3x}{1 + \cos 3x} = \cos 3x - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 3x = \cos^2 3x - 1 \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \sin^2 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x(1 + \sin 3x \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \sin 6x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x(1 + \sin 3x \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \sin 6x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Ограничениям соответствует только $3x = 2\pi k$, откуда $x = \frac{2\pi k}{3}$.

б) Отберём корни при помощи тригонометрической окружности. Подходят корни 0 и $\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) 0, $\frac{2\pi}{3}$.

№ 134.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

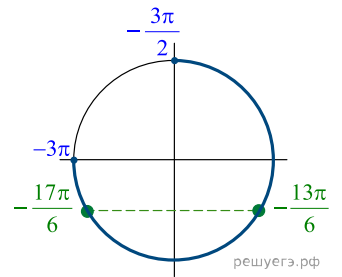
$$\frac{7}{\sin^2 x} + \frac{9}{\sin x} = 10 \Leftrightarrow \frac{7 + 9 \sin x - 10 \sin^2 x}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow -\frac{10 \left(\sin x + \frac{1}{2} \right) \left(\sin x - \frac{7}{5} \right)}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{\sin^2 x} + \frac{9}{\sin x} = 10 \Leftrightarrow \frac{7 + 9 \sin x - 10 \sin^2 x}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{10 \left(\sin x + \frac{1}{2} \right) \left(\sin x - \frac{7}{5} \right)}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \sin x = \frac{7}{5} \\ \sin x \neq 0 \end{array} \right], \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$.



Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$.

№ 135.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Применим формулы приведения и формулу синуса двойного угла, получим:

$$2 \sin 2x + \sqrt{20} \sin(x + \pi) = 2\sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{15} \Leftrightarrow 2 \sin 2x - \sqrt{20} \sin x = -2\sqrt{3} \cos x + \sqrt{15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin x \cos x - 2\sqrt{5} \sin x + 2\sqrt{3} \cos x - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x(2 \cos x - \sqrt{5}) + \sqrt{3}(2 \cos x - \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow (2 \cos x - \sqrt{5})(2 \sin x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow_{|\cos x| \leq 1}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} k, n \in \mathbb{Z}. 2 \sin 2x + \sqrt{20} \sin(x + \pi) = 2\sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x - \sqrt{20} \sin x = -2\sqrt{3} \cos x + \sqrt{15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin x \cos x - 2\sqrt{5} \sin x + 2\sqrt{3} \cos x - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow 2\sin x(2\cos x - \sqrt{5}) + \sqrt{3}(2\cos x - \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{5})(2\sin x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ |\cos x| \leq 1 \end{matrix} \\
& \Leftrightarrow 2\sin x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}. \quad 2\sin 2x + \sqrt{20}\sin(x + \pi) = 2\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{15} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2\sin 2x - \sqrt{20}\sin x = -2\sqrt{3}\cos x + \sqrt{15} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 4\sin x \cos x - 2\sqrt{5}\sin x + 2\sqrt{3}\cos x - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2\sin x(2\cos x - \sqrt{5}) + \sqrt{3}(2\cos x - \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{5})(2\sin x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ |\cos x| \leq 1 \end{matrix} \quad 2\sin x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}. \quad 2\sin 2x + \sqrt{20}\sin(x + \pi) = 2\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{15} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2\sin 2x - \sqrt{20}\sin x = -2\sqrt{3}\cos x + \sqrt{15} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 4\sin x \cos x - 2\sqrt{5}\sin x + 2\sqrt{3}\cos x - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2\sin x(2\cos x - \sqrt{5}) + \sqrt{3}(2\cos x - \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{5})(2\sin x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ |\cos x| \leq 1 \end{matrix} \\
& \Leftrightarrow 2\sin x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

б) Найдём корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$. Для $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ находим:

$$\begin{aligned}
\frac{7\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 5\pi & \Leftrightarrow 21 \leq -2 + 12k \leq 30 \Leftrightarrow 23 \leq 12k \leq 32 \Leftrightarrow \frac{23}{12} \leq k \leq \frac{32}{12} \Leftrightarrow k = 2. \quad \frac{7\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 5\pi \Leftrightarrow 21 \leq -2 + 12k \leq 30 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 23 \leq 12k \leq 32 \Leftrightarrow \frac{23}{12} \leq k \leq \frac{32}{12} \Leftrightarrow k = 2.
\end{aligned}$$

Найденному значению параметра соответствует $x = \frac{11\pi}{3}$.

Для $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{7\pi}{2} \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 5\pi & \Leftrightarrow 21 \leq -4 + 12n \leq 30 \Leftrightarrow 25 \leq 12n \leq 34 \Leftrightarrow \frac{25}{12} \leq n \leq \frac{34}{12}. \quad \frac{7\pi}{2} \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 5\pi \Leftrightarrow 21 \leq -4 + 12n \leq 30 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 25 \leq 12n \leq 34 \Leftrightarrow \frac{25}{12} \leq n \leq \frac{34}{12}.
\end{aligned}$$

Полученное двойное неравенство не имеет целочисленных решений.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$, б) $\frac{11\pi}{3}$.

№ 136.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Пусть $\sin x = t$, тогда получим:

$$\frac{3t-4}{t-1} + \frac{1}{t^2-t} = 1 \Leftrightarrow \frac{3t-4}{t-1} + \frac{1}{t(t-1)} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{3t^2-4t+1-(t^2-t)}{t(t-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t^2 - 3t + 1}{t(t-1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 3t + 1 = 0, \\ t(t-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} t = 1, \\ t = \frac{1}{2}, \end{cases} \\ t(t-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}. \quad \frac{3t-4}{t-1} + \frac{1}{t^2-t} = 1 \Leftrightarrow \frac{3t-4}{t-1} + \frac{1}{t(t-1)} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3t^2 - 4t + 1 - (t^2 - t)}{t(t-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 - 3t + 1}{t(t-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 3t + 1 = 0, \\ t(t-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} t = 1, \\ t = \frac{1}{2}, \end{cases} \\ t(t-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, имеем:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$, с помощью двойных неравенств:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq 2k \leq \frac{11}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{11}{12} \Leftrightarrow k = 0; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{5}{6} + 2k \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq 2k \leq \frac{11}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{11}{12} \Leftrightarrow k = 0;$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{5}{6} + 2n \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq 2n \leq \frac{7}{6} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq n \leq \frac{7}{12} \Leftrightarrow n = 0. \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{5}{6} + 2n \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq 2n \leq \frac{7}{6} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq n \leq \frac{7}{12} \Leftrightarrow n = 0.$$

Полученным значениям k, n соответствуют корни $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

№ 137.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Первый множитель обращается в нуль, если $\sqrt{x^2 + 2x - 7} = 1$, то есть при $x^2 + 2x - 7 = 1$, откуда $x = -4$ или $x = 2$. При $x = -4$ аргумент логарифма отрицателен, при $x = 2$ — положителен. Число -4 — посторонний корень.

Второй множитель обращается в нуль, если $9 + 2x - x^2 = 1$, то есть если $x^2 - 2x - 8 = 0$, откуда $x = -2$ или $x = 4$. При $x = -2$ подкоренное выражение отрицательно, при $x = 4$ — положительно. Число -2 — посторонний корень.

Таким образом, корнями уравнения являются числа 2 и 4.

б) Расставим корни и концы отрезка в порядке возрастания:

$$\log_3 5 < \log_3 9 = 2 < 2^{\sqrt{2}} < 4.$$

Значит, подходит только 2.

Ответ: а) $\{2; 4\}$; б) 2.

Примечание.

Чтобы не проверять корни подстановкой, можно было найти область определения уравнения, затем проверить, какие из корней уравнения-следствия, которое равносильно исходному уравнению на его области определения, лежат в области определения. А именно, уравнение имеет смысл при

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 7 \geq 0, \\ 9 + 2x - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 7 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 1 \leq x < 1 + \sqrt{10}.$$

Перейдем к следствию — найдем нули множителей:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 7 = 1, \\ 9 + 2x - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0, \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4, \\ x = \pm 2. \end{cases}$$

Из найденных решений в области определения лежат только числа 2 и 4.

№ 138.

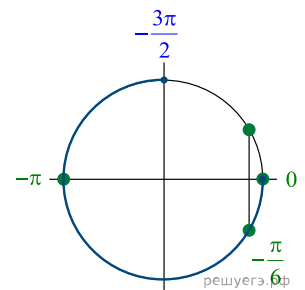
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos x \cos \frac{7\pi}{6} + 2\sqrt{3} \sin x \sin \frac{7\pi}{6} &= 3 \cos x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 3 \cos x \Leftrightarrow \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos x \cos \frac{7\pi}{6} + 2\sqrt{3} \sin x \sin \frac{7\pi}{6} = 3 \cos x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 3 \cos x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0. \end{aligned}$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$. Получим числа $-\pi$, $-\frac{\pi}{6}$, 0 .



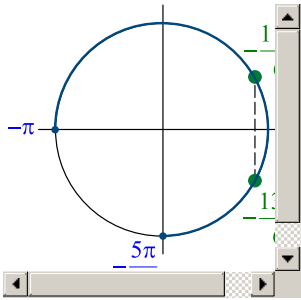
Ответ: а) πn , $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi$; $-\frac{\pi}{6}$; 0 .

№ 139.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Заметим, что уравнение определено при $\cos x > \frac{1}{2}$. Преобразуем его при этом условии:

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) + \log_2 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) &= -1 \Leftrightarrow \log_2 \left(\cos^2 x - \frac{1}{4} \right) = -1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 x &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow_{\cos x > \frac{1}{2}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ \log_2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) + \log_2 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) &= -1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2 \left(\cos^2 x - \frac{1}{4} \right) &= -1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos x &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow_{\cos x > \frac{1}{2}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \log_2 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) + \log_2 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) = -1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2 \left(\cos^2 x - \frac{1}{4} \right) &= -1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 x &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow_{\cos x > \frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



б) Отберем корни при помощи единичной окружности (см. рис.). Подходят: $-\frac{13\pi}{6}, \frac{-11\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{13\pi}{6}, \frac{-11\pi}{6}$.

№ 140.

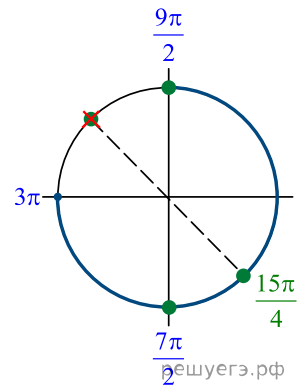
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \operatorname{ctg} x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) С помощью тригонометрической окружности отберем корни, принадлежащие указанному промежутку. Подходят корни $\frac{7\pi}{2}; \frac{15\pi}{4}; \frac{9\pi}{2}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{7\pi}{2}; \frac{15\pi}{4}; \frac{9\pi}{2}$.

№ 141.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть отрезок DO — высота пирамиды. Тогда прямоугольные треугольники CDO , ADO и BDO равны по гипотенузе и катету. Значит, $AO = BO = CO$, то есть точка O — центр правильного треугольника ABC . Отсюда и следует, что пирамида $ABCD$ правильная.

б) Пусть отрезок DH — высота пирамиды $DBMN$. Выразим объем этой пирамиды двумя способами:

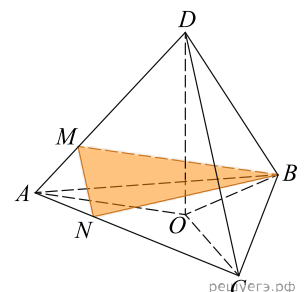
$$V = \frac{1}{3} \cdot BD \cdot \frac{1}{2} \cdot DN \cdot DM,$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{BMN}.$$

В первой формуле используем, что боковые ребра пирамиды равны, поэтому из прямоугольного треугольника ABD по теореме Пифагора:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \Leftrightarrow AB^2 = 2BD^2 \Leftrightarrow BD = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

а потому



$$V = \frac{1}{3} \cdot BD \cdot \frac{1}{2} \cdot DN \cdot DM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{7} = \frac{\sqrt{2}}{294}.$$

Из равных прямоугольных треугольников BND и BMD получаем

$$BN = BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2}{49}} = \sqrt{\frac{53}{98}} = \frac{\sqrt{106}}{14}.$$

Аналогично из треугольника MDN :

$$MN = \sqrt{MD^2 + ND^2} = \sqrt{\frac{2}{49} + \frac{2}{49}} = \frac{2}{7}.$$

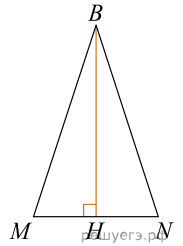
Высоту треугольника BMN также найдем по теореме Пифагора:

$$BH = \sqrt{BM^2 - MH^2} = \sqrt{\frac{106}{196} - \frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{102}{49}} = \frac{\sqrt{102}}{98}.$$

Из равенства $V = \frac{1}{3} DH \cdot \frac{\sqrt{102}}{98}$ находим:

$$DH = \frac{3\sqrt{2} \cdot 98}{294 \cdot \sqrt{102}} = \frac{\sqrt{51}}{51}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{51}}{51}$.



№ 142.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

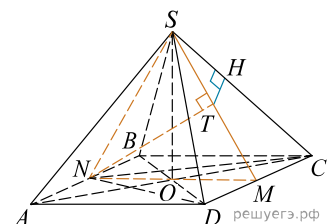
Решение. а) Точка O — основание высоты пирамиды, заметим, что прямые CD и SO перпендикулярны, прямые CD и MN перпендикулярны, следовательно, прямая CD перпендикулярна плоскости SMN , а значит, плоскости SMN и SCD перпендикулярны. Таким образом, прямая NT лежит в плоскости SMN , а точка T лежит на прямой SM . Имеем:

$$AO = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{10}, \quad AC = 2\sqrt{10},$$

$$AD = MN = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{5}, \quad NO = \sqrt{5},$$

$$SN = SM = \sqrt{SO^2 + NO^2} = 2\sqrt{5}.$$

Таким образом, треугольник SMN — равносторонний, а T — середина SM .



б) Из п. а) следует, что прямая NT перпендикулярна плоскости SCD . Прямая SC лежит в плоскости SCD , значит, расстояние между прямыми NT и SC равно расстоянию от точки T до прямой SC . Из точки T на прямую SC опустим перпендикуляр TH и найдём его. Треугольники STH и SCM подобны, следовательно,

$$\frac{TH}{MC} = \frac{ST}{SC} \Leftrightarrow TH = \frac{ST \cdot MC}{SC},$$

откуда $TH = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{5} = 1.$

Ответ: б) 1.

№ 143.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение.

а) Плоскость BDM пересекает отрезок AC в его середине (центре квадрата $ABCD$). Обозначим эту середину O .

Пусть точка H_1 — проекция A на плоскость BDM , точка H_2 — проекция C на плоскость BDM . Треугольники AOH_1 и COH_2 равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $AH_1 = CH_2$. Что и требовалось доказать.

б) Отрезок MN параллелен диагонали BD (точка N принадлежит ребру A_1B_1), следовательно, искомое сечение — трапеция $BDMN$ (см.рис.). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD , параллельной B_1D_1 , значит, MN параллелен B_1D_1 .

Треугольники NA_1M и $B_1A_1D_1$ подобны, следовательно,

$$A_1N : A_1B_1 = A_1M : A_1D_1 = MN : B_1D_1 = 3 : 5.$$

Значит,

$$BD = B_1D_1 = 20\sqrt{2},$$

$$MN = 12\sqrt{2}.$$

В равных прямоугольных треугольниках BB_1N и DD_1M :

$$DM = BN = \sqrt{BB_1^2 + B_1N^2} = \sqrt{113},$$

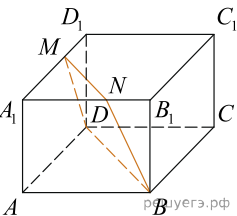


Рис. 1

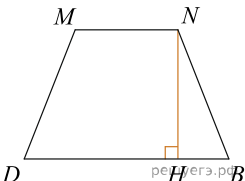
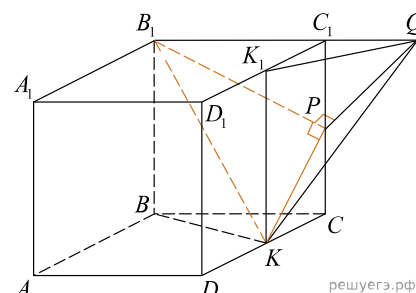


Рис. 2

Ответ: б) 16:25.

$$\begin{aligned} B_1P &= \sqrt{B_1C_1^2 + C_1P^2} = 5\sqrt{5}, & PK &= \sqrt{CK^2 + CP^2} = 5\sqrt{2}, & \angle BCK &= 60^\circ, \\ B_1P &= \sqrt{B_1C_1^2 + C_1P^2} = 5\sqrt{5}, & PK &= \sqrt{CK^2 + CP^2} = 5\sqrt{2}, & \angle BCK &= 60^\circ, \\ BK &= BC \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}, & B_1K &= \sqrt{BK^2 + BB_1^2} = 5\sqrt{7}, \\ B_1P^2 + PK^2 &= (5\sqrt{5})^2 + (5\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{7})^2 = B_1K^2. \end{aligned}$$


б) Заметим, что B_1P — линия пересечения плоскостей PKB_1 и C_1B_1B . Из п. а), прямые PK и PB_1 перпендикулярны, в плоскости C_1B_1B из точки P восстановим перпендикуляр к прямой B_1P , пусть он пересекает B_1C_1 в точке Q . Тогда KPQ — линейный угол одного из двугранных углов, образованных пересечением плоскостей PKB_1 и C_1B_1B . Найдём его. Треугольники B_1PC , PC_1Q и B_1PQ — подобны, следовательно,

$$\frac{PQ}{B_1P} = \frac{C_1Q}{C_1P} = \frac{1}{2}, \quad PQ = \frac{1}{2}B_1P = \frac{5}{2}\sqrt{5}, \quad C_1Q = \frac{1}{2}C_1P = \frac{5}{2}, \quad \frac{PQ}{B_1P} = \frac{C_1Q}{C_1P} = \frac{1}{2}, \quad PQ = \frac{1}{2}B_1P = \frac{5}{2}\sqrt{5},$$

$$K_1 Q^2 = K_1 C^2 + C_1 Q^2 - 2K_1 C \cdot C_1 Q \cos 120^\circ = \frac{175}{4},$$

$$KQ^2 = KK_1^2 + K_1Q^2 = \frac{575}{4}.$$

$$\begin{aligned} KQ^2 &= KP^2 + PQ^2 - 2KP \cdot PQ \cos \angle KPQ \Leftrightarrow \frac{575}{4} = 50 + \frac{125}{4} - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2} \cos \angle KPQ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{250}{4} &= -25\sqrt{10} \cdot \cos \angle KPQ \Leftrightarrow \cos \angle KPQ = -\frac{\sqrt{10}}{4}. \quad KQ^2 = KP^2 + PQ^2 - 2KP \cdot PQ \cos \angle KPQ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{575}{4} = 50 + \frac{125}{4} - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2} \cos \angle KPQ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{250}{4} &= -25\sqrt{10} \cdot \cos \angle KPQ \Leftrightarrow \cos \angle KPQ = -\frac{\sqrt{10}}{4}. \quad KQ^2 = KP^2 + PQ^2 - 2KP \cdot PQ \cos \angle KPQ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{575}{4} = 50 + \frac{125}{4} - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{2} \cos \angle KPQ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{250}{4} = -25\sqrt{10} \cdot \cos \angle KPQ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \angle KPQ = -\frac{\sqrt{10}}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно, угол между плоскостями PKB_1 и C_1B_1B равен $\arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Ответ: б) $\arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$.

№ 146.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка A — вершина конуса, точка O — центр, а отрезок AB — диаметр основания. Пусть радиус основания равен R . Рассмотрим осевое сечение конуса ABC , точки M и N — точки пересечения прямых AB и AC со сферой соответственно. Тогда $AO = 3R$ и

$$AB = AC = \sqrt{AO^2 + BO^2} = R\sqrt{10}.$$

Заметим, что треугольники BMO и ABC — равнобедренные с общим углом B , следовательно, они подобны. Значит,

$$\frac{BM}{BO} = \frac{BC}{AB} = \frac{2R}{R\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

откуда $BM = \frac{R\sqrt{10}}{5}$. Таким образом,

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AB - BM}{BM} = \frac{4}{1}.$$

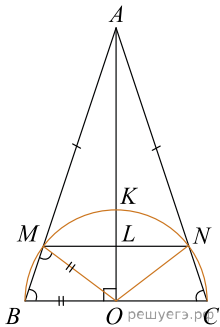
б) Пусть высота конуса AO пересекается со сферой в точке K , а с отрезком MN — в точке L . Тогда из подобия треугольников ABC и AMN следует, что

$$\frac{OL}{AL} = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{4},$$

откуда $OL = \frac{1}{5}AO = \frac{3}{5}R$, а значит, $KL = OK - OL = \frac{2}{5}R$.

Часть сферы, заключенная в конусе, представляет собой шаровой сегмент радиусом $R=5$ и высотой $h = KL = 2$, поэтому $S = 2\pi Rh = 20\pi$.

Ответ: б) $S = 20\pi$.



№ 147.

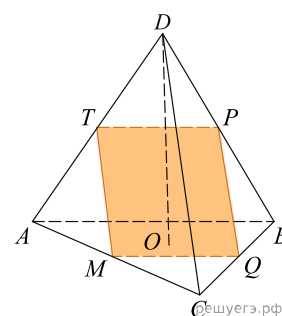
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть P — середина ребра BD , Q — середина ребра BC . По теореме о средней линии треугольника $MT \parallel CD \parallel QP$, следовательно, точки M, T, P, Q лежат в одной плоскости. $MT = \frac{1}{2}CD = QP$, следовательно, $MTPQ$ — параллелограмм. Кроме того, $PT \parallel AB$, а по теореме о трёх перпендикулярах $AB \perp CD$ (поскольку $AB \perp CO$), поэтому этот параллелограмм — прямоугольник.

б) По доказанному в пункте а), искомое расстояние есть длина отрезка PT . По теореме Пифагора

$$AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = 2\sqrt{3}.$$

Тогда $AB = \sqrt{3} \cdot AO = 6$, откуда $PT = \frac{1}{2}AB = 3$.



Ответ: 3.

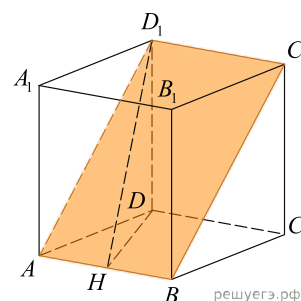
№ 148.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Из условия следует, что треугольник ABD равнобедренный с углом 60° градусов, а следовательно, равносторонний. Тогда, по теореме Пифагора получаем, что $AD_1^2 = AD^2 + DD_1^2 = BD^2 + BB_1^2 = DB_1^2$. Отсюда отрезки AD_1 и BD_1 равны.

б) Построим сечение призмы плоскостью AC_1B . Получим параллелограмм ABC_1D_1 . Из точки D проведём перпендикуляр DH к прямой AB . Тогда по теореме о трех перпендикулярах $D_1H \perp AB$. Плоский угол DHD_1 — искомый. $DH = AD \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$, следовательно,

$$\operatorname{tg} \angle DHD_1 = \frac{DD_1}{DH} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$



Ответ: $\arctg \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

№ 149.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что прямая B_1A является проекцией прямой B_1D на грань ABB_1A_1 . Грань ABB_1A_1 — квадрат, следовательно, прямая AB_1 перпендикулярна прямой A_1B . Таким образом, прямая B_1D перпендикулярна A_1B по теореме о трёх перпендикулярах.

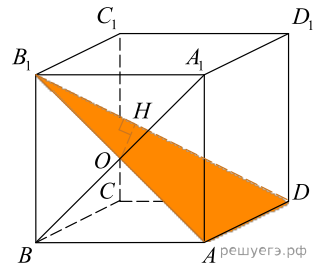
б) Заметим, что из п. а) следует, что прямая A_1B перпендикулярна плоскости B_1AD . Из точки O их пересечения опустим перпендикуляр OH на прямую B_1D . Прямая OH перпендикулярна прямой A_1B , поскольку лежит в плоскости B_1AD . Таким образом, искомое расстояние — длина OH . Найдём её. Имеем: $B_1O = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$,

$$B_1D = \sqrt{BB_1^2 + AB^2 + AD^2} = \sqrt{59}.$$

Треугольники B_1HO и B_1AD подобны, следовательно, $\frac{OH}{AD} = \frac{B_1O}{B_1D}$, откуда

$$OH = \frac{B_1O \cdot AD}{B_1D} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot 3}{\sqrt{59}} = \frac{15\sqrt{118}}{118}.$$

Ответ: $\frac{15\sqrt{118}}{118}$.



Приведем решение Александра Турбанова (Липецк).

а) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке B , как показано на рисунке. В этой системе координат:

$$B(0; 0; 0),$$

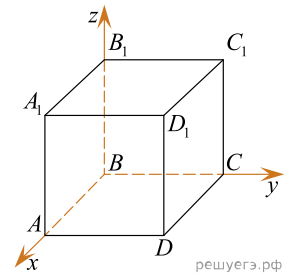
$$A_1(5; 0; 5),$$

$$B_1(0; 0; 5),$$

$$D(5; 3; 0),$$

$$\overrightarrow{BA_1}(5; 0; 5),$$

$$\overrightarrow{B_1D}(5; 3; -5).$$



Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{B_1D}$ равно

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 5 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot (-5) = 0,$$

следовательно, прямые BA_1 и B_1D перпендикулярны.

б) Рассмотрим плоскость α , проходящую через прямую B_1D и параллельную прямой A_1B . Вектор $\overrightarrow{BA_1}$ параллелен плоскости α , а значит, перпендикулярен нормали к ней. Пусть вектор нормали имеет координаты $\vec{n} = (A, B, C)$, тогда $\overrightarrow{BA_1} \cdot \vec{n} = 5A + 5C = 0$, откуда $A = -C$. Подставим координаты точек B_1 и D в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 5C + D = 0, \\ 5A + 3B + D = 0, \\ A = -C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -5C, \\ -5C + 3B - 5C = 0, \\ A = -C. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -5C, \\ B = \frac{10}{3}C, \\ A = -C. \end{cases}$$

Получаем уравнение плоскости α :

$$\begin{aligned} -Cx + \frac{10}{3}Cy + Cz - 5C = 0 &\Leftrightarrow_{C \neq 0} -x + \frac{10y}{3} + z - 5 = 0 \Leftrightarrow -3x + 10y + 3z - 15 = 0. & -Cx + \frac{10}{3}Cy + Cz - 5C = 0 &\Leftrightarrow_{C \neq 0} \\ &\Leftrightarrow -x + \frac{10y}{3} + z - 5 = 0 \Leftrightarrow -3x + 10y + 3z - 15 = 0. \end{aligned}$$

Расстояние между прямыми A_1B и B_1D равно

$$\rho(A_1B; B_1D) = \rho(B; \alpha) = \frac{|0 + 0 + 0 - 15|}{\sqrt{9 + 100 + 9}} = \frac{15}{\sqrt{118}} = \frac{15\sqrt{118}}{118}.$$

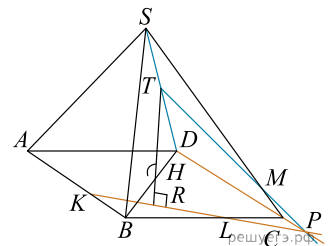
№ 150.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть прямые KL и CD пересекаются в точке P , а прямые PM и SD — в точке T . Треугольники KPL и PCL подобны, следовательно, $\frac{PC}{CL} = \frac{KB}{BL} = \frac{1}{2}$, откуда $PC = \frac{1}{6}BC$ и $\frac{PD}{PC} = \frac{7}{1}$. По теореме Менелая в треугольнике CSD получаем:

$$\frac{DP}{PC} \cdot \frac{CM}{MS} \cdot \frac{ST}{TD} = 1 \Leftrightarrow \frac{7}{1} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{ST}{TD} = 1 \Leftrightarrow \frac{ST}{TD} = 1 \Leftrightarrow ST = TD.$$

Точки K, L, M и T лежат в одной плоскости, так как KL и MT пересекаются, а потому T — точка пересечения плоскости KLM и прямой SD .



б) Пусть H — проекция точки T на плоскость $ABCD$, точка R — проекция точки H на прямую KL , тогда $\angle TRH$ — искомый. Пусть $SO = BD = 12\sqrt{2}t$, где SO — высота пирамиды. Значит, точка H — середина прямой OD , поэтому:

$$BH = \frac{3}{4}BD = 9\sqrt{2}t,$$

$$AB = 12t,$$

$$KB = 4t,$$

$$BL = 8t,$$

$$KL = 4\sqrt{5}t.$$

Введем систему координат с началом в точке B , луч BA совпадает с положительным направлением оси Oy , а луч BC — с положительным направлением оси Ox . Тогда прямая KL задается уравнением $x + 2y = 8t$. Точка H имеет координаты $(9t; 9t)$, следовательно,

$$HR = \frac{|9t + 2 \cdot 9t - 8t|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{19t}{\sqrt{5}}.$$

Пусть α — искомый угол, тогда:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{TH}{HR} = \frac{\frac{1}{2}SO}{HR} = \frac{6\sqrt{2}t \cdot \sqrt{5}}{19t} = \frac{6\sqrt{10}}{19}$$

$$\text{и } \alpha = \arctg \frac{6\sqrt{10}}{19}.$$

Ответ: б) $\arctg \frac{6\sqrt{10}}{19}$.

№ 151.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$2^{\log_5 x^2} + |x|^{\log_5 4} = 2^{\log_5 x^2} + x^{2\log_5 2} = 2^{\log_5 x^2} + 2^{\log_5 x^2} = 2 \cdot 2^{\log_5 x^2}.$$

Преобразуем правую часть неравенства:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,2}(x+6)} = 2 \cdot 2^{\log_5(x+6)}.$$

Далее имеем:

$$2 \cdot 2^{\log_5 x^2} \leq 2 \cdot 2^{\log_5(x+6)} \Leftrightarrow \log_5 x^2 \leq \log_5(x+6) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq x+6, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 3, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0, \\ 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

Ответ: $[-2; 0) \cup (0; 3]$.

№ 152.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Заметим, что $x > 333$,

$$3^{\log_x(x-333)} = (x-333)^{\log_x 3},$$

$$x^3 - 3x^2 \cdot 333 + 3^3 \cdot x \cdot 12321 - 333^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 333 + 3x \cdot 333^2 - 333^3 = (x-333)^3, \quad x^3 - 3x^2 \cdot 333 + 3^3 \cdot x \cdot 12321 - 333^3 = \\ = x^3 - 3x^2 \cdot 333 + 3x \cdot 333^2 - 333^3 = (x-333)^3,$$

а потому неравенство принимает вид

$$(x-333)^{\log_x 3} \geq (x-333)^3.$$

При $x > 333$ показатель степени в левой части неравенства меньше показателя степени, стоящей в правой части неравенства: $\log_x 3 < 3$. Следовательно, неравенство верно, если основание степени не больше 1, откуда $333 < x \leq 334$.

Ответ: (333; 334].

№ 153.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Относительно $t = 5^x$ неравенство имеет вид:

$$\frac{11-5t}{t^2-7t+10} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2(11-5t)-3(t^2-7t+10)}{(t-2)(t-5)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-3t^2+11t-8}{(t-2)(t-5)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(8-3t)}{(t-2)(t-5)} \geq 0. \quad \frac{11-5t}{t^2-7t+10} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2(11-5t)-3(t^2-7t+10)}{(t-2)(t-5)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-3t^2+11t-8}{(t-2)(t-5)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(8-3t)}{(t-2)(t-5)} \geq 0.$$

По методу интервалов $1 \leq t < 2$ или $\frac{8}{3} \leq t < 5$.

Возвращаясь к x , получаем $0 \leq x < \log_5 2$, $\log_5 \frac{8}{3} \leq x < 1$.

Ответ: $[0; \log_5 2) \cup \left[\log_5 \frac{8}{3}; 1\right)$.

№ 154.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $t = 7^{-x^2}, 0 < t \leq 1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_2 \left((t-3) (7^{16}t-1) \right) + \log_2 \frac{t-3}{7^{16}t-1} > \log_2 (7^7t-2)^2.$$

Так как $t-3 < 0$, имеем $7^{16}t-1 < 0$, а значит, $0 < t < \frac{1}{7^{16}} < \frac{2}{7^7}$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \log_2(t-3)^2 > \log_2(7^7t-2)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |t-3| > |7^7t-2|, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-t > 2-7^7t, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{7^{16}}. \\ \begin{cases} \log_2(t-3)^2 > \log_2(7^7t-2)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |t-3| > |7^7t-2|, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3-t > 2-7^7t, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} &\Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \cdot \begin{cases} \log_2(t-3)^2 > \log_2(7^7t-2)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |t-3| > |7^7t-2|, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3-t > 2-7^7t, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{7^{16}}. \end{aligned}$$

Поясним: неравенство $3-t > 2-7^7t$ эквивалентно неравенству $(7^7-1)t > -1$ и выполнено для всех значений переменной. Итак,

$$7^{-x^2} < 7^{-16} \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x < -4. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

№ 155.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Область определения неравенства задается системой соотношений $x > 0, x \neq 1$. При $x > 1$ знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства, положителен, а потому на него можно умножить, не меняя знака неравенства. Получим:

$$\log_7 x(2 - \log_4 x) \geq \log_4 x(\log_x \frac{x}{4} + \log_7 x).$$

Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned} \log_4 x(\log_x \frac{x}{4} + \log_7 x) &= \log_4 x(\log_x x - \log_x 4 + \log_7 x) = \log_4 x - 1 + \log_x 4 \log_7 x. \quad \log_4 x(\log_x \frac{x}{4} + \log_7 x) = \log_4 x(\log_x x - \log_x 4 + \log_7 x) = \\ &= \log_4 x - 1 + \log_x 4 \log_7 x. \quad \log_4 x(\log_x \frac{x}{4} + \log_7 x) = \\ &= \log_4 x(\log_x x - \log_x 4 + \log_7 x) = \\ &= \log_4 x - 1 + \log_x 4 \log_7 x. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2\log_7 x - \log_7 x \log_4 x &\geq \log_4 x - 1 + \log_x 4 \log_7 x \Leftrightarrow 2\log_7 x - 2\log_7 x \log_4 x + (1 - \log_4 x) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2\log_7 x + 1)(1 - \log_4 x) &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{7}} \leq x \leq 4. \quad 2\log_7 x - \log_7 x \log_4 x \geq \log_4 x - 1 + \log_x 4 \log_7 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\log_7 x - 2\log_7 x \log_4 x &+ (1 - \log_4 x) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2\log_7 x + 1)(1 - \log_4 x) &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{7}} \leq x \leq 4. \end{aligned}$$

На рассматриваемом промежутке $x > 1$, поэтому $1 < x \leq 4$.

При $0 < x < 1$ знаменатель дроби отрицателен, а значит, знак неравенства меняется. Находим:

$$(2\log_7 x + 1)(1 - \log_4 x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{\sqrt{7}}, \\ x \geq 4. \end{cases}$$

Промежутку $0 < x < 1$ принадлежат решения $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Объединяя найденные решения, получаем ответ: $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{7}}$ или $1 < x \leq 4$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{\sqrt{7}}\right] \cup (1; 4]$.

Приведём другое решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} &\geq \log_x \frac{x}{4} + \log_7 x \Leftrightarrow \frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} \geq 1 - \log_x 4 + \log_7 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} \geq 1 - \frac{1}{\log_4 x} + \log_7 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2\log_7 x - 2\log_7 x \cdot \log_4 x - \log_4 x + 1}{\log_4 x} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\log_7 x(1 - \log_4 x) + 1 - \log_4 x}{\log_4 x} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(1 - \log_4 x)(2\log_7 x + 1)}{\log_4 x} &\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(4-x)(x - \frac{1}{\sqrt{7}})}{x-1} \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{7}}, \\ 1 < x \leq 4. \end{cases} \\ \frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} &\geq \log_x \frac{x}{4} + \log_7 x \Leftrightarrow \frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} \geq 1 - \log_x 4 + \log_7 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} \geq 1 - \frac{1}{\log_4 x} + \log_7 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2\log_7 x - 2\log_7 x \cdot \log_4 x - \log_4 x + 1}{\log_4 x} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2\log_7 x(1 - \log_4 x) + 1 - \log_4 x}{\log_4 x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1 - \log_4 x)(2\log_7 x + 1)}{\log_4 x} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(4-x)(x - \frac{1}{\sqrt{7}})}{x-1} \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{7}}, \\ 1 < x \leq 4. \end{cases} \quad \frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} \geq \log_x \frac{x}{4} + \log_7 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} \geq 1 - \log_x 4 + \log_7 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} \geq 1 - \frac{1}{\log_4 x} + \log_7 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2\log_7 x - 2\log_7 x \cdot \log_4 x - \log_4 x + 1}{\log_4 x} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2\log_7 x(1 - \log_4 x) + 1 - \log_4 x}{\log_4 x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1 - \log_4 x)(2\log_7 x + 1)}{\log_4 x} \geq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(4-x)\left(x-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)}{x-1} \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} \geq \log_x \frac{x}{4} + \log_7 x \\ 1 < x \leq 4. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} \geq 1 - \log_x 4 + \log_7 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_7 x \cdot (2 - \log_4 x)}{\log_4 x} \geq 1 - \frac{1}{\log_4 x} + \log_7 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\log_7 x - 2\log_7 x \cdot \log_4 x - \log_4 x + 1}{\log_4 x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\log_7 x(1 - \log_4 x) + 1 - \log_4 x}{\log_4 x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \log_4 x)(2\log_7 x + 1)}{\log_4 x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(4-x)\left(x-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)}{x-1} \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{7}}, \\ 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{\sqrt{7}}\right] \cup (1; 4]$.

№ 156.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Решим неравенство:

$$9^{x-3} - 9^{x-2} + 9^{x-1} > 511 \Leftrightarrow 9^{x-3}(1 - 9 + 81) > 511 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9^{x-3} > \frac{511}{73} \Leftrightarrow 9^{x-3} > 7 \Leftrightarrow x - 3 > \log_9 7 \Leftrightarrow x > 3 + \log_9 7. \quad 9^{x-3} - 9^{x-2} + 9^{x-1} > 511 \Leftrightarrow 9^{x-3}(1 - 9 + 81) > 511 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9^{x-3} > \frac{511}{73} \Leftrightarrow 9^{x-3} > 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 3 > \log_9 7 \Leftrightarrow x > 3 + \log_9 7. \quad 9^{x-3} - 9^{x-2} + 9^{x-1} > 511 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9^{x-3}(1 - 9 + 81) > 511 \Leftrightarrow 9^{x-3} > \frac{511}{73} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9^{x-3} > 7 \Leftrightarrow x - 3 > \log_9 7 \Leftrightarrow x > 3 + \log_9 7.$$

Ответ: $(3 + \log_9 7; +\infty)$.

№ 157.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x} + \frac{2x^2-19x-10}{2x^2+5x+2} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{x+2}{x} + \frac{(2x+1)(x-10)}{(x+2)(2x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(2x+1)((x+2)^2+x(x-10))}{x(x+2)(2x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-1)(x-2)}{x(x+2)(2x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} < x < 0, \\ 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(2x+1)((x+2)^2+x(x-10))}{x(x+2)(2x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-1)(x-2)}{x(x+2)(2x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} < x < 0, \\ 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-2; -0,5) \cup (-0,5; 0) \cup [1; 2]$.

№ 158.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Область допустимых значений неравенства задается соотношениями:

$$\begin{cases} \log_x 2x > 0, \\ \log_x 2x \neq 1, \\ 9x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-1) > 0, \\ x > 0, \\ x > \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{9} < x < \frac{1}{2}, \\ x > 1. \end{cases}$$

На области допустимых значений справедливы равносильности:

$$\begin{aligned} \log_a b \geq 0 &\Leftrightarrow (a-1)(b-1) \geq 0, \\ \log_a b - \log_a c \geq 0 &\Leftrightarrow (a-1)(b-c) \geq 0, \\ a^b - a^c \geq 0 &\Leftrightarrow (a-1)(b-c) \geq 0. \end{aligned}$$

Поэтому на ОДЗ имеем:

$$\log_{\log_x 2x} (9x-4) \geq 0 \Leftrightarrow (\log_x 2x-1)(9x-5) \geq 0 \Leftrightarrow (\log_x 2x - \log_x x)(9x-5) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\log_x 2x} (9x-4) \geq 0 \Leftrightarrow (\log_x 2x-1)(9x-5) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_x 2x - \log_x x)(9x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(9x-5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{5}{9}, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Учитывая ОДЗ, получаем: $\left(\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $\left(\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

№ 159.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Используя основное логарифмическое тождество, получим:

$$\begin{aligned} 5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x + \log_5^2 x - 12 \leq 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 3)(\log_5 x + 4) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \log_5 x \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{625} \leq x \leq 125, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 125. \\ 5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x + \log_5^2 x - 12 \leq 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 3)(\log_5 x + 4) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \log_5 x \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{625} \leq x \leq 125, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 125. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 3)(\log_5 x + 4) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \log_5 x \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{625} \leq x \leq 125, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 125. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 3)(\log_5 x + 4) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \log_5 x \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{625} \leq x \leq 125, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 125. \end{aligned}$$

Ответ: $(1; 125]$.

№ 160.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $t = \log_3 x + 1$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{t+3} + \frac{2}{t} \cdot \left(\frac{2}{t+3} - 1 \right) \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{t+3} + \frac{2}{t} \cdot \frac{-t-1}{t+3} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{t-2t-2}{t(t+3)} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{-t-2}{t(t+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ -3 < t \leq -2. \end{cases} \frac{1}{t+3} + \frac{2}{t} \cdot \left(\frac{2}{t+3} - 1 \right) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{t+3} + \frac{2}{t} \cdot \frac{-t-1}{t+3} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{t-2t-2}{t(t+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-t-2}{t(t+3)} \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ -3 < t \leq -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \log_3 x + 1 > 0, \\ -3 < \log_3 x + 1 \leq -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > -1, \\ -4 < \log_3 x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3^{-1}, \\ 3^{-4} < x \leq 3^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{81} < x \leq \frac{1}{27}. \end{cases} \begin{cases} \log_3 x + 1 > 0, \\ -3 < \log_3 x + 1 \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > -1, \\ -4 < \log_3 x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3^{-1}, \\ 3^{-4} < x \leq 3^{-3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{81} < x \leq \frac{1}{27}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{81}; \frac{1}{27} \right] \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty \right)$.

№ 161.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть на первом комбинате x человек заняты изготовлением деталей A , где $0 \leq x \leq 500$, тогда $500 - x$ человек заняты изготовлением деталей B . Пусть на втором комбинате y человек заняты изготовлением деталей A , где $0 \leq y \leq 200$, тогда $200 - y$ человек заняты изготовлением деталей B . Всего на двух комбинатах будет изготовлено $8x + 2y$ деталей A и $2(500 - x) + 8(200 - y)$ деталей B . Для изготовления изделия нужна 1 деталь A и

3 детали B. Чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий, должно выполняться равенство

$$3 \cdot (8x + 2y) = 2 \cdot (500 - x) + 8 \cdot (200 - y),$$

откуда $x = 100 - \frac{7y}{13}$.

Количество изделий S будет равно количеству деталей A:

$$S(x; y) = 8x + 2y = 8 \cdot \left(100 - \frac{7y}{13}\right) + 2y = 800 - \frac{30y}{13}.$$

Наибольшее значение убывающей линейной функции $f(y) = 800 - \frac{30y}{13}$ достигается при наименьшем возможном значении y, то есть при $y = 0$. При этом $x=100$, а потому на первом комбинате будет изготовлено 800 деталей A и $400 \cdot 2 = 800$ деталей B, а на втором комбинате — только 1600 деталей B.

Ответ: 800.

№ 162.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Обозначим буквой t время, прошедшее с начального момента времени. Поскольку каждый велосипедист движется по взаимно перпендикулярным дорогам, то расстояние между ними может быть вычислено по теореме Пифагора. Рассмотрим $f(t)$ — квадрат длины в каждый момент времени, тогда

$$\begin{aligned} f(t) &= (5 - 40t)^2 + (3 - 30t)^2 = \\ &= 25 - 400t + 1600t^2 + 9 - 180t + 900t^2 = 2500t^2 - 580t + 34. \end{aligned}$$

Итак, $f(t) = 2500t^2 - 580t + 34$, $t \geq 0$. У данной квадратичной функции есть наименьшее значение, которое достигается при $t_0 = \frac{580}{2 \cdot 2500} = \frac{29}{250}$ ч. $= \frac{29}{250} \cdot 60 \text{ мин} = 6\frac{24}{25}$ мин. Найдем его:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{29}{250}\right) &= \left(5 - 40 \cdot \frac{29}{250}\right)^2 + \left(3 - 30 \cdot \frac{29}{250}\right)^2 = \\ &= \left(5 - \frac{116}{25}\right)^2 + \left(3 - \frac{87}{25}\right)^2 = \left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(-\frac{12}{25}\right)^2 = \left(\frac{15}{25}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(5 - \frac{116}{25}\right)^2 + \left(3 - \frac{87}{25}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(-\frac{12}{25}\right)^2 = \left(\frac{15}{25}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, минимальное расстояние между велосипедистами равно $\sqrt{f\left(\frac{29}{250}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$ км и будет достигнуто через $6\frac{24}{25}$ мин.

Ответ: $6\frac{24}{25}$ мин, $\frac{3}{5}$ км.

Примечание.

№ 163.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Заменяем мысленно каждую деталь типа *B* двумя деталями типа *A*, время работы от этого не изменится. Получим, что первая бригада рабочих должна изготовить 1005 деталей типа *A*, а вторая бригада должна изготовить 4020 деталей типа *A*, то есть в 4 раза больше. Значит, количество рабочих в бригадах необходимо разделить в соотношении 1:4. Поэтому в первой бригаде должно быть $193:5=38,6$ чел., а во второй — в 4 раза больше, то есть 154,4 чел.

Дробное число рабочих изготавливать детали не может, поэтому найденные значения необходимо округлить. Если в первой бригаде будет 38 рабочих, а во второй — 154 рабочих (в 4,05 раза больше), то первая бригада закончит работу позже второй. Если же в первой бригаде будет 39 рабочих, а во второй 153 рабочих (в 3,92 раза больше), то вторая бригада закончит позже первой. Для каждого из этих случаев оценим время выполнения заказа. Другие варианты разбиения рабочих по бригадам (37 на 155 чел., 40 на 152 чел. и т. д.) не могут дать меньшего времени, по сравнению с первыми двумя, поскольку чем дальше отношение числа рабочих в бригадах от соотношения 1:4, тем дольше будет работать более медленная из бригад, в то время как уже закончившая свою часть заказа бригада будет простаивать.

Пусть одна деталь делается рабочим за 1 единицу времени; не ограничивая общности, положим эту единицу равной 1 минуте. Тогда бригада из 38 человек на изготовление 1005 деталей затратит $\frac{1005}{38} = 26,45\dots$ мин., а бригада из 154 человек затратит на изготовление 2010 деталей $2 \cdot \frac{2010}{154} = 26,1\dots$ мин. В этом случае заказ будет закончен больше чем за 26,4 мин. Если же в первой бригаде 39 чел., то на изготовление 1005 деталей они затратят $\frac{1005}{39} = 25,8\dots$ мин., в то время как вторая бригада из 153 человек затратит на изготовление 2010 деталей $2 \cdot \frac{2010}{153} = 26,27\dots$ мин. В этом случае заказ будет закончен меньше чем за 26,3 мин. Значит, в первой бригаде должно быть 39 рабочих, а во второй бригаде — 153 рабочих.

Ответ: 39 и 153.

Примечание.

Эта задача из варианта Александра Ларина впервые предлагалась абитуриентам экономического факультета МГУ в 1992 году под номером 3 из шести задач в варианте. Авторское решение аналогичной задачи мы привели в задаче [632165](#).

№ 164.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Числитель и знаменатель дроби положительны, поэтому при фиксированном значении числителя дробь достигает наибольшего значения при наименьшем знаменателе. Подкоренное выражение в знаменателе представляет собой сумму положительного числа и неотрицательного выражения. Следовательно, наибольшая сила тока достигается, если $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 0$, это возможно при $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и тогда

$$I_{\max} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 0^2}} = \frac{U}{R} = \frac{220 \text{ В}}{44 \text{ Ом}} = 5 \text{ А.}$$

Ответ: 5 А.

Приведем другое решение.

Из курса физики известно, что наибольшая сила тока достигается при резонансе, то есть в случае, когда $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, и при этом

$$I_{\max} = \frac{U}{R} = \frac{220 \text{ В}}{44 \text{ Ом}} = 5 \text{ А.}$$

Заодно отметим, что резонансное значение циклической частоты равно

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,2 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ (рад/с)}. \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,2 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ (рад/с)}.$$

№ 165.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Будем считать, что для смешивания использовали a кг раствора X , b кг раствора Y и c кг раствора Z . Тогда для вещества A имеем:

$$0,3a + 0,5b + 0,8c = 0,6(a + b + c) \Leftrightarrow 0,3a + 0,1b = 0,2c \Leftrightarrow b = 2c - 3a. \quad 0,3a + 0,5b + 0,8c = 0,6(a + b + c) \Leftrightarrow 0,3a + 0,1b = 0,2c \Leftrightarrow b = 2c - 3a.$$

Пусть $c = 1$, тогда $b = 2 - 3a$, где, с учетом неотрицательности масс, $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$.

Для вещества B получаем:

$$0,5a + 0,4b + 0,1c = \omega \cdot (a + b + c) \Leftrightarrow \omega = \frac{0,5a + 0,4b + 0,1c}{a + b + c}.$$

Подставив $c = 1$, и $b = 2 - 3a$, получим функцию

$$\omega(a) = \frac{0,5a + 0,4(2-3a) + 0,1 \cdot 1}{a + (2-3a) + 1} = \frac{0,9 - 0,7a}{3-2a} = \frac{0,15}{2a-3} + 0,35.$$

Функция $\omega(a)$ — убывающая, значит, принимает своё наименьшее значение при наибольшем значении аргумента.

$$\omega_{\min}(a) = \omega\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{0,15}{2 \cdot \frac{2}{3} - 3} + 0,35 = 0,26.$$

Значит, наименьшее возможное содержание вещества B в полученном растворе равно 26%. Это достигается если смешать 2 порции раствора X и 3 порции раствора Z , а раствор Y не использовать.

Ответ: 26%.

Приведем другое решение:

Пусть a — доля раствора X , b — доля раствора Y , c — доля раствора Z в смеси, тогда $a + b + c = 1$, то есть $c = 1 - a - b$. Для концентрации вещества A в смеси имеем

$$\begin{aligned} 0,6 &= 0,3a + 0,5b + 0,8c = 0,3a + 0,5b + 0,8(1-a-b) \Leftrightarrow 0,5a + 0,3b = 0,2 \Leftrightarrow a = 0,4 - 0,6b. \\ 0,6 &= 0,3a + 0,5b + 0,8c = 0,3a + 0,5b + 0,8(1-a-b) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,5a + 0,3b = 0,2 \Leftrightarrow a = 0,4 - 0,6b. \end{aligned}$$

Для концентрации ω вещества B в смеси получаем

$$\begin{aligned} \omega(b) &= 0,5a + 0,4b + 0,1c = 0,5(0,4 - 0,6b) + 0,4b + 0,1(1 - 0,4 - 0,6b) = 0,26 + 0,06b. \quad \omega(b) = 0,5a + 0,4b + 0,1c = \\ &= 0,5(0,4 - 0,6b) + 0,4b + 0,1(1 - 0,4 - 0,6b) = 0,26 + 0,06b. \quad \omega(b) = 0,5a + 0,4b + 0,1c = \\ &= 0,5(0,4 - 0,6b) + 0,4b + 0,1(1 - 0,4 - 0,6b) = \\ &= 0,26 + 0,06b. \end{aligned}$$

Очевидно, что минимум этой функции достигается при $b=0$ и равен $\omega(0)=0,26$. Заметим, что при этом $a = 0,4$, $c = 0,6$.

Ответ: 26%.

№ 166.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть ежегодный объем продукции, производимый кооперативом на момент начала 1925 года, равен V , $k_1 = 1 + \frac{p_1}{100}$, $k_2 = 1 + \frac{p_2}{100}$. Имеем:

$$k_1 + k_2 = 1 + \frac{p_1}{100} + 1 + \frac{p_2}{100} = 2 + \frac{p_1 + p_2}{100} = 2 + \frac{60}{100} = 2,6.$$

Объем выпуска продукции к концу 1925 года был увеличен на p_1 процентов, поэтому он составил Vk_1 . В начале 1926 года несколько цехов, достигших суммарно к концу предыдущего года ежедневного объема выпуска продукции, равного половине ежедневного объема выпускаемой продукции всего кооператива в начале 1925 года, были закрыты на реконструкцию, следовательно, объем выпускаемой продукции стал равен $Vk_1 - 0,5V$. К концу 1926 года оставшиеся цеха увеличили объем выпуска продукции на p_2 процентов по сравнению с началом года,

следовательно, объем выпуска продукции составил

$$(Vk_1 - 0,5V)k_2 = (Vk_1 - 0,5V)(2,6 - k_1).$$

Найдем производную функции $f(k_1) = (Vk_1 - 0,5V)(2,6 - k_1)$:

$$f'(k_1) = V(-2k_1 + 3,1).$$

Найдем нули производной:

$$V(-2k_1 + 3,1) = 0 \Leftrightarrow 2k_1 = 3,1 \Leftrightarrow k_1 = 1,55.$$

Функция $f(k_1)$ принимает наибольшее значение в точке максимума — $k_1 = 1,55$, отсюда $p_1 = 55$.

Ответ: 55.

№ 167.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, необходимо, чтобы в каждой области независимо от другой было добыто наибольшее количество металла. Поэтому все рабочие первой области должны быть направлены на добычу никеля, который они добывают втрое более эффективно, чем алюминий. За сутки ими будет добыто $160 \cdot 5 \cdot 0,3 = 240$ кг никеля.

Пусть во второй области алюминий добывают u рабочих, а никель — $160 - u$ рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5}u$ кг алюминия и $\sqrt{5(160 - u)}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции

$$f(y) = \sqrt{5y} + \sqrt{800 - 5y}$$

для неотрицательных целых y , не больших 160. Имеем:

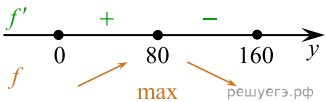
$$f'(y) = \frac{5}{2\sqrt{5y}} - \frac{5}{2\sqrt{800 - 5y}} = \frac{5}{2} \frac{\sqrt{800 - 5y} - \sqrt{5y}}{\sqrt{5y} \cdot \sqrt{800 - 5y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{800 - 5y} = \sqrt{5y} \Leftrightarrow_{y \geq 0} 800 - 5y = 5y \Leftrightarrow y = 80.$$

При u меньших 80 производная положительна, а при u больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{\max} = 40$, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

Таким образом, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 — на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 280 кг металла.



Ответ: 280 кг.

Примечание.

Можно было обойтись без производной. Напомним, что наибольшее значение функции $y(x) = \sqrt{x - a} + \sqrt{b - x}$, на

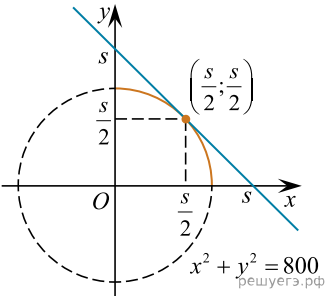
отрезке $[a; b]$ достигается в точке $\frac{a+b}{2}$ и равно $\sqrt{2(b-a)}$. Доказательство можно получить, например, возведением в квадрат.

В нашем случае $f(x) = \sqrt{5x} + \sqrt{800-5x}$, $a = 0$, $b = 800$, поэтому искомое наибольшее значение $f_{\text{наиб}} = \sqrt{1600} = 40$, достигается в точке, где $5x = 400$ то есть при $x = 80$.

Приведём геометрическое решение.

Пусть во второй области на добычу алюминия будет отведено x^2 человеко-часов, а на добычу никеля — y^2 человеко-часов. Всего рабочих 160, работая по 5 часов, они вырабатывают 800 человеко-часов в сутки, поэтому $x^2 + y^2 = 800$. Для таких значений переменных требуется определить наибольшее значение количества добытого металла $s = x + y$. Таким образом, необходимо определить наибольшее значение параметра s , при котором прямая, задаваемая уравнением $y = s - x$, будет иметь с окружностью $x^2 + y^2 = 800$ общие точки, лежащие в первой координатной четверти.

Из рисунка видно, что точка касания является серединой гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника. Координаты точки касания $(0,5s; 0,5s)$ должны удовлетворять уравнению окружности. Тогда $0,25s^2 + 0,25s^2 = 800$, откуда $s = 40$. при $x = y = 20$.



№ 168.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Первое решение:

Из условия «на втором заводе для изготовления t деталей (и A , и B) требуется t^2 человеко-смен» следует, что работающие на заводе 100 человек за смену смогут произвести максимум 10 деталей одного типа.

Пусть на первом комбинате x рабочих заняты на производстве детали A , а остальные $100 - x$ рабочих производят детали типа B , и пусть на втором комбинате из 10 деталей производится y деталей типа A и $10 - y$ деталей типа B . Внесем данные из условия в таблицу.

	Деталь <i>A</i>		Деталь <i>B</i>	
	Количество человек	Количество деталей	Количество человек	Количество деталей
Первый комбинат	x	$3x$	$100 - x$	$100 - x$
Второй комбинат		y		$10 - y$
Всего		$3x + y$		$100 - x + 10 - y$

Для производства изделий деталей типа *B* должно быть в три раза больше деталей типа *A*:

$$3(3x + y) = 100 - x + 10 - y \Leftrightarrow x = 11 - 0,4y \quad (*)$$

Пусть s шт.— количество изделий, оно равно количеству деталей типа A : $s = 3x + y$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s = 3x + y = 3 \cdot (11 - 0,4y) + y = 33 - 0,2y.$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение $f(y) = 33 - 0,2y$ при неотрицательных целых значениях y , не больших 10.

Функция $f(y) = 33 - 0,2y$ — убывающая. Наибольшее значение на отрезке $[0; 10]$ она принимает при $y = 0$, при этом $x = 11$, а $f(0) = 33$.

Таким образом, максимальное количество изделий за смену будет собрано, если на втором заводе будут изготавливать только детали типа B (100 рабочих изготовят 10 деталей типа B), а на первом заводе 11 человек изготовят 33 детали типа A , а остальные 89 рабочих изготовят 89 деталей типа B . Итого получим 33 детали типа A и 99 деталей типа B , на производстве которых были заняты все 200 человек.

Значит, комбинат сможет собрать за смену 33 изделия.

Ответ: 33 изделия.

Замечание.

Вначале мы прочли условие иначе и полагали, что на втором заводе для изготовления t деталей каждого типа (и A , и B независимо друг от друга) требуется t^2 человеко-смен. Приведём решение и примечания к нему для такого понимания условия. К этому же пониманию условия относятся комментарии читателей.

Второе решение:

Пусть на первом комбинате x рабочих, а на втором комбинате y рабочих заняты на производстве детали A . Внесем данные из условия в таблицу.

	Деталь A		Деталь B	
	Количество человек	Количество деталей	Количество человек	Количество деталей
Первый комбинат	x	$3x$	$100 - x$	$100 - x$
Второй комбинат	y	$\sqrt{y}$	$100 - y$	$\sqrt{100 - y}$
Всего		$3x + \sqrt{y}$		$100 - x + \sqrt{100 - y}$

Для производства изделий деталей типа B должно быть в три раза больше деталей типа A :

$$3(3x + \sqrt{y}) = 100 - x + \sqrt{100 - y} \Leftrightarrow x = 10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y} \quad (*) \quad 3(3x + \sqrt{y}) = 100 - x + \sqrt{100 - y} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y} \quad (*)$$

Пусть s шт.— количество изделий, оно равно количеству деталей типа A : $s = 3x + \sqrt{y}$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s = 3x + \sqrt{y} = 3(10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y}) + \sqrt{y} = 30 + 0,1(\sqrt{y} + 3\sqrt{100 - y}). \quad s = 3x + \sqrt{y} = 3(10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y}) + \sqrt{y} = \\ = 30 + 0,1(\sqrt{y} + 3\sqrt{100 - y}). \quad s = 3x + \sqrt{y} = \\ = 3(10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y}) + \sqrt{y} = \\ = 30 + 0,1(\sqrt{y} + 3\sqrt{100 - y}).$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение $f(y) = \sqrt{y} + 3\sqrt{100 - y}$ при натуральных значениях y не больших 100. Имеем:

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{3}{2\sqrt{100 - y}} = \frac{\sqrt{100 - y} - 3\sqrt{y}}{2\sqrt{100 - y} \cdot \sqrt{y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{100-y} = 3\sqrt{y} \Leftrightarrow_{y \in \mathbb{N}} 100-y = 9y \Leftrightarrow y = 10.$$

В найденной точке производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в ней функция достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области, равным $f(10) = \sqrt{10} + 3\sqrt{90} = 10\sqrt{10}$, при этом $s = 30 + \sqrt{10}$. Количество деталей должно быть натуральным числом, $3 < \sqrt{10} < 4$, поэтому рабочие могут произвести, самое большее, 33 детали типа А.

Из (*) находим $x = 10$ чел. Это означает, что 10 рабочих первого комбината и 10 рабочих второго комбината должны быть заняты на производстве детали А, за сутки они произведут их 33шт, оставшиеся 90 рабочих первого комбината и 90 рабочих второго комбината должны быть заняты на производстве деталей В, за сутки они произведут их 99 шт.

Ответ: 33 изделия.

Примечание 1.

Внимательный читатель мог бы задать вопрос о том, почему в равенстве (*) предполагается, что деталей производится ровно в отношении 1:3. Ведь можно произвести, например, 11 деталей типа В и 34 детали типа А, из них получится собрать 33 изделия, а одна деталь типа А останется лишней. Ответим на этот вопрос.

Если есть лишние детали, то уменьшим их число до соотношения 1:3 и отправим на обед людей, производивших лишние детали. Тогда получим решение задачи для меньшего числа людей, но с тем же выходом продукта и соотношением деталей 1:3. Теперь вернём людей с обеда. Меньшего количества изделий мы не получим, поскольку зависимость между числом деталей и количеством людей неубывающая. Большого количества изделий тоже не достичь, поскольку из лишних деталей целого изделия собрать не получится. Поэтому наибольшее количество изделий совпадает с найденным.

Примечание 2.

Заметим, что если рабочие второго комбината будут производить только детали типа В, то они произведут их 10 шт. Пусть при этом 89 рабочих первого комбината произведут 89 деталей типа В, а оставшиеся 11 рабочих первого комбината произведут 33 детали типа А. Тогда всего будет произведено 33 детали типа А и 99 деталей типа В. Из них также можно собрать 33 изделия. Таких вариантов довольно много (см. таблицу в конце).

Примечание 3.

Можно было бы спросить, почему не образовать из рабочих второго завода 100 независимых групп, каждая из которых состоит из одного рабочего.

Приведём решение Евгения Обухова.

Пусть первый завод выпускает x деталей В, а второй завод выпускает y деталей В. Тогда на первом заводе деталь В выпускает x рабочих, а деталь А выпускает $100-x$ рабочих. Поэтому первый завод выпускает $300-3x$ деталей А.

На втором заводе деталь В выпускает y^2 рабочих, деталь А выпускает $100-y^2$ рабочих. Поэтому второй завод выпускает $[\sqrt{100-y^2}]$ деталей А. Здесь [...] — целая часть числа.

Пусть комбинат выпускает k изделий. Имеем следующие необходимые и достаточные условия:

$$\begin{cases} 300-3x + [\sqrt{100-y^2}] \geq k, \\ x+y \geq 3k. \end{cases}$$

Рассмотрим $y = 10$. Тогда получим:

$$\begin{cases} 300-3x \geq k, \\ x+10 \geq 3k. \end{cases}$$

Домножим второе неравенство на 3 и сложим с первым, получим: $330 \geq 10k \Leftrightarrow k \leq 33$. Заметим, что $x = 89, k = 33$ (при $y = 10$) удовлетворяют исходному неравенству. То есть комбинат может изготовить 33 изделия. Проверим, может ли он изготовить больше. Пусть $k \geq 34$, тогда

$$\begin{cases} 300 - 3x + [\sqrt{100 - y^2}] \geq 34, \\ x + y \geq 102. \end{cases}$$

Поскольку теперь мы можем считать $y \leq 9$, из второго неравенства находим $x \geq 93$. Тогда оценим: $300 - 3x + [\sqrt{100 - y^2}] \leq 300 - 3 \cdot 93 + 10 = 31$. Получили противоречие с первым неравенством. Следовательно, максимальное число изделий, которое может произвести комбинат, равно 33.

Приведём таблицу других вариантов, также дающих 33 изделия.

№ 169.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Примем объем бассейна за 1. Пусть вначале первая и вторая трубы, работая вместе t_1 ч, налили $(30 + 30 - 3V) \cdot t_1 = (60 - 3V)t_1 = 0,3$ бассейна, далее все три трубы, работая вместе t_2 ч, налили $(30 + 30 - 3V + 30 + 10V) \cdot t_2 = (90 + 7V)t_2 = 0,7$ бассейна. Тогда время наполнения бассейна

$$t(V) = t_1 + t_2 = \frac{0,1}{20 - V} + \frac{0,7}{90 + 7V} = \frac{23}{(20 - V)(90 + 7V)}.$$

Найдем, при каком V полученное выражение наименьшего значения. Графиком функции $y = (20 - V)(90 + 7V)$ является парабола, пересекающая ось абсцисс в точках 20 и $-\frac{90}{7}$, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины этой параболы равна $\frac{20 + (-\frac{90}{7})}{2} = \frac{25}{7}$. Эта величина лежит в интервале $(0;10)$, а значит, наибольшее значение квадратного трехчлена на данном интервале и достигается при $V = \frac{25}{7}$. Осталось заметить, что наибольшее значение знаменателя положительно, поэтому оно соответствует наименьшему значению $t(V)$.

Ответ: $\frac{25}{7}$.

Примечание.

В общем случае можно исследовать функцию при помощи производной. Необходимо найти наименьшее значение этой функции на интервале $(0; 10)$. Найдем производную:

$$t'(V) = \frac{0,1}{(20 - V)^2} - \frac{4,9}{(90 + 7V)^2}.$$

Решим уравнение $t'(V) = 0$, используя равносильность $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$:

$$\frac{0,1}{(20-V)^2} - \frac{4,9}{(90+7V)^2} = 0 \Leftrightarrow (90+7V)^2 = 49(20-V)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90+7V = 7(20-V) \text{ или } 90+7V = -7(20-V) = 0 \Leftrightarrow 14V - 50 = 0 \Leftrightarrow V = \frac{25}{7}. \quad \Leftrightarrow 90+7V = 7(20-V) \text{ или } 90+7V = -7(20-V) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 14V - 50 = 0 \Leftrightarrow V = \frac{25}{7}.$$

Нетрудно показать, что это точка минимума, в которой функция достигает наименьшего значения на исследуемом промежутке.

Приведем другое решение.

Пусть объем бассейна равен A м³. Первая и вторая трубы, работая вместе t_1 ч, налили $(30+30-3V) \cdot t_1 = (60-3V)t_1 = 0,3A$ м³ бассейна, далее все три трубы, работая вместе t_2 ч, налили $(30+30-3V+30+10V) \cdot t_2 = (90+7V)t_2 = 0,7A$ м³ бассейна. В результате бассейн был налит полностью.

Известно, что для любых двух положительных чисел t_1 и t_2 верно неравенство $t_1 + t_2 \geq 2\sqrt{t_1 \cdot t_2}$ (неравенство Коши).

Рассмотрим произведение $t_1 \cdot t_2$.

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{0,1A}{20-V} \cdot \frac{0,7A}{90+7V} = \frac{0,7A^2}{1800-90V+140V-7V^2} = \frac{0,7A^2}{-7V^2+50V+1800}. \quad t_1 \cdot t_2 = \frac{0,1A}{20-V} \cdot \frac{0,7A}{90+7V} = \\ = \frac{0,7A^2}{1800-90V+140V-7V^2} = \frac{0,7A^2}{-7V^2+50V+1800}.$$

Ясно, что знаменатель полученной дроби имеет наибольшее значение в точке $V = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}$. А это значит: $t_1 \cdot t_2$ имеет наименьшее значение в точке $V = \frac{25}{7}$ (значение V принадлежит заданному промежутку). Следовательно, выражение $2\sqrt{t_1 \cdot t_2}$ также будет иметь аналогичное значение в той же точке $V = \frac{25}{7}$. При этом

$$2\sqrt{t_1 \cdot t_2} = 2\sqrt{\frac{0,1A}{20-\frac{25}{7}} \cdot \frac{0,7A}{90+7 \cdot \frac{25}{7}}} = 2A \cdot \sqrt{\frac{1}{200-\frac{250}{7}} \cdot \frac{0,7}{115}} = \\ = 2A \sqrt{\frac{7}{1150} \cdot \frac{7}{1150}} = \frac{14A}{1150} = \frac{7A}{575}. \quad 2\sqrt{t_1 \cdot t_2} = 2\sqrt{\frac{0,1A}{20-\frac{25}{7}} \cdot \frac{0,7A}{90+7 \cdot \frac{25}{7}}} = \\ = 2A \cdot \sqrt{\frac{1}{200-\frac{250}{7}} \cdot \frac{0,7}{115}} = \\ = 2A \sqrt{\frac{7}{1150} \cdot \frac{7}{1150}} = \frac{14A}{1150} = \frac{7A}{575}.$$

$$t_1 + t_2 = \frac{0,1A}{20-\frac{25}{7}} + \frac{0,7A}{90+7 \cdot \frac{25}{7}} = A \cdot \left(\frac{1}{200-\frac{250}{7}} + \frac{0,7}{115} \right) = \\ = A \cdot \left(\frac{7}{1400-250} + \frac{7}{1150} \right) = 7A \cdot \left(\frac{1}{1150} + \frac{1}{1150} \right) = \frac{14A}{1150} = \frac{7A}{575}.$$

Итак, при $V = \frac{25}{7}$ получим $t_1 + t_2 = 2\sqrt{t_1 \cdot t_2}$. А это значит, что в точке $V = \frac{25}{7}$ выражение $t_1 + t_2$ также примет наименьшее значение.

№ 170.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, а рабочие первой области одинаково эффективно добывают и алюминий, и никель, они могут добывать любой из металлов. За сутки ими будет добыто $160 \cdot 5 \cdot 0,1 = 80$ кг металла.

Пусть во второй области алюминий добывают t рабочих, а никель— $160 - t$ рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5t}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160 - t)}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции $f(t) = \sqrt{5t} + \sqrt{800 - 5t}$ для натуральных t , не больших 160. Имеем:

$$f'(t) = \frac{5}{2\sqrt{5t}} - \frac{5}{2\sqrt{800 - 5t}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{800 - 5t} - \sqrt{5t}}{\sqrt{5t} \cdot \sqrt{800 - 5t}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{800 - 5t} = \sqrt{5t} \Leftrightarrow_{t \in \mathbb{N}} 800 - 5t = 5t \Leftrightarrow t = 80.$$

При t меньших 80 производная положительна, а при t больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{max} = 40$, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

Таким образом, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80— на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 120 кг металла.

Ответ: 120 кг.

№ 171.

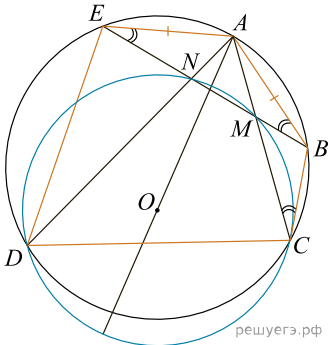
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть $\angle BAC = \lambda$ и $\angle ABE = \angle AEB = \angle ACB = \beta$. Тогда по теореме о внешнем угле $\angle BMC = \lambda + \beta$ и $\angle CDN = \frac{1}{2} \widehat{AC} = \lambda + \beta$, значит, $\angle CMN + \angle CDN = 180^\circ$, следовательно, четырехугольник $CDNM$ вписан в окружность.

б) Из подобия треугольников AMB и ABC получаем, что $AB^2 = 16 = AM \cdot AC$. Запишем степень точки A относительно окружности, описанной около CMD : $AO^2 - R^2 = AM \cdot AC$, то есть

$$12^2 - R^2 = 16 \Leftrightarrow R^2 = 128 \Leftrightarrow_{R > 0} R = 8\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $8\sqrt{2}$.



№ 172.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что четырехугольник $KCDL$ — равнобедренная трапеция, поэтому $\angle KCD = \angle CDL$. Основания KL и CD параллельны, поэтому

$$\angle CDL = \angle KLA = \angle KAL,$$

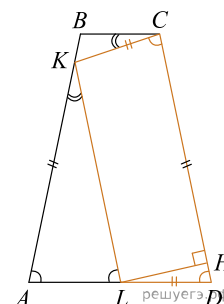
откуда

$$\angle BCK = \angle BCD - \angle KCD = \angle ABC - \angle KLA,$$

$$\angle AKL = 180^\circ - 2\angle KAL = (180^\circ - \angle KAL) - \angle KAL = \angle ABC - \angle KLA.$$

Таким образом, $\angle BCK = \angle AKL$.

б) Пусть $BK = 2x$, тогда $DL = 5x = CK$ и $CD = AB = 2x + 12$. Пусть отрезок LH — высота трапеции $KCDL$, следовательно,



$$LH^2 = (5x)^2 - \left(\frac{2x + 12 - 12}{2} \right)^2 = 24x^2,$$

откуда $LH = 2\sqrt{6}x$. Тогда

$$S_{CDLK} = \frac{1}{2}(12 + 2x + 12) \cdot 2\sqrt{6}x = 26\sqrt{6}x,$$

откуда $x(x + 12) = 13$, то есть $x = 1$, а значит, $CD = 14$.

Заметим, что

$$\sin \angle LDH = \frac{LH}{LD} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

следовательно, в трапеции трапеции $ABCD$ высота $h = 14 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Тогда

$$\cos \angle KAL = \cos \angle LDH = \sqrt{1 - \frac{24}{25}} = \frac{1}{5},$$

откуда $AL = 2 \cdot 12 \cdot \cos \angle KAL = \frac{24}{5}$ и $AD = \frac{24}{5} + 5 = \frac{49}{5}$. Находим основание BC :

$$BC = AD - 2 \cdot CD \cdot \cos \angle CDA = \frac{49}{5} - \frac{28}{5} = \frac{21}{5}.$$

Таким образом, для площади равнобедренной трапеции $ABCD$ получаем:

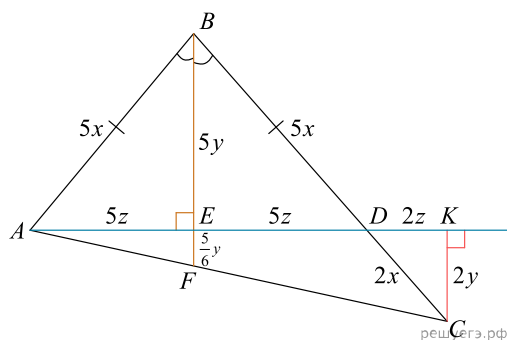
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (BC + AD) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{70}{5} \cdot \frac{28\sqrt{6}}{5} = \frac{196\sqrt{6}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{196\sqrt{6}}{5}$.

№ 173.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) В равнобедренном треугольнике ABD биссектриса BE является и высотой. Значит, прямая BF перпендикулярна прямой AD . Тогда прямые BF и CK параллельны. По теореме Фалеса $AE : EK = AF : FC$. По свойству биссектрисы треугольника $AF : FC = AB : BC$. Значит, $AE : EK = AB : BC$, что и требовалось доказать.



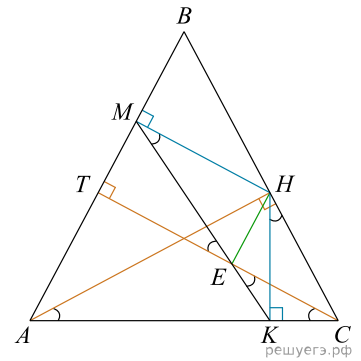
б) Пусть $BD = 5x = AB$, а $CD = 2x$, тогда $BC = 7x$. Треугольники BDE и CDK подобны по двум углам ($\angle BDE = \angle KDC$, как вертикальные, $\angle BED = \angle CKD = 90^\circ$), треугольники AEF и AKC подобны по двум углам (угол A — общий, $\angle AEF = \angle AKC = 90^\circ$). Пусть $CK = 2y$, а $KD = 2z$, тогда $BE = 5y$, $AE = 5z$, $EF = \frac{5}{6}y$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{S_{ABE}}{S_{CDEF}} &= \frac{S_{ABE}}{S_{CKEF} - S_{CKD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5y \cdot 5z}{\frac{1}{2} (2y + \frac{5}{6}y) \cdot 7z - \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 2z} = \frac{25 \cdot 6}{17 \cdot 7 - 24} = \frac{30}{19} \cdot \frac{S_{ABE}}{S_{CDEF}} = \frac{S_{ABE}}{S_{CKEF} - S_{CKD}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 5y \cdot 5z}{\frac{1}{2} (2y + \frac{5}{6}y) \cdot 7z - \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 2z} = \frac{25 \cdot 6}{17 \cdot 7 - 24} = \frac{30}{19}. \end{aligned}$$

Ответ: 30 : 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Сумма углов $\angle AMH$ и $\angle AKN$ равна 180° , поэтому четырехугольник $AMHK$ — вписанный. Вписанные углы $\angle HMK$ и $\angle KAH$ опираются на одну дугу, а потому равны. Прямые CT и HM перпендикулярны прямой AB , поэтому эти прямые параллельны. Тогда при пересечении их секущей MK образуются равные накрест лежащие углы $\angle HMK$ и $\angle MET$. Углы $\angle MET$ и $\angle KEC$ равны как вертикальные, а $\angle KHC = 90^\circ - \angle AHK = \angle KAH$. Отсюда следует, что $\angle KHC = \angle KEC$, а поскольку точки E и H лежат по одну сторону от прямой CK , то четырехугольник $EHCK$ — вписанный. Вписанные углы $\angle HCK$ и $\angle HEC$ опираются на одну дугу, а потому равны: $\angle HEC = \angle HCK = 90^\circ$. Таким образом, прямые HE и AB соответственно перпендикулярны прямой CT , то есть параллельны.



б) По теореме косинусов для треугольника ABC находим:

$$\cos \angle BAC = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB} = \frac{AC^2}{2AC \cdot AB} = \frac{AC}{2AB} = \frac{16}{2 \cdot 17} = \frac{8}{17}.$$

Пусть $\angle ACT = \alpha$, тогда получаем $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{8}{17}$, откуда $\sin \alpha = \frac{8}{17}$. В силу равенства прямоугольных треугольников ABH и CBT по гипотенузе и острому углу находим:

$$\begin{aligned} BH &= BT = AB \cdot \cos \angle ABC = 17 \cos(180^\circ - 2\angle BAC) = \\ &= 17 \cos 2\alpha = 17(1 - 2\sin^2 \alpha) = 17 - 34 \cdot \frac{64}{289} = 17 - \frac{128}{17} = \frac{161}{17}. \quad BH = BT = AB \cdot \cos \angle ABC = 17 \cos(180^\circ - 2\angle BAC) = \\ &= 17 \cos 2\alpha = 17(1 - 2\sin^2 \alpha) = \\ &= 17 - 34 \cdot \frac{64}{289} = 17 - \frac{128}{17} = \frac{161}{17}. \quad BH = BT = AB \cdot \cos \angle ABC = \\ &= 17 \cos(180^\circ - 2\angle BAC) = \\ &= 17 \cos 2\alpha = 17(1 - 2\sin^2 \alpha) = \\ &= 17 - 34 \cdot \frac{64}{289} = 17 - \frac{128}{17} = \frac{161}{17}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$BM = BH \cdot \cos 2\alpha = \frac{161}{17} \cdot \frac{161}{289} = \frac{161^2}{17^3}.$$

Из прямоугольного треугольника MET получаем $ME = \frac{MT}{\sin \alpha}$, а потому

$$\begin{aligned} ME &= \frac{MT}{\sin \alpha} = \frac{BT - BM}{\sin \alpha} = \frac{17}{8} \cdot \left(\frac{161}{17} - \frac{161^2}{17^3} \right) = \\ &= \frac{17}{8} \cdot \frac{161 \cdot 289 - 161 \cdot 161}{17^3} = \frac{17}{8} \cdot \frac{161 \cdot 128}{17^3} = \frac{161 \cdot 16}{17^2} = \frac{2576}{289}. \quad ME = \frac{MT}{\sin \alpha} = \frac{BT - BM}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{17}{8} \cdot \left(\frac{161}{17} - \frac{161^2}{17^3} \right) = \frac{17}{8} \cdot \frac{161 \cdot 289 - 161 \cdot 161}{17^3} = \\ &= \frac{17}{8} \cdot \frac{161 \cdot 128}{17^3} = \frac{161 \cdot 16}{17^2} = \frac{2576}{289}. \end{aligned}$$

Приведем другое доказательство пункта а).

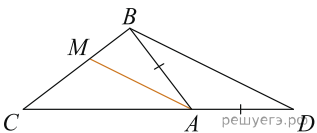
Углы ATC и AHC — прямые и опираются на одну сторону AC . Следовательно, точки T и H лежат на одной окружности с диаметром AC . По теореме Симсона основания перпендикуляров, проведенных из случайной точки описанной окружности треугольника, проведенных к его сторонам или их продолжениям, лежат на одной прямой— прямой Симсона. Перпендикуляры, проведенные из точки H , лежащей на описанной окружности треугольника ATC , пересекают сторону AT на ее продолжении за точку T в точке M и сторону AC в точке K соответственно. Следовательно, перпендикуляр, проведенный из точки H к стороне CT , пересекает эту сторону в точке, лежащей на прямой MK . Это точка E .

Следовательно, прямая HE перпендикулярна прямой CT . Прямая CT перпендикулярна прямым AB и HE , а потому прямые AB и HE параллельны.

№ 175.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б и использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а)Обозначим $\angle BAC = \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABD + \angle ADB = \alpha$. Треугольник ABD равнобедренный, поэтому $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\alpha}{2}$, а так как AM параллельна BD ,



$$\angle MAC = \angle BDC = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Следовательно, AM — биссектриса угла BAC .

б) По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$, значит,

$$\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}} = \frac{CM}{CB} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow S_{ACM} = \frac{5}{9}S_{ABC} = \frac{5}{9} \cdot 216 = 120.$$

Треугольник DCB подобен треугольнику ACM с коэффициентом $\frac{9}{5}$, поэтому

$$S_{DCB} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 S_{ACM} = \frac{81}{25} \cdot 120 = 388,8.$$

Следовательно,

$$S_{AMBD} = S_{DCB} - S_{ACM} = 388,8 - 120 = 268,8.$$

№ 176.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а)Заметим, что четырехугольник $MBCN$ вписан в окружность с диаметром MC . По теореме синусов,

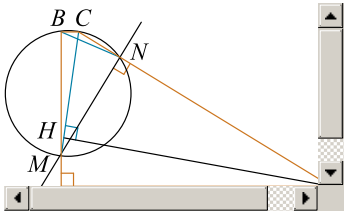
$$BN = MC \cdot \sin \angle BCN = MC \cdot \sin \angle ADC.$$

Углы ABN и MCN равны как вписанные. Тогда

$$DH = CD \cdot \sin \angle DCH = CD \cdot \sin \angle MCN = CD \cdot \sin \angle ABN.$$

Пусть x — расстояние от A до BN . Тогда

$$\begin{aligned} x &= AB \cdot \sin \angle ABN = CD \cdot \sin \angle ADC \cdot \sin \angle ABN = DH \cdot \sin \angle ADC = \frac{DH \cdot BN}{\frac{MC}{DH \cdot BN}}. & x &= AB \cdot \sin \angle ABN = CD \cdot \sin \angle ADC \cdot \sin \angle ABN = \\ &= DH \cdot \sin \angle ADC = \frac{MC}{MC}. \end{aligned}$$



Что и требовалось доказать.

б) Из пункта а) следует, что $\frac{BN}{MC} = \sin \angle ADC = \frac{1}{2}$. Поскольку $\frac{AB}{CD} = \sin \angle ADC$, получаем: $AB : CD = 1 : 2$.

Ответ: б) $\frac{1}{2}$.

Приведем решение Ирины Шраго.

а)Заметим, что четырехугольник $MBCN$ вписан в окружность с диаметром MC , тогда $\angle MBN = \angle MCN$. Четырехугольник $AMND$ вписан в окружность с диаметром MD , тогда $\angle MAN = \angle MDN$. Следовательно, треугольники ABN и DCM подобны по двум углам, и отношение их высот равно отношению сторон, к которым эти высоты проведены.

Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BN , тогда

$$\frac{AK}{DH} = \frac{BN}{MC} = \frac{AB}{CD}.$$

Из первого равенства получим $AK = \frac{BN \cdot DH}{MC}$, что и требовалось доказать.

б) По доказанному в пункте а)

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BN}{MC} = \frac{1}{2}.$$

№ 177.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть O — центр вписанной окружности. Проведём $OH \perp BC$, в треугольнике BHO катет OH лежит напротив угла в 30° , поэтому $BO = 2OH = 2r$. Тогда в силу неравенства треугольника имеем: $BM \leq BO + OM \leq 3r$ что и требовалось доказать.

б) Запишем теорему косинусов для треугольника BOM :
 $BO^2 = BM^2 + OM^2 - 2BM \cdot OM \cos \angle BMO$, откуда

$$(2r)^2 = \left(\frac{5}{2}r\right)^2 + r^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}r \cdot r \cos \angle BMO \Leftrightarrow$$

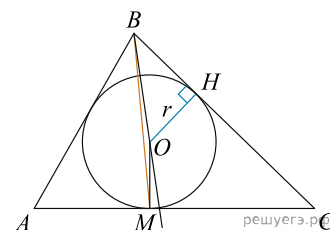
$$\Leftrightarrow 4r^2 = \frac{25}{4}r^2 + r^2 - 5r^2 \cos \angle BMO \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle BMO = \frac{\frac{29}{4}r^2 - 4r^2}{5r^2} \Leftrightarrow \cos \angle BMO = \frac{13}{20}.$$

Осталось заметить, что

$$\sin \angle BMC = \sin(90^\circ + \angle BMO) = \cos \angle BMO = 0,65.$$

Ответ: 0,65.



Примечание Сергея Пепеляева.

Составители ЕГЭ ошиблись. Описанный в условии задачи треугольник невозможен. Наименьшая возможная длина отрезка BM равна $\sqrt{7}r$ когда угол BCA стремится к нулю, а угол BOM приближается к 120° . Число 2,5 необходимо увеличить.

№ 178.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Так как четырехугольник $AEFC$ описанный (см. рис. 1), то $AE + FC = AC + EF$. Поскольку E и F — середины сторон AB и BC , отрезок EF — средняя линия, а значит, $AC = 2EF$. Найдем периметр треугольника ABC :

$$P_{ABC} = AC + AB + BC = AC + 2(AE + FC) = AC + 2AC + 2EF = 4AC,$$

откуда следует, что $AC = \frac{1}{4}P_{ABC}$, то есть $AC = 6$.

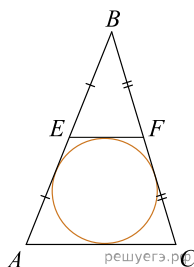


Рис. 1

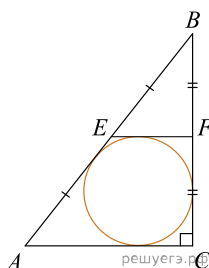


Рис. 2

б) Так как $AC = 6$, то $AB + BC = 18$. По теореме Пифагора (см. рис. 2) имеем: $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Получаем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} AB + BC = 18, \\ BC^2 + 36 = AB^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} BC = 18 - AB, \\ BC^2 + 36 = 324 - 36BC + BC^2, \end{cases} \Rightarrow 36BC = 288 \Leftrightarrow BC = 8. \\ \begin{cases} AB + BC = 18, \\ BC^2 + 36 = AB^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} BC = 18 - AB, \\ BC^2 + 36 = 324 - 36BC + BC^2, \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow 36BC = 288 \Leftrightarrow BC = 8. &\begin{cases} AB + BC = 18, \\ BC^2 + 36 = AB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} BC = 18 - AB, \\ BC^2 + 36 = 324 - 36BC + BC^2, \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow 36BC = 288 \Leftrightarrow BC = 8. &\end{aligned}$$

Тогда площадь треугольника ABC равна $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC = 24$.

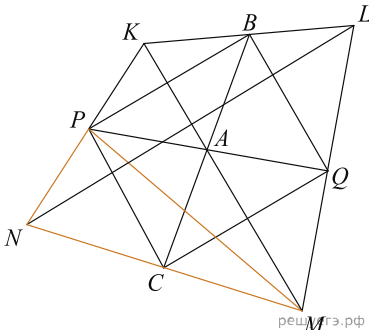
Ответ: б) 24.

№ 179.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б и использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка B — середина отрезка KL , точка C — середина отрезка NM . Заметим, что по теореме о средней линии отрезки BP и QC параллельны диагонали LN и равны её половине. Поэтому $PBQC$ — параллелограмм. Его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, эта точка лежит на прямой KM . Обозначим эту точку A . Точки P и Q равноудалены от точки A , а значит, и от прямой KM . Таким образом, и вершины N и L равноудалены от прямой KM . Таким образом, площади треугольников NKM и KLM равны. Следовательно,

$$S_{MPN} = \frac{1}{2} S_{NKM} = \frac{1}{4} S_{KLMN}.$$



Что и требовалось доказать.

б) Имеем:

$$S_{PBQC} = \frac{1}{2} S_{KLMN} = 2 S_{PMN} = 12\sqrt{3},$$

$$PB = \frac{1}{2} NL = 4, \quad BQ = \frac{1}{2} KM = 6,$$

$$S_{PBQC} = PB \cdot BQ \cdot \sin \angle PBQ = 4 \cdot 6 \cdot \sin \angle PBQ.$$

Следовательно, $\sin \angle PBQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому $\cos \angle PBQ = \pm \frac{1}{2}$. Отсюда, по теореме косинусов, диагонали четырехугольника $PBQC$ равны $\sqrt{4^2 + 6^2 \pm 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}}$. Без ограничения общности можно считать, что $PQ = \sqrt{76}$, $BC = \sqrt{28}$. Далее, по формуле площади четырехугольника

$$S_{PBQC} = \frac{1}{2} \sqrt{76} \cdot \sqrt{28} \cdot \sin \angle PAC.$$

Получаем, что

$$\sin \angle PAC = \frac{12\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{76}\sqrt{28}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{133}}.$$

Ответ: $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{133}}.$

№ 180.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б и использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что точка касания двух окружностей лежит на их линии центров. Пусть O — середина диаметра MN , тогда A лежит на прямой OO_1 , точка B лежит на OO_2 . Значит, прямые AO_1 , BO_2 и MN пересекаются в одной точке (точке O). Что и требовалось доказать.

б) Пусть C и D — точки касания соответственно первой и второй окружностей с прямой MN . Тогда из прямоугольной трапеции CO_1O_2D получаем:

$$CD^2 = (2+5)^2 - (5-2)^2 = 40.$$

Обозначим искомый радиус R , тогда из треугольника O_1CO получаем

$$CO^2 = (R-2)^2 - 2^2 = R^2 - 4R.$$

Аналогично

$$DO^2 = (R-5)^2 - 5^2 = R^2 - 10R.$$

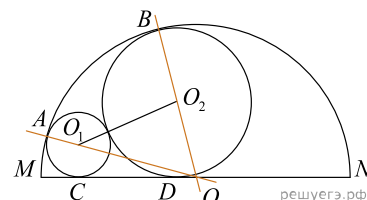
Точки касания могут лежать по одну сторону от центра большей окружности или по разные стороны. В каждом из этих случаев $DO = |CO - CD|$, то есть $DO^2 = (CO - CD)^2$, откуда

$$R^2 - 10R = R^2 - 4R - 2\sqrt{40 \cdot (R^2 - 4R)} + 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{40 \cdot (R^2 - 4R)} = 3R + 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40R^2 - 160R = 9R^2 + 120R + 400 \Leftrightarrow R = \frac{140 + 80\sqrt{5}}{31}.$$

Ответ: б) $\frac{140 + 80\sqrt{5}}{31}.$



№ 181.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано.	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра.	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Преобразуем уравнение

$$27x^6 + 6x^2 = (2x - 4a)^3 + 2(2x - 4a).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + 2t$. Она монотонно возрастает как сумма двух возрастающих функций. Поэтому уравнение $f(3x^2) = f(2x - 4a)$ равносильно уравнению $3x^2 = 2x - 4a$. Оно не имеет корней в тех случаях, когда дискриминант уравнения $3x^2 - 2x + 4a = 0$ отрицателен. То есть когда $4 - 48a < 0$, $a > \frac{1}{12}$.

Ответ: $a > \frac{1}{12}$.

№ 182.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. В обоих неравенствах выделим полные квадраты:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq a^2 + 10a + 20, \\ 5x^2 + 5y^2 - 2ax + 4ay \leq 5 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 \leq a^2 + 10a + 25, \\ x^2 - 2x \cdot \frac{a}{5} + \frac{a^2}{25} + y^2 + 2x \cdot \frac{2a}{5} + \frac{4a^2}{25} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq (a+5)^2, \\ \left(x - \frac{a}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{2a}{5}\right)^2 \leq 1. \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq a^2 + 10a + 20, \\ 5x^2 + 5y^2 - 2ax + 4ay \leq 5 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 \leq a^2 + 10a + 25, \\ x^2 - 2x \cdot \frac{a}{5} + \frac{a^2}{25} + y^2 + 2x \cdot \frac{2a}{5} + \frac{4a^2}{25} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq (a+5)^2, \\ \left(x - \frac{a}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{2a}{5}\right)^2 \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

В системе координат xOy неравенства задают круги, один из которых при $a = -5$ вырождается в точку. Чтобы система имела хотя бы одно решение расстояние между центрами кругов должно быть не больше суммы их радиусов:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\left(1 - \frac{a}{5}\right)^2 + \left(-2 + \frac{2a}{5}\right)^2} \leq |a+5| + 1 \Leftrightarrow \sqrt{5\left(1 - \frac{a}{5}\right)^2} \leq |a+5| + 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot \left|1 - \frac{a}{5}\right| \leq |a+5| + 1. \sqrt{\left(1 - \frac{a}{5}\right)^2 + \left(-2 + \frac{2a}{5}\right)^2} \leq |a+5| + 1 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sqrt{5\left(1 - \frac{a}{5}\right)^2} \leq |a+5| + 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot \left|1 - \frac{a}{5}\right| \leq |a+5| + 1. \sqrt{\left(1 - \frac{a}{5}\right)^2 + \left(-2 + \frac{2a}{5}\right)^2} \leq |a+5| + 1 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sqrt{5\left(1 - \frac{a}{5}\right)^2} \leq |a+5| + 1 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot \left|1 - \frac{a}{5}\right| \leq |a+5| + 1.
\end{aligned}$$

Рассмотрим три случая раскрытия модулей. При $a \geq 5$ имеем:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{5} \cdot \left(-1 + \frac{a}{5}\right) \leq a+5+1 \Leftrightarrow -\sqrt{5} + \frac{a}{\sqrt{5}} \leq a+6 \Leftrightarrow a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right) \leq 6 + \sqrt{5} \Leftrightarrow a \geq \frac{6 + \sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}} - 1}. \sqrt{5} \cdot \left(-1 + \frac{a}{5}\right) \leq a+5+1 \Leftrightarrow -\sqrt{5} + \frac{a}{\sqrt{5}} \leq a+6 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right) \leq 6 + \sqrt{5} \Leftrightarrow a \geq \frac{6 + \sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}} - 1}.
\end{aligned}$$

При $a \geq 5$ это неравенство верно.

При $-5 \leq a < 5$ имеем:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{5} \cdot \left(1 - \frac{a}{5}\right) \leq a+5+1 \Leftrightarrow \sqrt{5} - \frac{a}{\sqrt{5}} \leq a+6 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right) \leq 6 - \sqrt{5} \Leftrightarrow a \geq \frac{\sqrt{5} - 6}{\frac{1}{\sqrt{5}} + 1} \Leftrightarrow a \geq \frac{11\sqrt{5} - 35}{4}. \sqrt{5} \cdot \left(1 - \frac{a}{5}\right) \leq a+5+1 \Leftrightarrow \sqrt{5} - \frac{a}{\sqrt{5}} \leq a+6 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right) \leq 6 - \sqrt{5} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow a \geq \frac{\sqrt{5} - 6}{\frac{1}{\sqrt{5}} + 1} \Leftrightarrow a \geq \frac{11\sqrt{5} - 35}{4}.
\end{aligned}$$

С учётом условия $-5 \leq a < 5$ получаем: $\frac{11\sqrt{5} - 35}{4} \leq a < 5$.

При $a < -5$ имеем:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{5} \cdot \left(1 - \frac{a}{5}\right) \leq -a-5+1 \Leftrightarrow \sqrt{5} - \frac{a}{\sqrt{5}} \leq -a-4 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow a \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \leq -4 - \sqrt{5} \Leftrightarrow a \leq -\frac{4 + \sqrt{5}}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}} \Leftrightarrow a \leq -\frac{9\sqrt{5} + 25}{4}. \sqrt{5} \cdot \left(1 - \frac{a}{5}\right) \leq -a-5+1 \Leftrightarrow \sqrt{5} - \frac{a}{\sqrt{5}} \leq -a-4 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow a \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \leq -4 - \sqrt{5} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow a \leq -\frac{4 + \sqrt{5}}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}} \Leftrightarrow a \leq -\frac{9\sqrt{5} + 25}{4}.
\end{aligned}$$

Все найденные a удовлетворяют условию $a < -5$.

Объединяя результаты получаем, что исходная система имеет хотя бы одно решение при $a \leq -\frac{9\sqrt{5} + 25}{4}$ или $a \geq \frac{11\sqrt{5} - 35}{4}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{9\sqrt{5} + 25}{4}\right] \cup \left[\frac{11\sqrt{5} - 35}{4}; +\infty\right)$.

№ 183.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Система не изменится, если поменять x и y местами. Следовательно, система имеет единственное решение, только если $x = y$. Получаем уравнение:

$$(a+2)x^2 + (2a-1)x + a - 1 = 0.$$

Это уравнение должно иметь единственный корень.

Если $a \neq -2$, то уравнение квадратное, значит, его дискриминант должен равняться нулю:

$$(2a-1)^2 - 4(a+2)(a-1) = 0 \Leftrightarrow -8a + 9 = 0, \text{ откуда } a = \frac{9}{8}.$$

При $a = \frac{9}{8}$ получаем $\frac{25}{8}x^2 + \frac{10}{8}x + \frac{1}{8} = 0$, откуда $x = -0,2$. Решением системы является пара $(-0,2; -0,2)$.

Если $a = -2$, получается линейное уравнение $5x + 3 = 0$, которое имеет единственное решение $x = -0,6$. Решением системы является пара $(-0,6; -0,6)$.

Покажем, что в этих случаях нет иных решений, где $x \neq y$. Вычтем второе уравнение системы из первого и разделим полученное уравнение почленно на $x - y \neq 0$:

$$-1 = (a+2)(x+y) + 2a.$$

При $a = -2$ получаем уравнение $-1 = 0 \cdot (x+y) - 4$. У этого уравнения решений нет.

При $a = \frac{9}{8}$ получаем $y = -\frac{26}{25} - x$. Подставим это выражение в первое уравнение системы:

$$-\frac{26}{25} - x = \frac{25}{8}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{8} \Leftrightarrow 25x^2 + 26x + \frac{233}{25} = 0.$$

Полученное уравнение не имеет корней.

Ответ: $-2; \frac{9}{8}$.

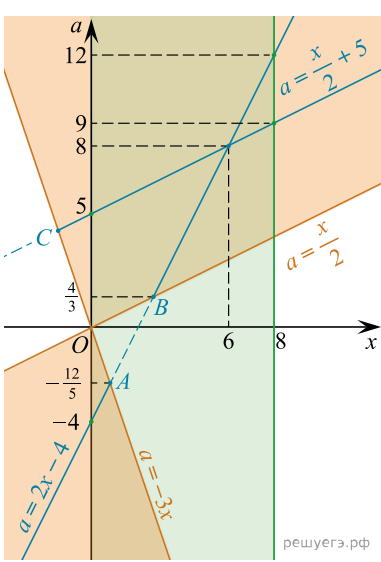
№ 184.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2a^2 + 5ax - 3x^2} = \sqrt{16x - x^2 + 4a^2 - 2a - 40} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + 5ax - 3x^2 = 16x - x^2 + 4a^2 - 2a - 40, \\ 2a^2 + 5ax - 3x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 5ax + 2x^2 - 2a + 16x - 40 = 0, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{5}{2}a - 8\right)x + (2a - 10) \cdot \left(\frac{a}{2} + 2\right) = 0, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{a}{2} + 2, \\ x = 2a - 10, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a^2 + 5ax - 3x^2 = 16x - x^2 + 4a^2 - 2a - 40, \\ 2a^2 + 5ax - 3x^2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 2x - 4, \\ a = \frac{x}{2} + 5, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 2a^2 - 5ax + 2x^2 - 2a + 16x - 40 = 0, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{a}{2} + 2, \\ x = 2a - 10, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - \left(\frac{5}{2}a - 8\right)x + (2a - 10) \cdot \left(\frac{a}{2} + 2\right) = 0, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 2x - 4, \\ a = \frac{x}{2} + 5, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 2a^2 + 5ax - 3x^2 = 16x - x^2 + 4a^2 - 2a - 40, \\ 2a^2 + 5ax - 3x^2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 2x - 4, \\ a = \frac{x}{2} + 5, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 2a^2 - 5ax + 2x^2 - 2a + 16x - 40 = 0, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{a}{2} + 2, \\ x = 2a - 10, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - \left(\frac{5}{2}a - 8\right)x + (2a - 10) \cdot \left(\frac{a}{2} + 2\right) = 0, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{a}{2} + 2, \\ x = 2a - 10, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2x - 4, \\ a = \frac{x}{2} + 5, \\ (a + 3x)(2a - x) \geq 0. \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Изобразим график полученной системы в системе координат xOa на отрезке $[0;8]$. Неравенство задаёт два вертикальных угла, ограниченных прямыми $a = -3x$ и $a = \frac{x}{2}$ (выделено оранжевым). Уравнения задают прямые, при этом решением системы являются только лучи этих прямых, лежащие в соответствующих вертикальных углах (выделено синим). Отрезок $[0;8]$ задаёт вертикальную полосу (выделено зелёным).



Найдём координаты точек A и B , решив системы уравнений. Для точки A :

$$\begin{cases} a = 2x - 4, \\ a = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{12}{5}, \\ x = \frac{4}{5}; \end{cases}$$

Для точки B :

$$\begin{cases} a = 2x - 4, \\ a = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3}, \\ x = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Найдём координаты точки пересечения прямых $a = 2x - 4$ и $a = \frac{x}{2} + 5$:

$$\begin{cases} a = 2x - 4, \\ a = \frac{x}{2} + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8, \\ x = 6. \end{cases}$$

Заметим, что прямая $a = 2x - 4$ проходит через точки $(0; -4)$ и $(8; 12)$, а прямая $a = \frac{x}{2} + 5$ — через точки $(0; 5)$ и $(8; 9)$.

Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень на отрезке $[0;8]$ при $-4 \leq a \leq -\frac{12}{5}$, $\frac{4}{3} \leq a < 5$, $a = 8$ и при $9 < a \leq 12$.

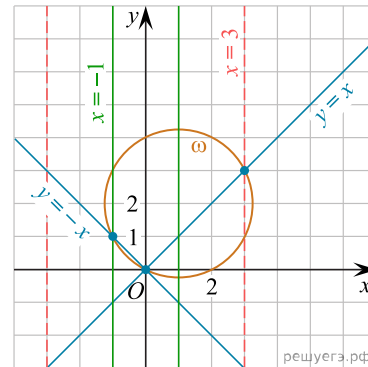
Ответ: $\left[-4; -\frac{12}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{3}; 5\right) \cup \{8\} \cup (9; 12]$.

№ 185.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем систему:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sqrt{a-y^2} = \sqrt{a-x^2}, \\ x^2+y^2=2x+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-y^2=a-x^2, \\ x^2-2x+y^2-4y=0, \\ a-x^2 \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0, \\ x^2-2x+1+y^2-4y+4=5, \\ x^2 \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)=0, \\ (x-1)^2+(y-2)^2=5, \\ -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}. \end{cases} \\ & \begin{cases} \sqrt{a-y^2} = \sqrt{a-x^2}, \\ x^2+y^2=2x+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-y^2=a-x^2, \\ x^2-2x+y^2-4y=0, \\ a-x^2 \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0, \\ x^2-2x+1+y^2-4y+4=5, \\ x^2 \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)=0, \\ (x-1)^2+(y-2)^2=5, \\ -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}. \end{cases} \end{aligned}$$



Графиком первого уравнения на плоскости xOy является объединение прямых $y=x$ и $y=-x$ (выделено синим). Графиком второго уравнения — окружность ω с центром в точке $(1; 2)$ радиусом $\sqrt{5}$ (выделена оранжевым). Неравенство $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ при отрицательных значениях параметра a не имеет решений, при $a=0$ задаёт прямую $x=0$, а при положительных значениях параметра a — вертикальную полосу ограниченную прямыми $x=-\sqrt{a}$ и $x=\sqrt{a}$.

Решением системы могут быть лишь пары чисел $(0; 0)$, $(-1; 1)$, $(3; 3)$. Система имеет ровно два решения, если ровно две точки пересечения прямых и окружности попадают в указанную полосу. Тогда

- при $a < 0$ система не имеет решений;
- при $0 \leq a < 1$ система имеет ровно одно решение;
- при $1 \leq a < 9$ **система имеет ровно два решения**;
- при $a \geq 9$ система имеет ровно три решения.

Ответ: $[1; 9)$.

№ 186.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. При $x \geq 0$, раскрывая модуль, получаем:

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 12x = 0 \Leftrightarrow a^2 - (x+6)a - 2x(x-6) = 0.$$

Полученное уравнение является квадратным относительно параметра, вычислим дискриминант уравнения:

$$D = x^2 + 12x + 36 + 8x(x - 6) = 9x^2 - 36x + 36 = (3x - 6)^2.$$

Тогда $a = \frac{x + 6 \pm (3x - 6)}{2}$, откуда $a = 2x$ или $a = 6 - x$, то есть $x = \frac{a}{2}$ или $x = 6 - a$. Поскольку $x \geq 0$, получаем: $0 \leq a \leq 6$.

Аналогично, снимая модуль при $x < 0$, получаем:

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a - 6x = 0 \Leftrightarrow a^2 - (x + 6)a - x(2x + 6) = 0.$$

Вычислим дискриминант уравнения:

$$D = (x + 6)^2 + 4x(2x + 6) = 9x^2 + 36x + 36 = (3x + 6)^2.$$

Тогда $a = \frac{x + 6 \pm (3x + 6)}{2}$, откуда $a = 2x + 6$ или $a = -x$, то есть $x = -a$ или $x = \frac{a - 6}{2}$. Поскольку $x < 0$, получаем: $0 < a < 6$.

Таким образом, при $0 < a < 6$ уравнение имеет 4 корня: $\frac{a}{2}$, $6 - a$, $-a$ и $\frac{a - 6}{2}$. Чтобы эти корни были различными, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} \frac{a}{2} \neq 6 - a, \\ -a \neq \frac{a - 6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 12 - 2a, \\ -2a \neq a - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 4, \\ a \neq 2 \end{cases}$$

Таким образом, $(0; 2) \cup (2; 4) \cup (4; 6)$.

Ответ: $(0; 2) \cup (2; 4) \cup (4; 6)$.

Примечание.

Искать корни квадратного уравнения удобно по теореме, обратной теореме Виета. Например, для уравнения

$$a^2 - (x + 6)a - 2x(x - 6) = 0$$

можно заметить, что сумма корней равна $x + 6$, а произведение равно $-2x(x - 6)$. Ясно, что это числа $a = 2x$ и $a = 6 - x$.

№ 187.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. ОДЗ уравнения: $x > 2$. Заметим, что

$$2 < x < 3 \Leftrightarrow 0 < x - 2 < 1 \Leftrightarrow \log_3(x - 2) < 0.$$

Пусть $\log_3(x - 2) = t$, тогда условие задачи будет выполнено тогда и только тогда, когда уравнение

$$(a - 1)t^2 - 2(a + 1)t + a - 3 = 0$$

будет иметь только отрицательные корни.

При $a = 1$ получаем $-4t - 2 = 0$, откуда $t = -\frac{1}{2}$. Значит, значение $a = 1$ подходит.

При $a \neq 1$ уравнение является квадратным, тогда условие задачи будут выполнены, если уравнение имеет корни, их сумма отрицательна, а произведение положительно. Найдем дискриминант уравнения и применим теорему Виета, получим систему соотношений:

$$\begin{cases} (a+1)^2 - (a-1)(a-3) \geq 0, \\ \frac{2(a+1)}{a-1} < 0, \\ \frac{a-3}{a-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-2 \geq 0, \\ -1 < a < 1, \\ \begin{cases} a > 3, \\ a < 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq a < 1.$$

Объединяя результаты двух рассмотренных случаев, получаем $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$.

Ответ: $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

№ 188.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a = -4$ и/или $a = -2$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-4; -2)$ множества значений a , возможно, с включением/исключением граничных точек	2
Верно найдено хотя бы одно из значений a : $a = -2$ или $a = 0$; ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

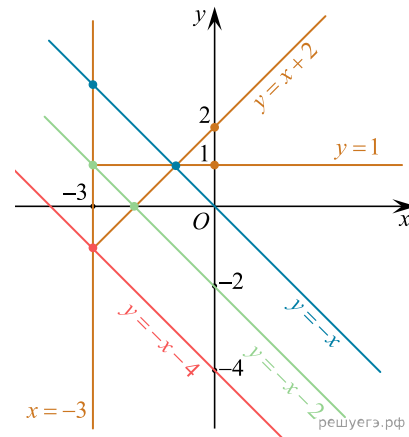
$$(y^2 - xy + x - 3y + 2)\sqrt{x+3} = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-x-2)\sqrt{x+3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2, \\ y = 1, \\ x = -3, \\ x \geq -3. \end{cases}$$

Исходная система имеет ровно два различных решения тогда и только тогда, когда графики функций $y = x + 2$ и $y = 1$ и прямая $x = -3$ имеют с прямой $y = -x + a$ две различных точки пересечения на области $x \geq -3$ (см. рис.).

Из рисунка видно, что

- при $a \leq -4$ система имеет одно решение;
- при $-4 < a \leq -2$ — **два решения**;
- при $-2 < a < 0$ — три решения;
- при $a = 0$ — **два решения**;
- при $a > 0$ — три решения.



Ответ: $-4 < a \leq -2$; $a = 0$.

Приведём другое (аналитическое) решение.

Запишем первое уравнение в виде $(y-1)(y-x-2)\sqrt{x+3} = 0$. Решения первого уравнения системы совпадают с решениями уравнений $y = 1$, $y = x + 2$ и $x = -3$ при условии $x \geq -3$.

При $x = -3$ уравнение $a - x - y = 0$ имеет единственное решение при любом значении a .

При $y = 1$ уравнение $a - x - y = 0$ принимает вид $a - x - 1 = 0$, откуда $x = a - 1$. С учётом условия $x \geq -3$ получаем, что при $a < -2$ решений нет, а при $a \geq -2$ имеется одно решение.

При $y = x + 2$ уравнение $a - x - y = 0$ принимает вид $a - x - x - 2 = 0$, откуда $x = \frac{a}{2} - 1$. С учётом условия $x \geq -3$ получаем, что при $a < -4$ решений нет, а при $a \geq -4$ имеет одно решение.

Определим значения a , при которых возможны совпадения решений из трёх разобранных выше случаев. Имеем: либо $x = -3$, $y = 1$, откуда $a = -2$; либо $x = -3$, $y = x + 2 = -1$, откуда $a = -4$; либо $y = 1$, $y = x + 2$, откуда $x = -1$, $a = 0$.

Таким образом, исходная система имеет единственное решение при $a \leq -4$, имеет два решения при $-4 < a \leq -2$ и $a = 0$, имеет три решения при $-2 < a < 0$ и $a > 0$.

Ответ: $-4 < a \leq -2$; $a = 0$.

№ 189.

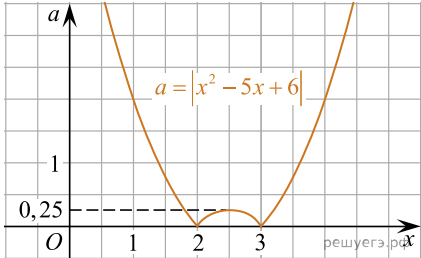
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано.	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной.	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Пусть $f(x) = |x - a| + |2x - a| + 4|x - 1| + 1$. Раскрывая модули по определению, на каждом из промежутков

раскрытия модулей для функции f получим выражение вида $f(x) = \pm(x-a) \pm (2x-a) \pm (4x-4) + 1$. Следовательно, на этих промежутках f является линейной функцией, причем на каждом из промежутков знак коэффициента при x после приведения подобных слагаемых совпадает со знаком при x в слагаемом $4x-4$ (коэффициент 4 при x «перевешивает» коэффициенты при x в остальных слагаемых). Таким образом, при $x > 1$ старший коэффициент в формулах, задающих функцию, положителен, а значит, функция f возрастает. При $x < 1$ старший коэффициент отрицателен, поэтому функция f убывает. Поэтому в силу непрерывности f ее значение при $x = 1$ является наименьшим из всех возможных. Найдем его:

$$\min_{(-\infty; +\infty)} f(x) = f(1) = |1-a| + |2-a| + 1.$$

Определим число корней уравнения $|x^2 - 5x + 6| = a$, в зависимости от параметра a . Графиком уравнения в плоскости xOa является парабола с отраженной нижней частью (см.рис.) Тем самым уравнение не имеет корней при $a < 0$, имеет два корня при $a = 0$ или $a > 0,25$, три корня — при $a = 0,25$, четыре корня — при $0 < a < 0,25$.



Искомые значения параметра a определим, рассмотрев четыре системы.

- $$\begin{cases} a < 0, \\ |1-a| + |2-a| + 1 = 0. \end{cases}$$
Эта система решений не имеет.
- $$\begin{cases} a = 0,25, \\ |1-a| + |2-a| + 1 = 3. \end{cases}$$
Эта система решений не имеет.
- $$\begin{cases} 0 < a < 0,25, \\ |1-a| + |2-a| + 1 = 4. \end{cases}$$
Эта система также не имеет решений.
- $$\begin{cases} \begin{cases} a = 0, \\ a > 0,25, \end{cases} \\ |1-a| + |2-a| + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 0, \\ a > 0,25, \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 2. \end{cases}$$

Таким образом, условие задачи выполняется при $1 \leq a \leq 2$.

Ответ: $[1; 2]$.

Примечание.

Рекомендуем сравнить эту задачу с чуть более простой [532960](#) и с задачей из ЕГЭ-2013 [503324](#) на ту же идею.

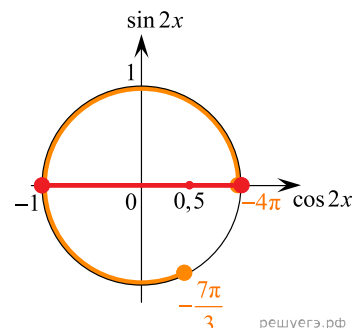
№ 190.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Заметим, что при любых значениях переменной x и параметра a знаменатель дроби в левой части неравенства положителен, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$a - (a^2 - 2a) \cos 2x + 2 < 3 - \cos 4x + a^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a - (a^2 - 2a) \cos 2x + 2 < 3 - 2 \cos^2 2x + 1 + a^2.$$

Для того чтобы множество решений неравенства содержало отрезок $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6}\right]$, удвоенный аргумент должен содержать отрезок $\left[-4\pi; -\frac{7\pi}{3}\right]$, а косинус двойного угла должен принимать все значения $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ (см. рис.).

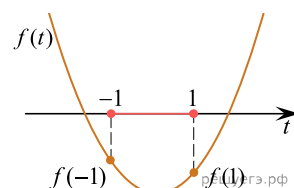


Пусть $\cos 2x = t$, тогда неравенство принимает вид

$$a - (a^2 - 2a)t + 2 < 3 - 2t^2 + 1 + a^2 \Leftrightarrow 2t^2 - (a^2 - 2a)t - a^2 + a - 2 < 0. \quad a - (a^2 - 2a)t + 2 < 3 - 2t^2 + 1 + a^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2t^2 - (a^2 - 2a)t - a^2 + a - 2 < 0.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = 2t^2 - (a^2 - 2a)t - a^2 + a - 2$.

Для того чтобы множество решений последнего неравенства содержало отрезок $[-1; 1]$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия $f(-1) < 0$ и $f(1) < 0$.



$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + a^2 - 2a - a^2 + a - 2 < 0, \\ 2 - a^2 + 2a - a^2 + a - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 2a^2 - 3a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < 0, \\ a > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}.$$

$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + a^2 - 2a - a^2 + a - 2 < 0, \\ 2 - a^2 + 2a - a^2 + a - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < 0, \\ a > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}.$$

Ответ: $a > \frac{3}{2}$.

№ 191.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да. Например, заплатив за блокнот 5 десятирублёвых монет и 3 двухрублёвые монеты (8 монет), а за ручку 1 десятирублёвую монету, 3 пятирублёвые и 2 двухрублёвые (6 монет).

б)Предположим, что Аня сделала покупки требуемым образом. За чашку чая она заплатила либо 1 десятирублёвую монету, либо 2 пятирублёвые, либо 5 двухрублёвых. За сырок Аня должна была заплатить хотя бы одну пятирублёвую монету, а набрать оставшиеся 10рублей можно одним из трёх указанных выше способов. Значит, за сырок она заплатила либо 2, либо 3, либо 6монет. Следовательно, за чай и сырок она заплатила либо 11 монет, либо не более 8 монет.

В первом случае она заплатила за пирожок 8 монет. Они не могли быть все двухрублёвые. Значит, среди них либо была десятирублёвая, либо по крайней мере две пятирублёвые монеты. Оставшиеся 10рублей нельзя набрать 6 или 7 монетами. Пришли к противоречию. Во втором случае она заплатила за пирожок не менее 11монет. Это также невозможно, поскольку тогда получилось бы менее 22рублей. Полученные противоречия показывают, что Аня не могла сделать указанные покупки требуемым образом.

в)Пусть Аня купила альбом за 85 рублей, потратив 24 монеты: k двухрублёвых, l пятирублёвых и m десятирублёвых. Тогда $2k + 5l + 10m = 85$ и $k + l + m = 24$. Отсюда получаем $k = 24 - l - m$, $48 - 2l - 2m + 10m = 85$ и $8m = 37 - 3l$. Значит, $37 - 3l$ равно 34, 28 и 22 соответственно и не делится на 8.

Пример $k = 15$, $l = 7$ и $m = 2$ показывает, что Аня могла заплатить ровно 7 пятирублёвых монет.

Ответ: а) да; б) нет; в) 7.

Приведём другое решение.

а)Допустим у нее было 5 монет по 2, 3 монеты по 5 и 6 монет по 10, итого 14. При этом $5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 10 = 29$ и $29 = 10 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2$.

б)У нее должна была быть минимум одна монета в 5 рублей, иначе сумму 15 не набрать. Остается набрать $10 + 15 - 5 = 20$ с помощью 18монет. Если среди них есть десятка, то общая сумма не меньше $17 \cdot 2 + 10 = 44$. Если есть две пятерки — общая сумма не меньше $16 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 42$. Если же десяток нет, а пятерок не более одной, то общая сумма не более $17 \cdot 2 + 5 = 39$.

в)Пусть было x пятирублевых, y двухрублевых и $24 - x - y$ десятирублевых. Тогда общая сумма была равна $5x + 2y + 10 \cdot (24 - x - y) = 85$, откуда следует, что x кратно 5.

Если $y = 0$, то получим $5x + 10 \cdot (24 - x) = 85$, $x = 31$, что невозможно.

Если $y = 5$, то получим $5x + 10 \cdot (19 - x) = 75$, $x = 23$, что невозможно, так как $x + y > 24$.

Если $y = 10$, то получим $5x + 10 \cdot (14 - x) = 65$, $x = 15$, что невозможно, так как $x + y > 24$.

Если $y = 15$, то получим $5x + 10 \cdot (9 - x) = 55$, $x = 7$.

Если $y = 20$, то получим $5x + 10 \cdot (4 - x) = 45$, $x = -1$, что невозможно.

Итак, единственный возможный случай — 7 монет по 5 рублей, 15 монет по 2 рубля и 2 монеты по 10 рублей.

Приведем еще одно решение пунктов б) и в) (Ирина Шраго).

б)На всю покупку потрачено 45руб. Покажем, что эту сумму невозможно заплатить 19 монетами по 2, 5 и 10 руб. Действительно, 10 руб. быть не может, поскольку $2 \text{ руб.} \cdot 18 = 36$, что больше $45 - 10 = 35$ руб. Пусть у Ани a двухрублевых и b пятирублевых монет. Тогда одновременно $2a + 5b = 45$ и $a + b = 19$, откуда $b = \frac{7}{3}$. Но число b — целое. В силу полученного противоречия требуемое невозможно.

в)Пусть у Ани a двухрублевых, b пятирублевых монет и c десятирублевых монет. Получаем систему: $2a + 5b + 10c = 85$ и $a + b + c = 24$. Вычитая из первого уравнения удвоенное второе, находим, что $3b + 8c = 37$, откуда $b = \frac{37 - 8c}{3}$ (*). Поскольку число b не меньше нуля, число c не больше 4.

Из равенства (*) видно, что наименьшему значению b соответствует наибольшее значение c . Для $c = 4$ число $b = \frac{5}{3}$, для $c = 3$ получаем $b = \frac{13}{3}$, эти случаи невозможны. что невозможно. При $c = 2$ находим: $b = 7$ и $a = 15$.

Таким образом, покупка стоит $2 \text{ руб.} \cdot 15 + 5 \text{ руб.} \cdot 7 + 10 \text{ руб.} \cdot 2 = 85 \text{ руб.}$, и наименьшее количество пятирублёвых монет равно 7.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Будем последовательно складывать числа, пока сумма не станет больше 110. Теперь удалим последнее добавленное число. Поскольку оно было не больше 11, сумма осталась больше $110 - 11 = 99$. Утверждение верно.

б) Рассмотрим 12 чисел, равных 10,1. Их сумма равна $121,2 > 110$. Если взять любые 11 из них, то сумма будет равна 111,1, то есть окажется больше 110, а если взять меньше 11 чисел, то сумма будет не больше $10 \cdot 10,1 = 101$. Следовательно, не из любого набора чисел можно выбрать несколько чисел, обладающих указанными свойствами.

в) Если среди чисел есть число, не большее 10, то можно поступить как в пункте а) — прибавлять к этому числу остальные, пока сумма не станет больше 110, а потом выкинуть изначальное число. Если же все числа больше 10, то возьмем любые 10 из них. Их сумма будет не более $11 \cdot 10 = 110$ и больше $10 \cdot 10 = 100$, что и требуется (очевидно, 10 чисел есть, иначе их общая сумма не сможет превысить 110)

Таким образом, утверждение верно.

Ответ: а) да, б) нет, в) да.

№ 193.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Очевидно при получении из числа x числа $10x+1$ мы просто приписываем в конец числа цифру 1, поэтому последовательность имеет вид 1, 11, 111, ...

а) Заметим, что a_{2022} состоит из 2022 единиц. Значит, во-первых, оно делится на 3, так как сумма его цифр, равная 2022, кратна трем, а во-вторых, — на 11, поскольку суммы цифр и на четных и на нечетных местах равны 1011. Тогда это число делится и на 33.

б) Все члены последовательности, кроме первого, дают остаток 3 при делении на 4, поскольку могут быть записаны в виде $100y+11$, где y — число из $n-2$ единиц. Первое слагаемое кратно 4, а второе дает остаток 3. Но квадрат не может давать такого остатка. В самом деле, пусть y^2 дает остаток 3 при делении на 4. Очевидно, y нечетно. Тогда

$$y^2 - 3 = y^2 - 1 - 2 = (y-1)(y+1) - 2.$$

Заметим, $(y-1)(y+1)$ — произведение двух четных чисел, поэтому кратно 4, а -2 не кратно 4. Итак, $y^2 - 3$ не кратно 4.

в) Заметим сразу, что $111111 = 7 \cdot 15873$, поэтому можно удалять из начала числа группы по 6 единиц — они все равно не окажут влияния на остаток от деления на 7. При этом

$$\begin{aligned} 1 &= 1, & 11 &= 7 + 4, & 111 &= 7 \cdot 15 + 6, \\ 1111 &= 7 \cdot 158 + 5, & 11111 &= 7 \cdot 1587 + 2, & 111111 &= 7 \cdot 15873 + 0. \\ 111111 &= 7 \cdot 15873 + 0. \end{aligned}$$

Поэтому все остатки, кроме остатка 3, будут получены уже для первых шести членов, а остаток 3 не будет получен никогда.

Ответ: а) да; б) нет; в) 0, 1, 2, 4, 5, 6.

№ 194.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно выполнены все 3 пункта: а), б) и в)	4
Выполнены все три пункта, однако в одном из пунктов ответ недостаточен обоснован или неверен вследствие арифметической ошибки	3
Верно выполнены пункты а) и б), либо верно выполнен пункт в)	2
Верно выполнен один из 2 пунктов: а) или б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да, может. Числа 2, 3, 4, 5 составляют арифметическую прогрессию, их сумма равна 14.

б) Пусть a — первый член, d — разность, n — число членов прогрессии, тогда их сумма равна $\frac{2a+d(n-1)}{2}n$. Чтобы количество членов было наибольшим, первый член и разность должны быть наименьшими. Пусть они равны 1, тогда по условию $\frac{n(n+1)}{2} < 900$. Наибольшее натуральное решение этого неравенства $n=41$. Такой результат получается при прогрессии $1+2+\dots+41=861$.

в) Для суммы членов арифметической прогрессии имеем:

$$\frac{2a+d(n-1)}{2}n = 123 \Leftrightarrow (2a+d(n-1))n = 2 \cdot 3 \cdot 41.$$

Таким образом, число членов прогрессии n является делителем числа 246. Если $n \geq 41$, то левая часть больше 246: $(2a+d(n-1))n \geq 42 \cdot 41 > 246$, следовательно, $n < 41$. Поскольку $n \geq 3$, получаем, что $n=3$ или $n=6$. Прогрессии из трёх и шести членов с суммой 123 существуют: например, 40, 41, 42 и 3, 10, 17, 24, 31, 38.

Приведем другое решение.

- а) $2 + 3 + 4 + 5 = 14$.
- б) $(2a_1 + (n - 1)d)n \leq 1800$. $43 \cdot 42 = 1806$, $42 \cdot 41 = 1722$. Поскольку $2a_1 + (n - 1)d \leq 2 + (n - 1) = n + 1$, число n не может быть равно 42 или быть больше. Число $n = 41$, $a = 1$, $d = 1$ удовлетворяет условию.
- в) $(2a_1 + (n - 1)d)n = 246$, $3 \leq n \leq 15$, $(n \geq 16 \Rightarrow 2a_1 + (n - 1)d \geq 17)$ — не удовлетворяет. $16 \cdot 15 = 240$, $246 = 1 \cdot 246 = 2 \cdot 123 = 3 \cdot 82 = 6 \cdot 41$.
- $3 \leq n \leq 15$, поэтому имеем $n = 3$, $2a_1 + (n - 1)d = 82$: $2a_1 + 2d = 82$, $a_1 + d = 41$: $41 - d$, 41 , $41 + d$ — много есть таких прогрессий. Имеем $n = 6$, $2a_1 + (n - 1)d = 41$: $2a_1 + 2d = 82$, $a_1 + 5d = 41$: $d = 7$, $a_1 = 3$: 3, 10, 17, 24, 31, 38 — есть такая прогрессия.

Ответ: а) да; б) 41; в) 3, 6.

№ 195.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а, б и в	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а и б, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах а и в	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте в, пункты а и б не решены	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Поскольку масса каждого пакета в килограммах делится на 3, в каждый рюкзак получится поместить только кратное 3 число килограммов пакетов с вещами. Значит, в рюкзаках можно поместить пакеты общей массой не более $3 \cdot 27 = 81$ кг. Суммарный вес всех пакетов равен 84 кг. Значит, разложить пакеты таким образом не получится.

б) Суммарный вес всех пакетов равен 77 кг, а в рюкзаки суммарно можно поместить 78 кг. Значит, если разложить пакеты требуемым образом по рюкзакам возможно, то в одном рюкзаке окажутся пакеты с суммарным весом 25 кг, а в двух других — с суммарным весом 26 кг. Пакеты с массами 17 и 20 кг окажутся при этом в разных рюкзаках. Однако и пакет массой 20 кг, и пакет массой 17 кг нельзя дополнить другими пакетами так, чтобы получился набор пакетов с общей массой 26 кг. Получили противоречие.

в) Суммарный вес всех пакетов равен 99 кг, а в рюкзаки суммарно можно поместить 4 m кг. Значит, $m \geq 25$. Если при $m = 25$ разложить пакеты требуемым образом по рюкзакам возможно, то в одном рюкзаке окажутся пакеты с суммарным весом 24 кг, а в трёх других — с суммарным весом 25 кг. Пакеты с массами 17 и 19 кг окажутся при этом в разных рюкзаках. Пакет массой 19 кг нельзя дополнить другими пакетами, чтобы получился набор пакетов с общей массой 25 кг, а чтобы получился такой набор с общей массой 24 кг — возможно, но только единственным образом — с помощью одного пакета массой 5 кг. В последнем случае пакет массой 17 кг нельзя дополнить оставшимися пакетами до набора, общая масса которого 25 кг. Получили противоречие.

Если $m = 26$, то разложить пакеты требуемым образом возможно. Например, можно положить в первый рюкзак пакеты массами 19 и 7 кг, во второй — массами 17 и 9 кг, в третий — массами 15 и 11 кг, в четвёртый — массами 13, 5 и 3 кг.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 26.

№ 196.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Выпишем для каждой цифры n соответствующую цифру n^* :

$0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 7, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 8, 5 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 2, 7 \rightarrow 9, 8 \rightarrow 6, 9 \rightarrow 3.$

Суммы чисел в каждой паре равны соответственно 0, 8, 6, 4, 12, 10, 8, 16, 14 и 12.

Отметим также, что при трехзначном b сумма n и n^* лежит в промежутке от 200 до 1998, поэтому n обязано быть трехзначным: для двузначных и однозначных n , $n^* \leq 99$, для четырехзначных и еще больших чисел n , $n^* \geq 1000$.

а) Ясно, что сумма последних цифр n и n^* равна 12. Заменим последние цифры этих чисел на 0, от этого сумма уменьшится на 12 и станет равна 1280. Если же убрать нули, то сумма оставшихся двузначных чисел равна 128. Рассуждая аналогично, получаем, что сумма средних цифр изначальных чисел (или последних цифр новых, что то же самое) равна 8, а сумма первых 12. Выбор цифр для каждого из этих вариантов можно сделать двумя способами: $4 + 8$ и $9 + 3$ для 12, $1 + 7$ и $6 + 2$ для 8, что дает $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ вариантов ответа.

б) Аналогично пункту а) получаем, что сумма оставшихся после вычеркивания последних цифр двузначных чисел равна 93, что невозможно, поскольку ни сумму 3, ни сумму 13 организовать нельзя.

в) Аналогично пункту а) получаем, что $n + n^*$ всегда может быть записано в виде $100a + 10b + c$, где

$$a, b, c \in \{0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}.$$

Значит, половина этого числа всегда может быть записана в виде $100a_1 + 10b_1 + c_1$, где

$$a_1 = \frac{1}{2}a, \quad b_1 = \frac{1}{2}b, \quad c_1 = \frac{1}{2}c,$$

где $a_1, b_1, c_1 \in \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Итак, вопрос сводится к такому— сколько трехзначных чисел можно составить из указанных цифр. На первое место можно взять любую из семи цифр (кроме нуля), а на остальные— любую из восьми, что дает $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$ вариантов. Всего трехзначных чисел 900, для 448 из них уравнение $n + n^* = 2b$ имеет решения, значит, для 452 чисел решений не будет.

Ответ: а) 8; б) нет; в) 452.

№ 197.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Пусть в школе №1 писали тест два учащихся, один из них набрал 1 балл, а второй набрал 3 балла и перешёл в школу № 2. Тогда средний балл в школе № 1 уменьшился в 2 раза.

б) Пусть в школе № 2 писали тест m учащихся, средний балл равнялся B , а перешедший в неё учащийся набрал u баллов. Тогда получаем:

$$u = 0,98(m+1)B - mB; 50u = (49 - m)B.$$

Если $B = 9$, то $(49 - m)B$ не делится на 50, а $50u$ делится на 50. Но это невозможно, поскольку $50u = (49 - m)B$.

в) Пусть в школе № 1 средний балл равнялся A . Тогда получаем:

$$u = (50 - m)A - 0,98(49 - m)A; 50u = (99 - m)A = (49 - m)B.$$

Заметим, что если $B=1$ или $B=3$, то $50u = (49 - m)B$ не делится на 50. Если $B=5$, то $m = 9, m=19, m=29$ и $m=39$. Тогда соответственно получаем: $90A = 200, 80A = 150, 70A = 100, 60A=50$. Ни один из этих случаев не возможен. Если $B=2$ или $B=4$, то $m=24$. В первом случае $75A=50$, а во втором $75A=100$. Значит, ни один из этих случаев не возможен.

При $B=6$ и $m=24$ получаем $u=3$ и $A=2$. Этот случай реализуется, например, если в школе №1 писали тест 26 учащихся, 13 из них набрали по 1 баллу, а 13 — по 3 балла, в школе №2 писали тест 24 учащихся и каждый набрал по 6 баллов, а у перешедшего из одной школы в другую учащегося 3 балла.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Пусть в первом взводе k солдат, во втором l солдат. Тогда числа k и l имеют общий делитель, больший 8, и при этом

$$\begin{cases} 47 \leq k < l, \\ k + l \leq 110. \end{cases}$$

а) Например, 50 и 60 солдат. Вместе 110, их можно построить в колонну по 10 человек в ряду так, что 5 рядов будет заполнено солдатами только из первого взвода, а 6 рядов — только из второго.

б) Предположим, что общий делитель 13. Тогда, учитывая, что $47 \leq k < 55$, получаем, что $k=52$. Наименьшее возможное значение l равно $52 + 13 = 65$, но вместе получается 117 человек, что противоречит условию.

в) Число $l - k$ больше нуля и делится на общий делитель чисел k и l , поэтому $l - k \geq 9$; $k - l \leq -9$, что вместе с условием $k + l \leq 110$ приводит к неравенству $2k \leq 101$, то есть $k \leq 50$. При этом $k + d \leq l \leq 110 - k$, где d — наименьший общий делитель, превосходящий 8.

Если $k = 47$, то $d = 47$, $47 + 47 = 94 \leq 110 - 47 = 63$. Противоречие.

Если $k = 48$, то $d = 12$, $l = 60$, а в роте 108 солдат.

Если $k = 49$, то $98 \leq l \leq 110 - 49 = 61$. Противоречие.

Если $k = 50$, то $d = 10$, $l = 60$, а в роте 110 солдат.

Ответ: а) например, 50 и 60; б) нет; в) 108 и 110.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Обозначим (Ж, З, К) упорядоченную тройку чисел, характеризующую состояние мешка на данный момент, т.е. количество жёлтых, зелёных и красных шаров в мешке. Изначально мешок находится в состоянии (1, 1, 2).

Если в первый раз из мешка вынимают жёлтый и зелёный шар и заменяют их красным шаром, то мешок переходит в состояние (0, 0, 3), когда все шары в мешке — красные. Если в первый раз из мешка вынимают зелёный и красный шар и заменяют их жёлтым шаром, то мешок переходит в состояние (2, 0, 1). Дальнейшие переходы из одного состояния в другое определяются однозначно и описываются цепочкой: (2, 0, 1) → (1, 1, 0) → (0, 0, 1). Видим, что в мешке остался красный шар. Аналогично, если в первый раз из мешка вынимают жёлтый и красный шар и заменяют их зелёным шаром, то мешок переходит в состояние (0, 2, 1). Дальнейшие переходы из одного состояния в другое определяются однозначно и описываются цепочкой: (0, 2, 1) → (1, 1, 0) → (0, 0, 1).

Видим, что в мешке снова остался красный шар. Таким образом, в любом случае оставшиеся в мешке шары (или шар) будут красными.

б) Легко видеть, что в мешке могут остаться зелёные шары: (3, 4, 5) → (4, 3, 4) → (3, 4, 3) → (2, 5, 2) → (1, 6, 1).

Докажем, что в любом случае оставшиеся в мешке шары будут зелёными. Каждый раз общее количество шаров в мешке уменьшается на 1, поэтому процесс завершится не более чем за 11 шагов. В начальном состоянии количество жёлтых и красных шаров нечётно, а количество зелёных шаров — чётно. Поскольку за один ход (выемку и замену шаров) количество шаров каждого цвета изменяется на 1, количества жёлтых и красных шаров всегда будут одной чётности, а количество зелёных шаров — противоположной чётности. Поэтому, никогда нельзя получить состояние, в котором количество зелёных и количество красных шаров оба будут нулевыми, также, как никогда нельзя получить состояние, в котором количество зелёных и количество жёлтых шаров будут нулевыми. Следовательно, в любом случае в конце мы получим состояние, в котором все оставшиеся в мешке шары будут зелёными.

в) Обозначим $f(C) = Ж - З$, где Ж и З — количества жёлтых и зелёных шаров в данном состоянии $C = (Ж, З, К)$. Предположим, что из состояния С за один шаг мы перешли в состояние $C = (Ж, З, К)$

Докажем, что $f(C)$ и $f(C)$ дают одинаковые остатки при делении на 3. Для этого покажем, что разность $\Delta f = f(C) - f(C)$ делится на 3. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. $Ж = Ж - 1, З = З - 1, К = К + 2. \Delta f = f(C) - f(C) = (Ж - 3) - (Ж - 3) = 0.$

Случай 2. $Ж = Ж - 1, З = З + 2, К = К - 1. \Delta f = f(C) - f(C) = (Ж - 3) - (Ж - 3) = -3.$

Случай 3. $Ж = Ж + 2, З = З - 1, К = К - 1. \Delta f = f(C) - f(C) = (Ж - 3) - (Ж - 3) = 3.$

Видим, что $f(C)$ и $f(C)$ дают одинаковые остатки при делении на 3.

Для начального состояния $C_0(3, 4, 5)$ находим: $f(C_0) = Ж - З = 3 - 4 = -1.$

Общее количество шаров в мешке остаётся неизменным, поскольку каждый раз два вынутых шара заменяются двумя шарами другого цвета. Если бы в конце в мешке все шары оказались бы одного цвета, то конечным состоянием было бы одно из трёх состояний (12, 0, 0), (0, 12, 0) или (0, 0, 12).

В любом случае $f(C_n)$ будет делиться на 3, и, значит, $f(C_0)$ и $f(C_n)$ дают разные остатки при делении на 3. Следовательно, применяя указанную процедуру, добиться того, чтобы в мешке оказались шары одного цвета, нельзя.

Ответ: а) красный; б) зелёный; в) нельзя.

№ 200.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Да, например, 10 раз по 11 и 40 раз по 1.

б) Нет. Заметим, что число дает тот же остаток от деления на 3, что и его сумма цифр. Поэтому сумма всех этих чисел будет давать остаток от деления на 3 такой же, как и просто сумма восьмидесяти единиц, то есть 2, а 150 кратно трем. Противоречие.

в) Ясно, что использовать слагаемые большие чем 111 нельзя, а само число 111 можно, но только один раз. Если оно использовано, то нужно набрать ещё 39, это делается использованием числа 11 от 0 до 3 раз и, соответственно, требует 42, 33, 24, 15 единиц.

Если число не использовано, то можно использовать 11 от 0 до 13 раз. Каждое новое использование 11 вместо двух единиц увеличивает сумму на 9, поэтому должно сопровождаться выкидыванием девяти единиц. Следовательно, можно взять также 150, 141, ..., 33 единицы. Общий ответ: числа 150, 141, ..., 15 (прогрессия с разностью 9).

Ответ: а) да; б) нет; в) 150, 141, 132, 123, 114, 105, 96, 87, 78, 69, 60, 51, 42, 33, 24, 15.