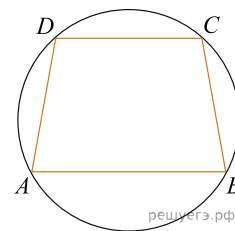


Вариант 276

ID: 14033

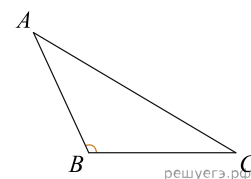
№ 1.

Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.



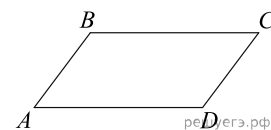
№ 2.

В треугольнике ABC угол B — тупой, $AB=5$, $BC=6$. Найдите величину угла, противолежащего стороне AC , если площадь треугольника равна 7,5. Ответ дайте в градусах.



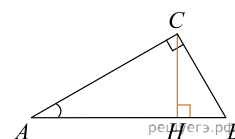
№ 3.

Площадь параллелограмма равна 40, две его стороны равны 5 и 10. Найдите большую высоту этого параллелограмма.



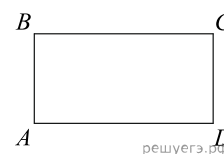
№ 4.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 7, $BH = 24$. Найдите $\cos A$.



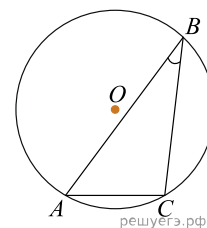
№ 5.

Площадь прямоугольника равна 18. Найдите его большую сторону, если она на 3 больше меньшей стороны.



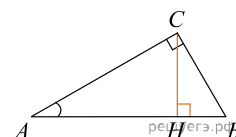
№ 6.

Найдите хорду, на которую опирается угол 30° , вписанный в окружность радиуса 3.



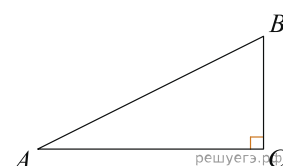
№ 7.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 20, $BC = 25$. Найдите $\sin A$.



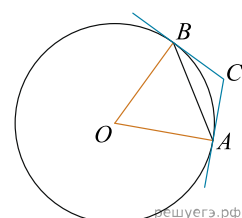
№ 8.

Площадь прямоугольного треугольника равна 24. Один из его катетов на 2 больше другого. Найдите меньший катет.



№ 9.

Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Угол CAB равен 32° . Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

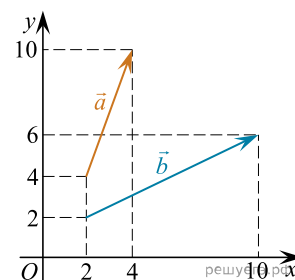


№ 10.

В ромбе $ABCD$ угол ABC равен 122° ; . Найдите угол ACD . Ответ дайте в градусах.

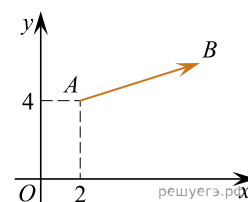
№ 11.

Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



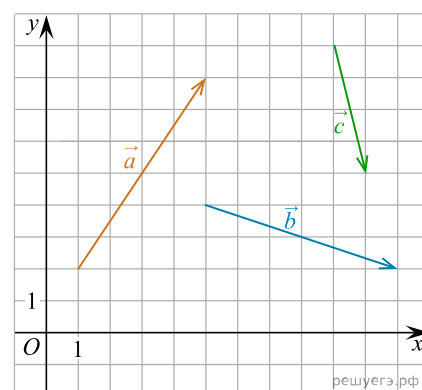
№ 12.

Вектор $\vec{AB}$ с началом в точке $A(2; 4)$ имеет координаты $(6; 2)$. Найдите ординату точки B .



№ 13.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

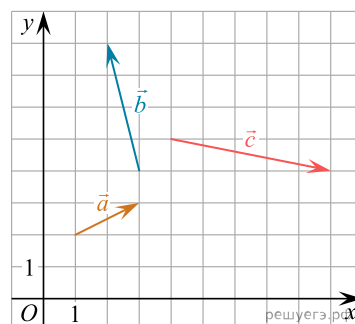


№ 14.

Даны векторы $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; -6)$ и $\vec{c} = (4; -3)$. Найдите значение выражения $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

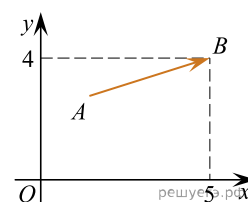
№ 15.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значение выражения $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



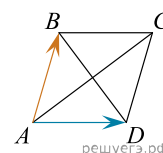
№ 16.

Вектор $\vec{AB}$ концом в точке $B(5;4)$ имеет координаты $(3;1)$. Найдите сумму координат точки A .



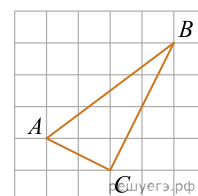
№ 17.

Диагонали изображенного на рисунке ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.



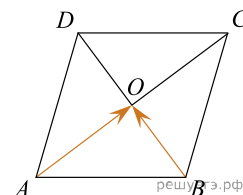
№ 18.

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен треугольник ABC . Найдите скалярное произведение $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



№ 19.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AO} - \vec{BO}$.

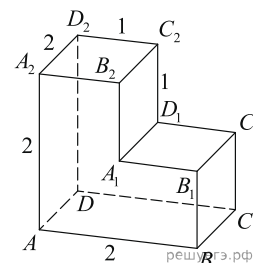


№ 20.

Даны векторы $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (2; -4)$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $7\vec{a} - \vec{b}$.

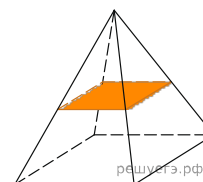
№ 21.

На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите тангенс угла $B_2A_2C_2$.



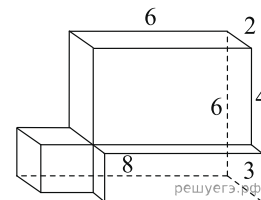
№ 22.

В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



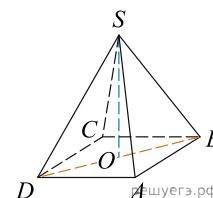
№ 23.

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



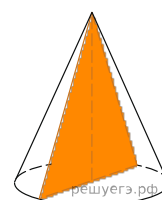
№ 24.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SD = 10$, $SO = 6$. Найдите длину отрезка AC .



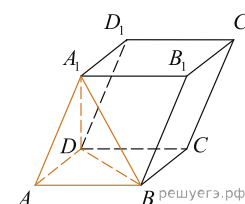
№ 25.

Высота конуса равна 8, а длина образующей — 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



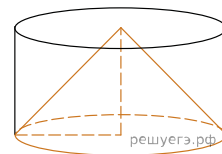
№ 26.

Найдите объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если объем треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 3.



№ 27.

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

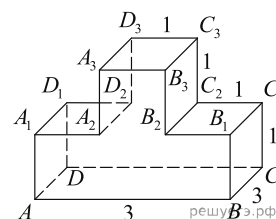


№ 28.

В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

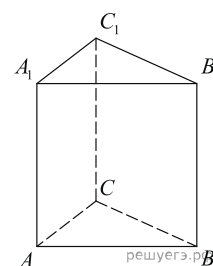
No 29.

На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите тангенс угла $C_2C_3B_2$.



№ 30.

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.



Nº 31.

Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов— первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

№ 32.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

№ 33.

За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки не будут сидеть рядом.

№ 34.

Игральную кость бросают два раза. Найдите вероятность того, что выпавшие значения совпадают. Ответ округлите до сотых.

№ 35.

В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по теме «Неравенства». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопроса по теме «Неравенства».

№ 36.

Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

№ 37.

В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные— жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

№ 38.

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 190 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

№ 39.

Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

№ 40.

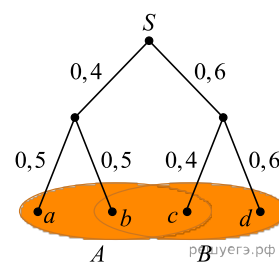
Из множества натуральных чисел от 10 до 19 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

№ 41.

Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало 3 очка.

№ 42.

На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a , b и c , а событию B благоприятствуют элементарные события b , c и d . Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность события A при условии B .

**№ 43.**

Линия подсветки состоит из 4 ламп. Каждая лампа работает независимо от других, и вероятность её перегорания в течение года равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение года первая и третья лампы перегорят, а вторая и четвёртая не перегорят.

№ 44.

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

№ 45.

Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства— яйца высшей категории, а из второго хозяйства— 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

№ 46.

Правильный игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма выпавших при всех бросках очков не стала больше чем 2. Известно, что общая сумма очков оказалась равна 3. Какова вероятность того, что было сделано ровно два броска? Ответ округлите до сотых.

№ 47.

Чтобы забросить шесть мячей в корзину на тренировке, баскетболисту потребовалось 10 бросков. Считая, что вероятность попадания в корзину при каждом броске одна и та же, найдите вероятность того, что при первых четырёх бросках баскетболист попал в корзину не более одного раза. Результат округлите до тысячных.

№ 48.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 5 и 6 встречаются по три раза. В остальных кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 5 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

№ 49.

Стрелок стреляет по 4 одинаковым мишеням по одному разу, вероятность промаха 0,2, найдите вероятность что он попадёт в первую мишень, а в 3 оставшиеся промахнется.

№ 50.

Игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось ровно два броска? Ответ округлите до тысячных.

№ 51.

Игральный кубик бросают до тех пор, пока шестерка не выпадет два раза, не обязательно подряд. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сделанных бросков».

№ 52.

Сколько раз нужно в среднем бросить кубик, чтобы на нём выпала шестёрка?

№ 53.

Сколько раз в среднем нужно бросить монету, чтобы на ней выпал орёл?

№ 54.

При выборочном обследовании жителей города Н. шесть из 12 респондентов ответили «Да» на вопрос, посещали ли они городской парк за последние полгода. Найдите интервальную оценку доли горожан, посещавших городской парк за полгода, пользуясь правилом «частота плюс-минус 2 стандартных отклонения». В ответ запишите нижнюю границу доверительного интервала. *Ответ округлите до десятых.*

№ 55.

Монету подбрасывают 6 раз. Найдите математическое ожидание количества выпавших орлов.

№ 56.

Симметричную монету бросают до тех пор, пока решка и орёл не выпадут хотя бы по одному разу. Найдите математическое ожидание случайной величины «число сделанных бросков».

№ 57.

Найдите дисперсию случайной величины x , если её распределение вероятностей имеет вид

Значение x	20	30	70
Вероятность, %	40	50	10

№ 58.

Сторона квадратной керамической плитки равна 30 см, а стандартное отклонение равно 0,6 мм. При помощи неравенства Чебышева найдите верхнюю оценку вероятности события «сторона случайно выбранной керамической плитки отличается от средней более чем на 0,75 мм».

№ 59.

Случайная выборка из некоторой генеральной совокупности содержит пять значений:

1,4, 1,2, 1,3, 1,4 и 1,2.

По этой выборке найдите несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

№ 60.

Средняя масса упаковки наполнителя для игрушек равна 1500 г, а стандартное отклонение равно 40 г. При помощи неравенства Чебышева найдите верхнюю оценку вероятности события «масса наполнителя в случайно выбранной упаковке отклоняется от средней более чем на 100 г».

№ 61.

Найдите корень уравнения $\log_8 2^{8x-4} = 4$.

№ 62.

Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{15-4x}} = 0,2$.

№ 63.

Решите уравнение $6^{x+1} - 6^x = 180$.

№ 64.

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{6-2x} = 36$.

№ 65.

Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{6}{4x-54}} = \frac{1}{7}$.

№ 66.

Решите уравнение $x^2 + 9 = (x+9)^2$.

№ 67.

Решите уравнение $2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$.

№ 68.

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{10-3x} = 32$.

№ 69.

Решите уравнение $(x-6)^2 = -24x$.

№ 70.

Найдите корень уравнения $\frac{9}{x^2 - 16} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

№ 71.

Найдите значение выражения $\log_5 60 - \log_5 12$.

№ 72.

Найдите $\frac{a}{b}$, если $\frac{2a+5b}{5a+2b} = 1$.

№ 73.

Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{13} + \sqrt{7})^2}{10 + \sqrt{91}}$.

№ 74.

Найдите значение выражения $\frac{9ax - (-7xy)}{4yx}$.

№ 75.

Найдите значение выражения $\frac{51 \cos 4^\circ}{\sin 86^\circ} + 8$.

№ 76.

Найдите $\frac{10 \cos \alpha + 4 \sin \alpha + 15}{2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha + 3}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2,5$.

№ 77.

Найдите значение выражения $3p(a) - 6a + 7$, если $p(a) = 2a - 3$.

№ 78.

Найдите значение выражения $4\frac{4}{9} : \frac{4}{9}$.

№ 79.

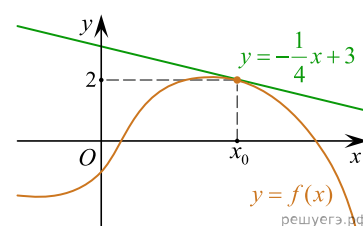
Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[3]{a} \sqrt[8]{a}}{a^{\frac{6}{\sqrt[6]{a}}}}$ при $a = 1,25$.

№ 80.

Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{3}a)^2 \sqrt[5]{a^3}}{a^{2,6}}$ при $a > 0$.

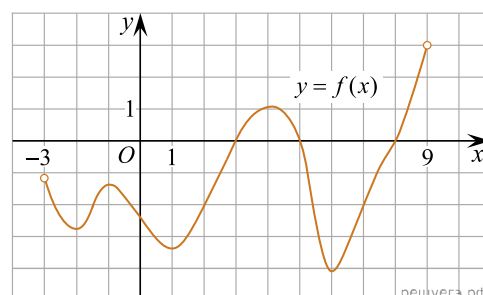
№ 81.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение функции $g(x) = f'(x) - f(x) + 3$ в точке x_0 .



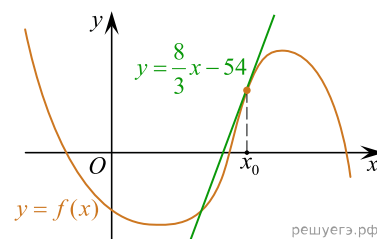
№ 82.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



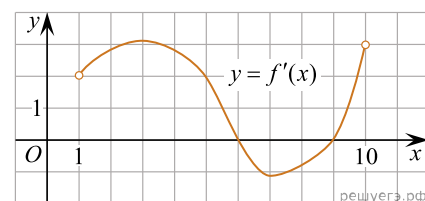
№ 83.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение функции $g(x) = (f'(x) - 0,5) \cdot 6$ в точке x_0 .



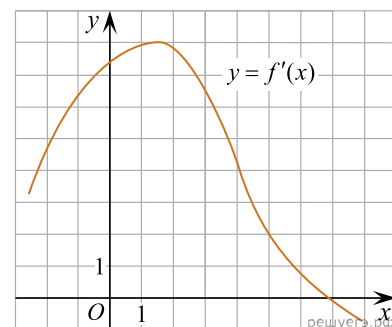
№ 84.

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(1; 10)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



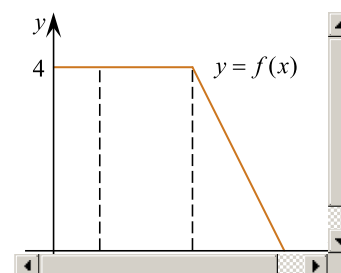
№ 85.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней.



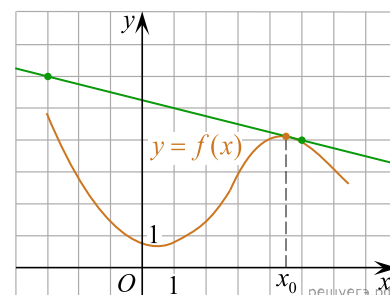
№ 86.

На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int_1^5 f(x) dx$.



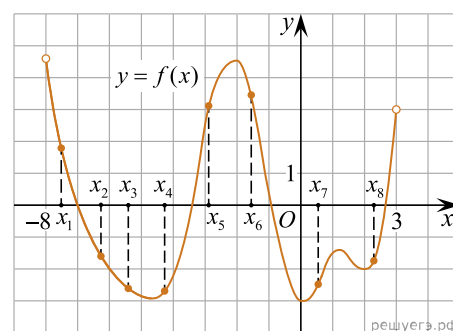
№ 87.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



№ 88.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. Сколько из отмеченных точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ принадлежат промежуткам убывания функции?



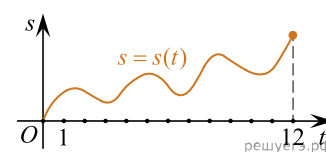
№ 89.

Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

№ 90.

Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s .

Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



№ 91.

Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трех метров?

№ 92.

Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полета мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 20$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 4 м на расстоянии 1 м?

№ 93.

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 4$ — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{100}$ м/мин² и $b = -\frac{2}{5}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

№ 94.

Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 5,75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 6900 Дж.

№ 95.

На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ — постоянная, r — радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м³ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 336000 Н? Ответ выразите в метрах.

№ 96.

Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па)— давление газа, V — объем газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в 25 раз объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 5 раз?

№ 97.

Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па)— давление газа, V — объем газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в два раза объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

№ 98.

Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле $A = FS \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

№ 99.

К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, дается формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 50 В? Ответ выразите в омах.

№ 100.

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 1,25 \cdot 10^8$ Па·м⁴, где p — давление газа (в Па), V — объём газа (в м³), $k = \frac{4}{3}$. Найдите, какой объём V (в м³) будет занимать газ при давлении p , равном $2 \cdot 10^5$ Па.

№ 101.

Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 75 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что за час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 6 часов позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

№ 102.

Расстояние между пристанями A и B равно 120 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B , тотчас повернула обратно и возвратилась в A . К этому времени плот прошел 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

№ 103.

Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

№ 104.

Между пристанями A и B по озеру курсировал старый катер. Потом его заменили катером на подводных крыльях, скорость которого на 15 км/ч больше. Поэтому время в пути от A до B сократилось на 36 минут. Найдите скорость старого катера, если расстояние между пристанями равно 40 км. Ответ дайте в км/ч.

№ 105.

Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

№ 106.

Из двух городов, расстояние между которыми равно 560 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 65 км/ч и 75 км/ч?

№ 107.

Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

№ 108.

Расстояние между городами A и B равно 150км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A , автомобиль прибыл в B . Найдите расстояние от A до C . Ответ дайте в километрах.

№ 109.

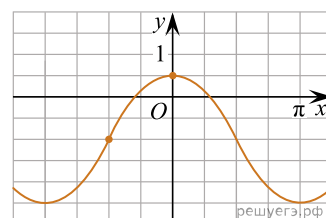
Имеется два сплава. Первый содержит 15% никеля, второй— 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 140кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

№ 110.

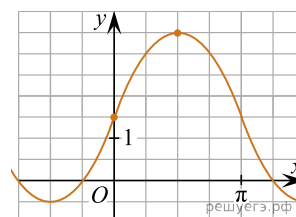
Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 13км/ч, а вторую половину пути— со скоростью 78км/ч, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 48 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

№ 111.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите a .

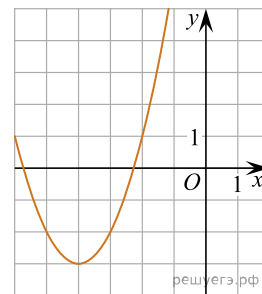
**№ 112.**

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .



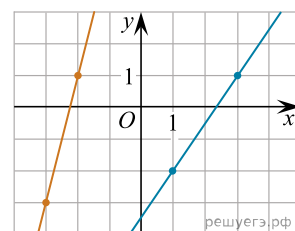
№ 113.

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите $f(-12)$.



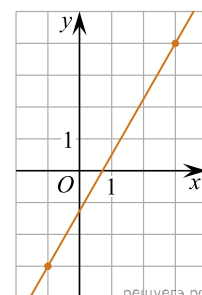
№ 114.

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



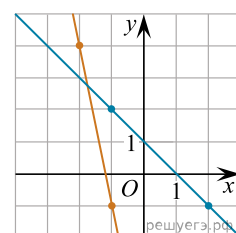
№ 115.

На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -13,5$.



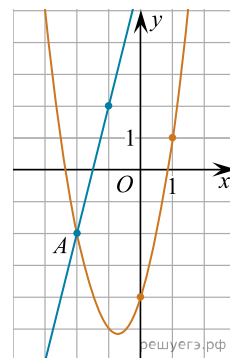
№ 116.

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



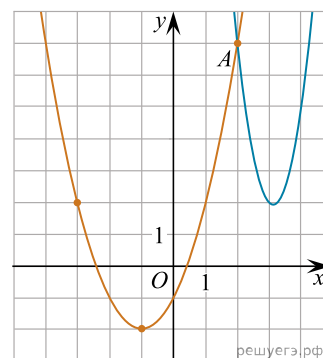
№ 117.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx + d$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



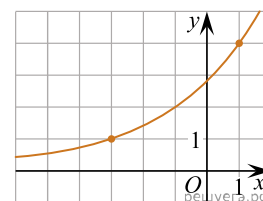
№ 118.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



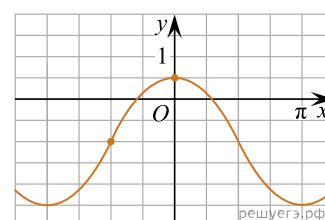
№ 119.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите $f(-7)$.



№ 120.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите b .



№ 121.

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 150 тыс. руб.;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году будет равен 185,9 тыс. руб. Какую сумму (в тыс. руб.) планируется взять в кредит?

№ 122.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на срок 10 лет. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r , если известно, что последний платёж будет не менее 0,819 млн рублей.

№ 123.

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 700 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- платёж в 2027 и 2028 годах должен быть по 400 тыс. рублей;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита. Ответ дайте в рублях.

№ 124.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 200 000 рублей. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r , если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 130 000 рублей, а второй год — 150 000 рублей.

№ 125.

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году составит 590,4 тысяч рублей. Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

№ 126.

В 2026 году был открыт вклад на сумму 120 миллионов рублей, срок — 3 года. В конце каждого года банк увеличивает размер вклада на 15%. Кроме того, в начале каждого года, начиная со второго, вклад пополняется на 10 миллионов рублей. Определите сумму, которая будет находится на вкладе к концу третьего года размещения денежных средств. Ответ дайте в миллионах рублей.

№ 127.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в млн руб-лей)	S	$0,8S$	$0,6S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

№ 128.

В 2026 году был открыт вклад на 3 года некоторую сумму под 20% годовых. Определите изначальную величину вклада (в тысячах рублей), если известно, что в начале второго и третьего года вклад пополнялся на 10 тысяч рублей, а в конце третьего года сумма на вкладе составила 173,28 тысяч рублей.

№ 129.

В январе 2020 года Борис взял кредит в банке на сумму 4 200 000 рублей. По договору с банком Борис должен был погасить долг двумя равными платежами в феврале 2021 года и феврале 2022 года, при условии, что в январе 2021 года и январе 2022 года сумма оставшегося долга увеличивается на 10%. В феврале 2021 года Борис сделал первую выплату в соответствии с договором. После этого ему удалось договориться с банком о рефинансировании кредита и уменьшить процент, на который сумма долга вырастет в январе 2022 года, до 7%. Сколько рублей сэкономит Борис на рефинансировании своего кредита?

№ 130.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 27 млн рублей?

№ 131.

- а) Решите уравнение $\sin 6\pi x - \cos 3\pi x = \sqrt{2} \cos \left(3\pi x - \frac{\pi}{4} \right) - 1$.
- б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[1 - \sqrt{2}; \sqrt{2} - 1]$.
-

№ 132.

- а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$.
-

№ 133.

- а) Решите уравнение $\sqrt{\sin x - \cos x} (\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

№ 134.

Дано уравнение $2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3$.

- а) Решите данное уравнение.
б) Укажите корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.
-

№ 135.

- а) Решите уравнение $\frac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x \cos x - 1} = 1$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
-

№ 136.

- а) Решите уравнение $\sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{9\sin^2 3x - 24\sin 3x + 16} = -4$.
б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
-

№ 137.

- а) Решите уравнение $2\sin x + \sqrt{2}\operatorname{tg} x = 0$.
б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.
-

№ 138.

- а) Решите уравнение $2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos x$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-6\pi; -5\pi]$.
-

№ 139.

- а) Решите уравнение: $\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{2}\sin^4 \frac{x}{2} - \sqrt{2}\cos^4 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}$.
б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

№ 140.

- а) Решите уравнение $4\sin^2\left(x + \frac{7\pi}{8}\right) + \sqrt{2}\sin 2x = 1$.
- б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.
-

№ 141.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания 16 на ребрах AC и A_1C_1 выбраны соответственно точки M и K так, что $AM:MC = 11:5$, $A_1K:KC_1 = 3:5$, точка N — середина BC .

- а) Докажите, что точка B_1 лежит в плоскости KMN .
- б) Найдите высоту призмы, если известно, что она равна расстоянию от точки C_1 до плоскости KMN .
-

№ 142.

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2.

- а) Докажите, что точки B и S равноудалены от плоскости ADM , где M — середина ребра SC .
- б) Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM .
-

№ 143.

Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD=5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M:MD_1 = 1:4$, точка K — середина DD_1 .

- а) Докажите, что плоскость MCK делит отрезок BB_1 пополам.
- б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle ADC = 60^\circ$, а $\angle MKC = 90^\circ$.
-

№ 144.

В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, сторона которого равна 8, а угол при вершине A равен 60° . Известно, что $SA = 15$, $SC = \sqrt{33}$ и, кроме того, $SB = SD$.

- а) Докажите, что SC — высота пирамиды.
- б) Найдите угол между плоскостью ASC и ребром SB .

№ 145.

Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- а) Докажите, что P — середина BQ .
 - б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если $SD = 9$.
-

№ 146.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка K является серединой ребра SD , а точка L — серединой стороны BC основания $ABCD$. Плоскость AKL пересекает ребро SC в точке N .

- а) Докажите, что $SN : NC = 2 : 1$.
 - б) Найдите угол между плоскостями AKL и ABC , если $AB = 10$, а высота пирамиды равна 20.
-

№ 147.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина бокового ребра AA_1 равна 2. Шар с центром в точке O касается всех граней этой призмы. Точки M , N и K — середины ребер AB , A_1B_1 и CC_1 соответственно, P — точка пересечения прямой NO с плоскостью основания ABC .

- а) Докажите, что прямые PK и MO параллельны.
 - б) Найдите расстояние от точки O до плоскости APK .
-

№ 148.

В правильном тетраэдре $ABCD$ все рёбра равны 6. На рёбрах AB и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $AM = AK = 4$.

- а) Докажите, что плоскость CMK делит тетраэдр $ABCD$ на два многогранника, объёмы которых относятся как 5 : 4.
 - б) Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью CMK .
-

№ 149.

На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : BM = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q — середины ребер DA и DC соответственно.

- а) Докажите, что P , Q , M и N лежат в одной плоскости.
- б) Найти отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

№ 150.

Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

а) Докажите, что высота пирамиды, проведенная к боковой грани, больше чем высота пирамиды, проведенная к основанию.

б) Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

№ 151.

Решите неравенство $\log_{7-x}(2x+3) \cdot \log_{2x+3}(3x^2) \leq \log_{7-x}(3x+4) \cdot \log_{3x+4}(10x+25)$.

№ 152.

Решите неравенство: $2^x + 6 \cdot 2^{-x} \leq 7$.

№ 153.

Решите неравенство $\frac{\log_3^2(3x) - 1}{\log_3(9x)} + \frac{1}{\log_3 x - 4} \leq 6$.

№ 154.

Решите неравенство: $\frac{0,2^{|x^2-4x+2|} - 0,04}{3-x} \leq 0$.

№ 155.

Решите неравенство: $\log_2 \frac{x^2 - x - 6}{x + 1} + \log_2(x^2 + 1) \leq \log_2 \left(x^3 - x^2 - 5x + \frac{4}{x + 1} - 3 \right)$.

№ 156.

Решите неравенство $\frac{2^{2x+1} - 96 \cdot 0,5^{2x+3} + 2}{x + 1} \leq 0$.

№ 157.

Решите неравенство $7^{\ln(x^2-2x)} \leq (2-x)^{\ln 7}$.

№ 158.

Решите неравенство: $\frac{(x-1)^2 + 4(x+1)^2}{2} \leq \frac{(3x+1)^2}{4}$.

№ 159.

Решите неравенство $\frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \leq \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2}$.

№ 160.

Решите неравенство: $\frac{2^{\log_2(x-3)} \cdot (\log_{0,2} x + 1)}{|x-4| \cdot \sqrt{6-x}} \geq 0$.

№ 161.

Эпицентр циклона, движущийся прямолинейно, во время первого измерения находился в 24км к северу и 5км к западу от метеостанции, а во время второго измерения находился в 20км к северу и $3\frac{1}{2}$ км к западу от метеостанции. Определите наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции.

№ 162.

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1кг алюминия или 0,1кг никеля. Во второй области рабочие объединены в две бригады, одна из которых добывает алюминий, а другая— никель, причем для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3кг алюминия приходится 1кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

№ 163.

На каждом из двух комбинатов изготавливают детали A и B . На первом комбинате работает 500 человек, и один рабочий изготавливает за смену 8 деталей A или 2 детали B . На втором комбинате работает 200 человек, и один рабочий изготавливает за смену 2 детали A или 8 деталей B . Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, на котором собирают изделие, для изготовления которого нужна 1 деталь A и 3 детали B . При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

№ 164.

На каждом из двух заводов работает по 100 человек. На первом заводе один рабочий изготавливает за смену 3 детали A или 1 деталь B . На втором заводе для изготовления t деталей (A и B) требуется t^2 человеко-смен. Оба завода поставляют детали на комбинат, где собирают изделие, причем для его изготовления нужна 1 деталь A и 3 детали B . При этом заводы договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

№ 165.

Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние? *Считайте, что перекресток не Т-образный, обе дороги продолжают за перекрестком.*

№ 166.

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,2 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

№ 167.

При подключении последовательного контура к источнику переменного тока амплитуда силы тока I (в амперах) в цепи зависит от циклической частоты ω (в рад/с) и выражается формулой:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

где $U=220\text{В}$ — амплитуда напряжения источника, $R=44\text{Ом}$ — активное сопротивление цепи, $L=0,2\text{Гн}$ — индуктивность катушки, а $C = 20 \text{ мкФ} = 20 \cdot 10^{-6}\text{Ф}$ — емкость конденсатора. Найдите наибольшую возможную силу тока (в амперах) в этой цепи.

№ 168.

В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1кг алюминия или 2кг никеля. Во второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2кг алюминия приходится 1кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

№ 169.

Паром грузоподъемностью 111 тонн перевозит микроавтобусы и грузовики при условии полной загрузки. Количество загруженных на паром микроавтобусов составляет не более 70% от количества загруженных на паром грузовиков. Вес и стоимость одного микроавтобуса составляют 5 тонн и 5 тысяч условных единиц, грузовика— 9 тонн и 4 тысячи условных единиц соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость всех микроавтобусов и грузовиков, перевозимых паромом при данных условиях.

№ 170.

Алексей вышел из дома на прогулку со скоростью u км/ч. После того, как он прошел 6км, из дома следом за ним выбежала собака Жучка, скорость которой была на 9км/ч больше скорости Алексея. Когда Жучка догнала хозяина, они повернули назад и вместе возвратились домой со скоростью 4км/ч. Найдите значение u , при котором время прогулки Алексея окажется наименьшим. Сколько при этом составит время его прогулки?

№ 171.

Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Известно, что $AC = 3MB$.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1 , если известно, что $AC = 10$.
-

№ 172.

Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .

- а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.
 - б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 32$. Найдите сторону AD .
-

№ 173.

На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки E и K соответственно. Известно, что $AE=3$, $EK = 2$, $AK = \sqrt{13}$.

- а) Докажите, что $CK = \frac{2}{3}BE$.
 - б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCK$.
-

№ 174.

Окружность, вписанная в ромб $ABCD$, касается сторон CD и BC в точках M и Q соответственно. Прямые AM и BC пересекаются в точке P .

- а) Докажите, что $BP \cdot BQ = BC^2$.
 - б) Найдите угол $\angle APC$, если $DM = 1$ и $MC = 4$.
-

№ 175.

В трапеции $ABCD$ с основанием AD диагонали пересекаются в точке O , $AD = 2BC$. Через вершину A проведена прямая параллельная диагонали BD , а через вершину D проведена прямая параллельная диагонали AC , и эти прямые пересекаются в точке E .

- а) Докажите, что $BO : AE = 1 : 2$.
- б) Прямые BE и CE пересекают сторону AD в точках M и N соответственно. Найдите MN , если $AD = 10$.

№ 176.

Окружность проходит через вершину C прямоугольника $ABCD$ и касается его сторон AB и AD в точках K и P соответственно. К хорде KP проведен перпендикуляр CH .

- а) Докажите, что треугольники CBK и CHP подобны.
 - б) Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $CH = 7$.
-

№ 177.

В треугольнике ABC на стороне BC отметили точку D так, что $AB = BD$. Биссектриса BF пересекает AD в точке E . Из точки C на прямую AD опущен перпендикуляр CK .

- а) Докажите, что $AB : BC = AE : EK$.
 - б) Найдите отношение площади ABE к площади $CDEF$, если $BD : DC = 5 : 2$.
-

№ 178.

Окружность проходит через вершины B и C прямоугольного треугольника ABC и пересекает катет AC в точке K , а гипотенузу AB — в точке M .

- а) Докажите, что треугольники AKM и ABC подобны.
 - б) Найдите площадь четырехугольника $CKMB$, если радиус окружности равен $\sqrt{29}$, катеты AC и BC равны 12 и 4 соответственно.
-

№ 179.

Две окружности касаются внешним образом в точке C . Прямая касается меньшей окружности в точке A , а большей — в точке B , отличной от A . Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке D , прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке E .

- а) Докажите, что прямая AE параллельна прямой BD .
 - б) Пусть L — отличная от D точка пересечения отрезка DE с большей окружностью. Найдите EL , если радиусы окружностей равны 2 и 5.
-

№ 180.

Две окружности пересекаются в точках A и K так, что их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK . Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB , касается одной окружности в точке A . Прямая, содержащая отрезок AC , касается другой окружности также в точке A .

- а) Докажите, что углы AKC и AKB равны.
- б) Найдите площадь треугольника ABC , если $BK = 1$, $CK = 4$, а тангенс угла CAB равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

№ 181.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(8 \sin^4 x)^5 = (4 \sin x + a)^5 + 5(4 \sin x + a) - 40 \sin^4 x$$

имеет хотя бы один корень.

№ 182.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

№ 183.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(y^4 + 3) = x + 3(1 - |y|), \\ |x| + |y| = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

№ 184.

Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$ имеет хотя бы одно решение.

№ 185.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(\operatorname{ctg} x + 3)^2 + 2a^3 + 3a^2 = (a^2 + 2a + 3)(\operatorname{ctg} x + 3)$$

имеет ровно 2 решения на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

№ 186.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$\frac{2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2)}{x^2 - 3x} = 0$$

имеет хотя бы один корень на промежутке $[0,5; 4]$.

№ 187.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \geq 0, \\ (y - a^2 - 3a + 18)^2 + (x - 6a)^2 = 3 \cdot |a|^{-\frac{a}{2}} \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

№ 188.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a|x + 8| + (2 - a)|x - 8| + 6 = 0$$

имеет ровно два различных решения.

№ 189.

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{|4x| - x - 3 - a}{x^2 - x - a} = 0$$

имеет ровно 2 различных решения.

№ 190.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 6y = 0, \\ 5x^2 - 16xy + 13y^2 - 6x + 10y + 2ax - 4ay + a^2 - 2a - 5 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

№ 191.

Возьмем три любые (не обязательно различные) цифры a, b, c , отличные от 0, и всевозможными перестановками составим шесть трехзначных чисел $\{\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}\}$. Сумму этих чисел обозначим $f(a, b, c)$.

- а) Может ли $f(a, b, c)$ равняться 1754 при каких-либо значениях a, b, c ?
 - б) Сколько существует различных значений $f(a, b, c)$?
 - в) Сколько трехзначных чисел $n = \overline{abc}$ совпадают со средним арифметическим чисел $\{\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}\}$?
-

№ 192.

Пусть $n > 1$ — натуральное число, p — его наибольший простой делитель, q — его наименьший простой делитель, $p \neq q$, $a = \frac{n}{q}$, $b = \frac{n}{p}$ и $m = a - b$.

- а) Может ли быть $m = 3$?
 - б) Может ли быть $m = 91$?
 - в) Найдите все числа n , которые делятся на m .
-

№ 193.

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21%.

- а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?
 - б) Может ли доля девочек составить 30%, если в этот класс придёт новая девочка?
 - в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?
-

№ 194.

На доске написано трёхзначное число A . Серёжа зачёркивает одну цифру и получает двузначное число B , затем Коля записывает число A и зачёркивает одну цифру (возможно ту же, что Серёжа) и получает число C .

- а) Может ли быть верным уравнение $A = B \cdot C$, если $A > 140$.
- б) Может ли быть верным уравнение $A = B \cdot C$, если $440 \leq A < 500$.
- в) Найдите наибольшее число A до 900 для которого выполняется $A = B \cdot C$.

№ 195.

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
 - б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 - в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?
-

№ 196.

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

- а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
 - б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
 - в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?
-

№ 197.

На доске написано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых четырех или семи чисел из записанных является целым числом.

- а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 567 и 1414?
 - б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом другого, если среди записанных на доске чисел есть число 567?
 - в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число n и его квадрат n^2 . Найдите наименьшее возможное значение n .
-

№ 198.

На столе лежит три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных цифр трехзначное число A . Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число B и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих трех карточек и составил из написанных на них цифр двузначное число C (возможно то же самое, что и Петя).

- а) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если $A < 150$?
- б) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если числа B и C делятся на 3?
- в) Найдите наибольшее число A , для которого может быть верным равенство $A = B + C$.

№ 199.

Шестизначное число, в десятичной записи которого присутствуют по одному разу цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, будем называть хорошим.

- а) Может ли хорошее число быть простым?
- б) Может ли хорошее число иметь натуральных 63 делителя?
- в) Может ли хорошее число делиться на 11?
- г) Сколько хороших чисел делится на 12?

№ 200.

В школе, где учатся Поля, Маня и Дуня, есть длинный коридор вдоль одной из стен которого расположен длинный ряд из n ячеек, занумерованных натуральными числами от 1 до n , закрывающихся на замки, в которых школьники могут хранить свои личные вещи. Однажды, придя в школу в выходной день, Поля обнаружила все ячейки открытыми. Она стала обходить ряд ячеек сначала до конца, закрывая на замок каждую вторую ячейку. Достигнув конца ряда, она развернулась и снова стала закрывать на замок каждую вторую ячейку из тех, которые еще были открыты. Таким образом, Поля продолжала обходить ряд и закрывать на замок ячейки до тех пор, пока осталась незакрытой одна ячейка.

Обозначим $f(n)$ номер последней открытой ячейки. Например, если количество ячеек $n = 15$, то $f(15) = 11$, как показано на рисунке.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
→	1	<u>2</u>	3	<u>4</u>	5	<u>6</u>	7	<u>8</u>	9	<u>10</u>	11	<u>12</u>	13	<u>14</u>	15	
	<u>1</u>		3		<u>5</u>		7		<u>9</u>		11		<u>13</u>		15	←
→			3				<u>7</u>				11				<u>15</u>	
			<u>3</u>								11					←

- а) Найдите $f(50)$.
Докажите, что:
- б) не существует натурального числа n , такого что $f(n) = 2013$;
- в) существует бесконечное множество натуральных чисел n , таких, что $f(n) = f(50)$.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27926	7
2	561168	150
3	27612	8
4	27343	0,28
5	27601	6
6	27858	3
7	27339	0,6
8	27618	6
9	27878	64
10	282851	29
11	27739	40
12	27725	6
13	649593	11
14	647124	28
15	649902	18
16	27729	5
17	27715	12
18	654451	5
19	27718	10
20	680501	15
21	245375	2
22	324450	0,25
23	77157	152
24	914	16
25	324455	48
26	77154	18
27	522972	6
28	505099	0,25
29	245379	3
30	245340	2
31	285922	0,16
32	282854	0,5
33	325913	0,75
34	639941	0,17
35	285927	0,6

36	621760	0,6
37	320193	0,46
38	283639	0,96
39	320195	0,006
40	320179	0,3
41	508754	0,2
42	509342	0,55
43	704176	0,0256
44	320203	0,38
45	320177	0,75
46	508795	0,24
47	663478	0,167
48	508893	0,9
49	630095	0,0064
50	508797	0,417
51	509441	12
52	704665	6
53	704664	2
54	663479	0,2
55	509399	3
56	509448	3
57	704651	200
58	509460	0,64
59	509479	0,01
60	509458	0,16
61	315120	2
62	77373	-2,5
63	676849	2
64	510401	4
65	26660	87
66	77370	-4
67	77379	-2
68	510382	5
69	77369	-6
70	77366	5
71	26848	1
72	26805	1
73	26750	2
74	26812	4

75	501598	59
76	26789	5
77	26818	-2
78	77391	10
79	77404	0,8
80	26836	3
81	525703	0,75
82	119971	5
83	525691	13
84	501188	9
85	40130	5
86	500890	12
87	510384	-0,25
88	516374	4
89	27485	0,5
90	501059	6
91	27957	1,2
92	28003	30
93	27960	20
94	27997	6
95	27968	2
96	42849	0,5
97	27992	2
98	28006	60
99	27979	5
100	526010	125
101	26580	10
102	99602	22
103	99596	20
104	680570	25
105	99577	60
106	99588	4
107	99579	8
108	99594	90
109	526011	70
110	26579	52
111	509123	1,5
112	509287	2
113	564646	61

114	509213	-11
115	508903	-7
116	509241	2,75
117	642371	2,5
118	509253	7
119	509101	0,25
120	509130	-1
121	672873	400
122	517203	17
123	630129	953500
124	517574	25
125	697032	1190,4
126	704682	207,23
127	526017	29
128	704684	85
129	561179	66000
130	517569	9

№ 131.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, тогда:

$$\begin{aligned}
 & 2\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \cos^2 x + 1 = 2\cos^3 x \Leftrightarrow 2\cos^3 x - \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\cos^2 x + \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 2\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \cos^2 x + 1 = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2\cos^3 x - \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\cos^2 x + \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 2\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \cos^2 x + 1 = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2\cos^3 x - \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\cos^2 x + \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad 2\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \cos^2 x + 1 = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2\cos^3 x - \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\cos^2 x + \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

б) Отберем корни уравнения на заданном отрезке. Имеем:

$$-\frac{7\pi}{2} \leq 2\pi k \leq -2\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{4} \leq k \leq -1 \Leftrightarrow_{k \in \mathbb{Z}} k = -1.$$

Единственным корнем, принадлежащим заданному отрезку, является число -2π .

Ответ: а) $\{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$; б) -2π .

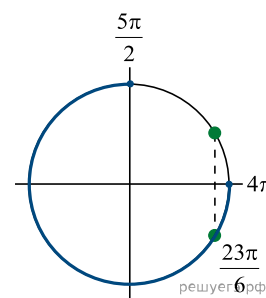
№ 132.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Имеем:

$$2(2\cos^2 x - 1) + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности (см.рис.) отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$. Получим точку $\frac{23\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{23\pi}{6}$.

№ 133.

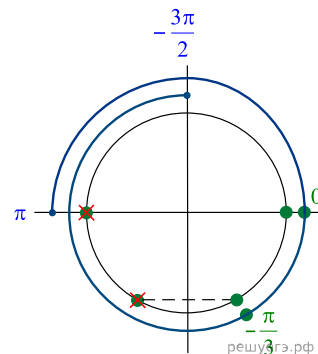
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) При условии $\cos x \geq 0$ исходное уравнение равносильно следующим:

$$\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + 1 = \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + 1 = 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0, \Leftrightarrow 2\sin x \left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Условию $\cos x \geq 0$ удовлетворяет только $x = 2\pi k, x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

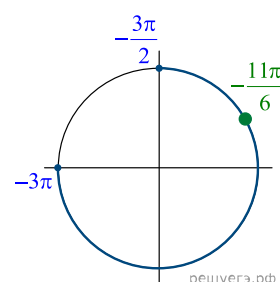
б) Отберем корни при помощи единичной окружности, подходят $-\frac{\pi}{3}$ и 0.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{\pi}{3}; 0$.

№ 134.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Используя формулу приведения $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ и формулу косинуса двойного угла $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, получаем:



$$2\cos 2x - 12\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - 2\sin^2 x) + 12\sin x - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x - 12\sin x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad 2\cos 2x - 12\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad 2 \cos 2x - 12 \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - 2\sin^2 x) + 12\sin x - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x - 12\sin x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни при помощи тригонометрической окружности (см. рис.). Получим число $-\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

№ 135.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Решим уравнение:

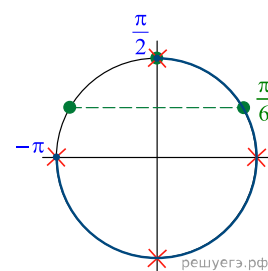
$$\frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\operatorname{tg} x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = 1, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\operatorname{tg} x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = 1, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни на промежутке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрической окружности (см. рис.). Получим число $\frac{\pi}{6}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{\pi}{6}$.

№ 136.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом существует. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 4\sin^2 x + 12\cos x - 9 = 0, \\ -2\operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(1 - \cos^2 x) + 12\cos x - 9 = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x - 12\cos x + 5 = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{5}{2} \end{cases} \mid_{|\cos x| \leq 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \begin{cases} 4\sin^2 x + 12\cos x - 9 = 0, \\ -2\operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(1 - \cos^2 x) + 12\cos x - 9 = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x - 12\cos x + 5 = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{5}{2} \end{cases} \mid_{|\cos x| \leq 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \mid_{|\cos x| \leq 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \begin{cases} 4\sin^2 x + 12\cos x - 9 = 0, \\ -2\operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 4(1 - \cos^2 x) + 12\cos x - 9 = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x - 12\cos x + 5 = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{5}{2} \end{cases} \mid_{|\cos x| \leq 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

б) Отберем корни, принадлежащие заданному отрезку, с помощью двойного неравенства:

$$-3\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq -\pi \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq n \leq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow n = -1.$$

Найденному значению параметра соответствует корень $-\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$.

№ 137.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Заметим, что уравнение $AB = A$ расщепляется на два уравнения: $A = 0$ или $B = 1$. Для данного уравнения получаем: $\operatorname{tg} x = 0$ или $\sin^2 x = 1$. Последнее уравнение дает посторонние корни, поскольку если $\sin x = \pm 1$, то $\cos x = 0$, а для таких x тангенс не определен. Итак,

$$\operatorname{tg} x \cdot \sin^2 x = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни, решая двойное неравенство:

$$-\frac{2\pi}{7} \leq \pi k \leq \frac{13\pi}{11} \Leftrightarrow -\frac{2}{7} \leq k \leq \frac{13}{11} \Leftrightarrow_{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = 0, \\ k = 1. \end{cases}$$

При $k = 0$ получаем $x = 0$, при $k = 1$ получаем $x = \pi$.

Ответ: а) $\{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$; б) 0; π .

№ 138.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Заметим, что по формуле приведения

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right),$$

а потому правая часть равна нулю. Тогда уравнение принимает вид

$$2\sin^3 x - \sin^2 x \cdot \cos x - 13\sin x \cdot \cos^2 x - 6\cos^3 x = 0,$$

а значит, является полным однородным тригонометрическим уравнением третьей степени. Разделив обе части уравнения на $\cos^3 x$, получим кубическое уравнение относительно тангенса:

$$2\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 13\operatorname{tg} x - 6 = 0.$$

Обозначим $\operatorname{tg} x = t$ и решим его методом группировки:

$$2t^3 - t^2 - 13t - 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 + 4t^2 - 5t^2 - 10t - 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

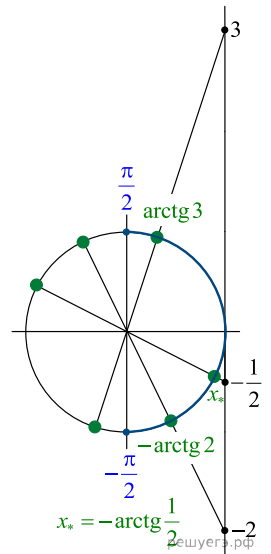
$$\Leftrightarrow 2t^2(t+2) - 5t(t+2) - 3(t+2) = 0 \Leftrightarrow (t+2)(2t^2 - 5t - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3, \\ t = -\frac{1}{2}, \\ t = -2. \end{cases} \Leftrightarrow 2t^2(t+2) - 5t(t+2) - 3(t+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t+2)(2t^2 - 5t - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3, \\ t = -\frac{1}{2}, \\ t = -2. \end{cases}$$

Итак, $\operatorname{tg} x = 3$, $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x = -2$, откуда $x = \arctg 3 + \pi k$, $x = -\arctg \frac{1}{2} + \pi k$, $x = -\arctg 2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ соответственно.

Отбор корней проведем на тригонометрической окружности (см. рис.). На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ лежат числа $-\arctg \frac{1}{2}$, $-\arctg 2$ и $\arctg 3$.

Ответ: а) $\left\{-\arctg \frac{1}{2} + \pi k, -\arctg 2 + \pi k, \arctg 3 + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\arctg \frac{1}{2}$, $-\arctg 2$, $\arctg 3$.



№ 139.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Уравнение определено при $\sin x \neq \pm \frac{3}{5}$. При таких значениях переменной числитель должен быть равным нулю. Используя формулу $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, получаем:

$$5\cos 2x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 10\cos^2 x - 3\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4}{5}, \\ \cos x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Если $\cos x = \frac{4}{5}$, то в силу основного тригонометрического тождества $\sin x = \pm \frac{3}{5}$, поэтому соответствующие значения переменной являются посторонними корнями. Уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$ дает решения $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Чтобы отобрать корни, рассмотрим каждую из серий отдельно. Имеем:

$$\frac{7\pi}{2} \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 5\pi \Leftrightarrow \frac{7}{4} + \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2\frac{1}{12} \leq k \leq 2\frac{5}{6}.$$

Полученное двойное неравенство не имеет целых решений. Рассмотрим вторую серию:

$$\begin{aligned} \frac{7\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 5\pi &\Leftrightarrow \frac{7}{4} - \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{5}{2} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1\frac{5}{12} \leq k \leq 2\frac{1}{6} \Leftrightarrow k = 2. \\ &\Leftrightarrow 1\frac{5}{12} \leq k \leq 2\frac{1}{6} \Leftrightarrow k = 2. \end{aligned}$$

Найденному значению параметра соответствует решение $\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{14\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{14\pi}{3}$.

№ 140.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Используем формулу косинуса двойного угла:

A unit circle diagram on a Cartesian coordinate system. The circle is centered at the origin. Four points are marked on the circle with green dots. Dashed green lines connect these points to the axes, indicating the corresponding angles. The angles are labeled as follows: $\frac{3\pi}{2}$ at the top (positive y-axis), $\frac{5\pi}{3}$ in the first quadrant, -3π on the left (negative x-axis), and $\frac{5\pi}{2}$ at the bottom (negative y-axis). The text 'решуегэ.рф' is visible in the bottom right corner of the image.

б) Отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$, при помощи тригонометрической окружности. Подходят: $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}$.

№ 141.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Стороны основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 16, поэтому

$$A_1K = 6,$$

$$KC_1 = 10,$$

$$AM = 11$$

$$MC = 5,$$

$$BN = NC = 8.$$

Продлим прямую KM до пересечения с прямой CC_1 в точке P . Прямая MC параллельна прямой KC_1 и $MC = \frac{1}{2}KC_1$. Отрезок MC — средняя линия треугольника KC_1P , следовательно, отрезки CC_1 и CP равны. Тогда прямая B_1P должна пересекать BC в середине, значит, точка N лежит на прямой B_1P , а потому лежит в плоскости KMN .

б) Пусть $AA_1 = x$, тогда высота пирамиды C_1KB_1P , проведенная из точки C , тоже равна x . Выразим объем пирамиды C_1KB_1P двумя способами:

$$V = \frac{1}{3} \cdot PC_1 \cdot S_{KC_1B_1} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot S_{KB_1P}.$$

Отрезок PC_1 равен $2x$. Используя теорему Пифагора и теорему косинусов, вычислим:

$$KB_1 = \sqrt{10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2}} = 14,$$

$$KP = \sqrt{4x^2 + 100},$$

$$B_1P = \sqrt{4x^2 + 256},$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos \angle B_1KP &= \frac{KB_1^2 + KP^2 - B_1P^2}{2KB_1 \cdot KP} = \frac{196 + 4x^2 + 100 - 4x^2 - 256}{2 \cdot 14 \cdot \sqrt{4x^2 + 100}} = \frac{5}{7\sqrt{x^2 + 25}}. \\ \cos \angle B_1KP &= \frac{KB_1^2 + KP^2 - B_1P^2}{2KB_1 \cdot KP} = \\ &= \frac{196 + 4x^2 + 100 - 4x^2 - 256}{2 \cdot 14 \cdot \sqrt{4x^2 + 100}} = \frac{5}{7\sqrt{x^2 + 25}}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\sin \angle B_1KP = \frac{\sqrt{49x^2 + 1200}}{7\sqrt{x^2 + 25}}.$$

Выразим площади треугольников KB_1P и KC_1B_1 :

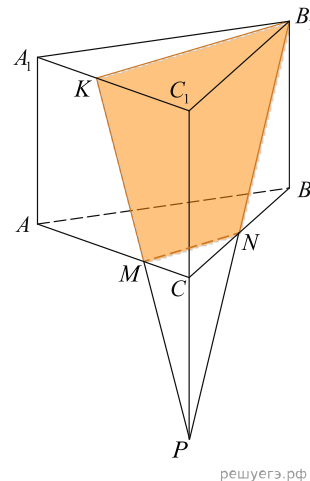
$$S_{KB_1P} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot \sqrt{4x^2 + 100} \cdot \frac{\sqrt{49x^2 + 1200}}{7\sqrt{x^2 + 25}} = 2\sqrt{49x^2 + 1200},$$

$$S_{KC_1B_1} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}.$$

Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot 40\sqrt{3} &= \frac{1}{3} x \sqrt{49x^2 + 1200} \cdot 2 \Leftrightarrow 49x^2 + 1200 = 4800 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3600}{49} \Leftrightarrow_{x>0} x = \frac{60}{7}. \\ \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot 40\sqrt{3} &= \frac{1}{3} x \sqrt{49x^2 + 1200} \cdot 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 49x^2 + 1200 &= 4800 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3600}{49} \Leftrightarrow_{x>0} x = \frac{60}{7}. \end{aligned}$$

Ответ: б) $\frac{60}{7}$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

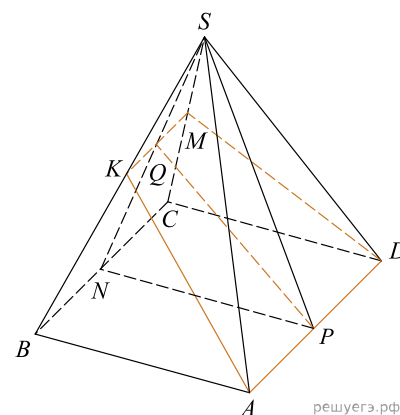
Решение. а) Прямая BC параллельна AD , значит, плоскость ADM проходит через среднюю линию KM треугольника SBC , K — середина ребра SB .

Построим сечение $ADMK$. Отрезок BS делится плоскостью этого сечения пополам, поэтому и расстояния от B и S до этой плоскости равны.

б) Пусть P — середина AD , N — середина BC . Рассмотрим сечение NSP :

$$SN = SP = \sqrt{SA^2 - AP^2} = \sqrt{5 - 1} = 2.$$

Значит, треугольник SNP равносторонний. Искомое расстояние равно расстоянию от N до PQ , где Q — середина SN , PQ — медиана и высота треугольника SNP . Поэтому искомое расстояние равно $NQ = \frac{1}{2}SN = 1$.



Ответ: 1.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

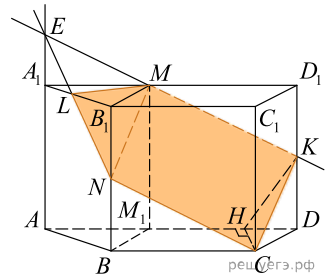
Решение. а) Пусть точка M_1 делит ребро AD в отношении $AM_1 : M_1D = 1 : 4$, тогда

$$BC = M_1D = MD_1 = B_1C_1 = 4$$

и многогранник $M_1BCDMB_1C_1D_1$ — параллелепипед. Пусть плоскость MCK пересекает ребро BB_1 в некоторой точке N . Противоположные грани параллелепипеда параллельны, поэтому параллельны прямые KM и CN , по которым эти грани пересечены плоскостью сечения. Отрезки KM и CN равны как отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями. Следовательно, прямоугольные треугольники CNB и MKD_1 равны по катету и гипотенузе: $BC = MD_1$ и $CN = MK$. Тогда

$$BN = KD_1 = \frac{DD_1}{2} = \frac{BB_1}{2},$$

а значит, точка N — середина ребра BB_1 . Это и требовалось доказать.



б) Построим сечение призмы плоскостью MKC . В плоскости ADD_1 продлим прямую MK до пересечения с прямой AA_1 . Точку их пересечения обозначим E . В плоскости ABB_1 точку пересечения прямой EN и ребра A_1B_1 обозначим L . Пятиугольник $CKMLN$ является искомым сечением.

Найдем длину боковой стороны трапеции $ABCD$:

$$CD = \frac{AD - BC}{2 \cos \widehat{ADC}} = \frac{5 - 4}{2 \cdot \cos 60^\circ} = 1.$$

Высота трапеции $CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, отрезок $HD = \frac{1}{2}$. Прямая CH перпендикулярна прямым AD и DD_1 , а потому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости высота CH трапеции $ABCD$ является перпендикуляром к плоскости ADD_1 . Прямая MK перпендикулярна наклонной CK по условию, тогда по теореме о трёх перпендикулярах проекция HK также перпендикулярна прямой MK . Получаем, что:

$$\angle HKD = 180^\circ - \angle HKM - \angle MKD_1 = 90^\circ - \angle MKD_1 = \angle KMD.$$

Тогда прямоугольные треугольники HKD и KMD подобны и

$$\frac{KD_1}{MD_1} = \frac{HD}{KD} \Rightarrow KD \cdot KD_1 = MD_1 \cdot HD \Rightarrow KD^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow KD = \sqrt{2}.$$

По теореме Пифагора для прямоугольных треугольников MKD_1 и CDK находим, что

$$MK = \sqrt{16 + 2} = 3\sqrt{2}, \quad CK = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}.$$

Прямоугольные треугольники MKD_1 и MEA_1 подобны по двум углам: углы KMD_1 и EMA_1 равны как вертикаль-

ные. Прямоугольные треугольники LNB_1 и LEA_1 также подобны. Из подобий получаем:

$$\frac{EL}{LN} = \frac{A_1E}{NB_1} = \frac{A_1E}{KD_1} = \frac{EM}{KM} = \frac{A_1M}{MD_1} = \frac{1}{4},$$

тогда $EM = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $LN = \frac{4}{5}EN$.

Заметим, что параллелограмм $CKMN$ является прямоугольником, и вычислим площадь сечения:

$$\begin{aligned} S_{CKMLN} &= S_{CKMN} + S_{MLN} = S_{CKMN} + \frac{4}{5} \cdot S_{EMN} = \\ &= CK \cdot KM + \frac{4}{5} \cdot \frac{EM \cdot NM}{2} = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{33\sqrt{6}}{10}. \quad S_{CKMLN} = S_{CKMN} + S_{MLN} = \\ &= S_{CKMN} + \frac{4}{5} \cdot S_{EMN} = CK \cdot KM + \frac{4}{5} \cdot \frac{EM \cdot NM}{2} = \\ &= \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{33\sqrt{6}}{10}. \end{aligned}$$

Ответ: б) $\frac{33\sqrt{6}}{10}$.

№ 144.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а)Заметим, что так как угол ромба при вершине A равен 60° , ромб составлен из двух равносторонних треугольников ABD и BCD . Тогда диагональ AC равна удвоенной высоте этих треугольников, то есть $AC = 8\sqrt{3}$.

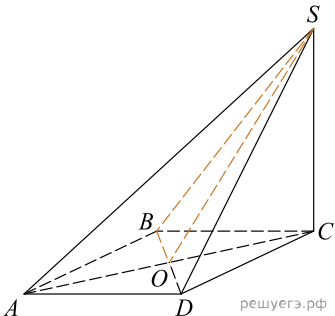
Заметим, что

$$AC^2 + SC^2 = (8\sqrt{3})^2 + (\sqrt{33})^2 = 225 = 15^2 = SA^2,$$

следовательно, треугольник SAC прямоугольный, а прямые SC и AC взаимно перпендикулярны.

Пусть O — центр ромба, тогда прямая SO перпендикулярна прямой BD как высота равнобедренного треугольника SBD . Кроме того, прямые AC и BD взаимно перпендикулярны как диагонали ромба. Следовательно, прямая BD перпендикулярна грани SAC . Поэтому прямые SC и BD взаимно перпендикулярны, а значит, прямая SC перпендикулярна основанию $ABCD$.

б)В п.а) доказано, что прямая BD перпендикулярна грани SAC , следовательно, проекцией прямой SB на



плоскость SAC является прямая SO и искомый угол равен углу BSO . Заметим, что:

$$BO = \frac{1}{2}BD = 4,$$

$$CO = \frac{1}{2}AC = 4\sqrt{3},$$

$$SO = \sqrt{CO^2 + SC^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (\sqrt{33})^2} = 9,$$

$$\operatorname{tg} \angle BSO = \frac{BO}{SO} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \angle BSO = \operatorname{arctg} \frac{4}{9}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{4}{9}$.

№ 145.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть боковое ребро пирамиды равно x . Тогда

$$\cos \angle ABS = \frac{AB}{2SB} = \frac{3\sqrt{2}}{2x},$$

$$\cos \angle CBS = \frac{BC}{2SB} = \frac{3}{x},$$

$$BP = AB \cdot \cos \angle ABS = \frac{(3\sqrt{2})^2}{2x} = \frac{9}{x},$$

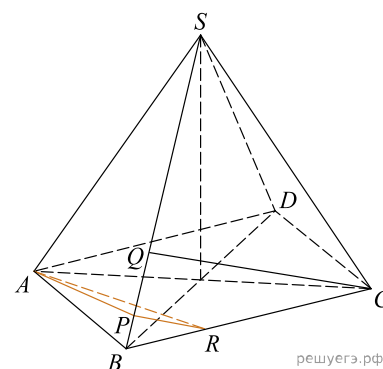
$$BQ = BC \cdot \cos \angle CBS = \frac{3 \cdot 6}{x} = \frac{18}{x}.$$

Следовательно, $BQ = 2BP$ и P — середина BQ .

б) В грани SBC проведём отрезок PR параллельно QC . Так как P — середина BQ , то R — середина BC . Кроме этого, угол APR является линейным углом угла между гранями SBA и SBC . Найдём площади граней SAB и SBC . Пусть h_{AB} и h_{BC} их высоты соответственно. Тогда

$$h_{AB} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{34}}{2},$$

$$h_{BC} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2},$$



решуегэ.рф

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}AB \cdot h_{AB} = \frac{9\sqrt{17}}{2}.$$

Далее имеем: $S_{SBC} = \frac{1}{2}BC \cdot h_{BC} = 18\sqrt{2}$, $AP = \frac{2S_{SAB}}{SB} = \sqrt{17}$,

$$PR = \frac{1}{2}CQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S_{SBC}}{SB} = 2\sqrt{2},$$

$$AR = \sqrt{AB^2 + BR^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}.$$

Напишем теорему косинусов для треугольника APR :

$$AR^2 = AP^2 + PR^2 - 2AP \cdot PR \cdot \cos \angle APR \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27 = 17 + 8 - 2\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{2} \cos \angle APR \Leftrightarrow \cos \angle APR = -\frac{1}{2\sqrt{34}}.$$

Таким образом, искомый угол равен $\arccos \frac{1}{2\sqrt{34}}$.

Ответ: б) $\arccos \frac{1}{2\sqrt{34}}$.

№ 146.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

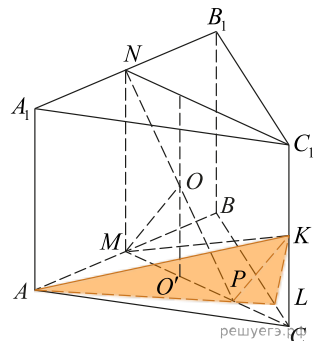
Решение. а) Пусть прямые AL и DC пересекаются в точке M , тогда точка M лежит также и на прямой KN . Заметим, что треугольники ABL и MCL равны, следовательно, $CM = AB = CD$. Запишем теорему Менелая для треугольника SCD и прямой KM :

$$\frac{DK}{KS} \cdot \frac{SN}{NC} \cdot \frac{CM}{MD} = 1 \Leftrightarrow \frac{SN}{ND} = \frac{CM + CD}{CM} = \frac{2}{1}.$$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть L — точка пересечения прямой AP с ребром BC , O — проекция точки O на плоскость основания ABC , AKL — сечение призмы. Заметим, что прямые MN , OO_1 и CC_1 — параллельны. Кроме того, $MN = CC_1 = 2OO_1 = 2CK$, следовательно, $OO_1 = CK$, $MO = OP = PC$. Таким образом, треугольники MOO_1 и PKC равны, значит, и углы OMO_1 и CPK . Следовательно, прямые PK и MO , лежащие в плоскости CMN , — параллельны.

б) По п. а) прямые MO и PK параллельны, поэтому расстояния от точек O и M до плоскости APK равны. Расстояние от точки M до плоскости APK равно H_M — высоте пирамиды $MAKP$, проведенной из точки M . Вычислим объем этой пирамиды, приняв треугольник MPA в качестве основания, а за вершину точку K . Высотой является отрезок KC , равный 1. Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , равен радиусу шара, вписанного в призму, следовательно,



$$MO' = O'P = PL = 1,$$

$$MP = 2,$$

$$ML = 3,$$

$$AC = 2\sqrt{3},$$

$$AM = \sqrt{3},$$

$$S_{AMP} = \sqrt{3},$$

$$V_{MAKP} = \frac{1}{3} S_{AMP} \cdot KC = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Вычислим стороны треугольника AKL :

$$PK = \sqrt{PL^2 + KL^2} = \sqrt{2},$$

$$AP = \sqrt{AM^2 + MP^2} = \sqrt{7},$$

$$AK = \sqrt{AC^2 + KC^2} = \sqrt{13}.$$

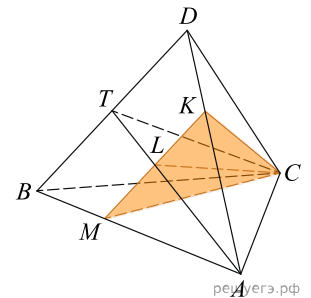
Площадь треугольника AKL вычислим по формуле Герона, получим: $S_{AKL} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Тогда

$$H_M = \frac{3V_{MAKP}}{S_{AKL}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Плоскость CMK делит тетраэдр $ABCD$ на четырёхугольную пирамиду $CBMKD$ с вершиной C и треугольную пирамиду $CMAK$ с той же вершиной. Основания этих пирамид лежат в плоскости ABD , поэтому высоты этих пирамид совпадают. Следовательно, объёмы этих пирамид относятся так же, как площади их оснований — четырёхугольника $BMKD$ и треугольника MAK . Из условия следует, что $\frac{AM}{MB} = \frac{AK}{KD} = \frac{2}{1}$, то есть прямые MK и BD параллельны, а треугольники MAK и BAD подобны с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$. Площади этих треугольников относятся как $\frac{4}{9}$. Треугольник BAD состоит из треугольника MAK и трапеции $BMKD$. Следовательно, площадь трапеции $BMKD$ составляет $\frac{5}{9}$ площади треугольника BAD , а площади трапеции $BMKD$ и треугольника MAK относятся как $5 : 4$. Таким образом, объёмы многогранников $CBMKD$ и $CMAK$ относятся как $5 : 4$.



б) Пусть точка T — середина отрезка BD , а точка L — точка пересечения прямых AT и MK , тогда отрезки AT и CT — высоты равносторонних треугольников ABD и CBD соответственно. Следовательно, плоскость ACT перпендикулярна прямой BD , а потому и прямой MK , лежащей в плоскости CMK . Таким образом, плоскости ACT и CMK перпендикулярны, поэтому искомый угол равен углу ACL . Из треугольника ACT последовательно находим:

$$AT = CT = BC \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3},$$

$$AL = \frac{AM}{AB} \cdot AT = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\cos \angle TAC = \frac{AC}{2AT} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

По теореме косинусов для треугольника ACL получаем:

$$\begin{aligned} CL &= \sqrt{AC^2 + AL^2 - 2AC \cdot AL \cdot \cos \angle LAC} = \\ &= \sqrt{36 + 12 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{48 - 24} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}. \quad CL = \sqrt{AC^2 + AL^2 - 2AC \cdot AL \cdot \cos \angle LAC} = \\ &= \sqrt{36 + 12 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \\ &= \sqrt{48 - 24} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\cos \angle ACL = \frac{AC^2 + CL^2 - AL^2}{2AC \cdot CL} = \frac{36 + 24 - 12}{2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{48}{24\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

№ 149.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

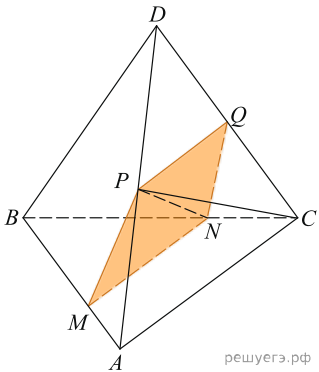
Решение. а) По теореме, обратной обобщенной теореме Фалеса, $MN \parallel PQ$, и потому точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Пусть объём $ABCD$ равен V . Пятигранник $APMNCQ$ состоит из четырёхугольной пирамиды $PACNM$ с основанием $ACNM$ и треугольной пирамиды $PQCN$ с основанием QCN . Выразим их объёмы через V .

Расстояние от P до BCD вдвое меньше расстояния от A до BCD , а площади треугольников QCN и BCD , по теореме об отношении площадей треугольников с равным углом, относятся как $1 : 6$. Значит, $V_{PQCN} = \frac{V}{12}$.

Площадь треугольника MBN составляет $\frac{4}{9}$ площади ABC . Значит, $\frac{S_{ACNM}}{S_{ABC}} = \frac{5}{9}$. Расстояние от точки P до ABC вдвое меньше расстояния от D до ABC , поэтому $V_{PACNM} = \frac{5V}{18}$.

Таким образом, $V_{APMNCQ} = \frac{13V}{36}$, то есть $\frac{V_{APMNCQ}}{V_{BMNDPQ}} = \frac{13}{23}$.



Ответ: 13 : 23.

№ 150.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть $SABC$ — данная пирамида с вершиной S , отрезок SH — ее высота, точка M — середина BC , CK — высота треугольника BSC . Угол SMH — угол между боковой гранью пирамиды и основанием.

Пусть $SM = 6a$. тогда

$$MH = SM \cos \angle SMH = a\sqrt{6},$$

$$AM = 3a\sqrt{6},$$

$$BC = 6a\sqrt{2},$$

$$SB = \sqrt{BM^2 + SM^2} = 3a\sqrt{6}.$$

Обозначим высоту пирамиды, проведенную к BSC за h . Тогда h — высота треугольника ASM . Отсюда $h \cdot SM = SH \cdot AM$, откуда

$$\frac{h}{SH} = \frac{SM}{AM} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1.$$

Что и требовалось доказать.

б) Найдем площадь треугольника BSC двумя способами:

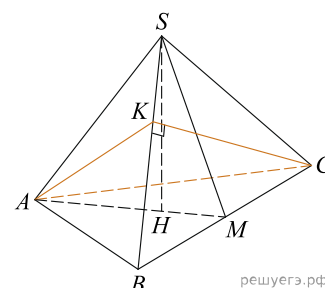
$$\frac{1}{2} SM \cdot BC = \frac{1}{2} CK \cdot SB.$$

Значит, $CK = 4a\sqrt{3}$.

Ребро AC перпендикулярно плоскости SBH , поэтому SB и AC перпендикулярны, следовательно, плоскость AKC перпендикулярна ребру SB . Искомый угол между боковыми гранями равен углу при вершине равнобедренного треугольника AKC :

$$\cos \angle AKC = \frac{2KC^2 - AC^2}{2KC^2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: б) $\arccos \frac{1}{4}$.

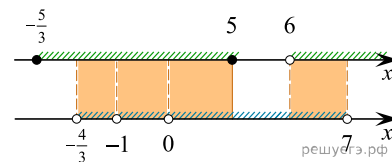


Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. На области определения логарифмов верна формула $\log_a b \cdot \log_b d = \log_a d$. Применим ее к обеим частям неравенства и воспользуемся методом рационализации:

$$\log_{7-x}(2x+3) \cdot \log_{2x+3}(3x^2) \leq \log_{7-x}(3x+4) \cdot \log_{3x+4}(10x+25) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{7-x}(3x^2) \leq \log_{7-x}(10x+25), \\ 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 1, \\ 3x+4 > 0, \\ 3x+4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{7-x}(3x^2) - \log_{7-x}(10x+25) \leq 0, \\ x > -\frac{4}{3}, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2 - 10x - 25}{7-x-1} \leq 0, \\ 7-x > 0, \\ 3x^2 > 0, \\ x > -\frac{4}{3}, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{7-x}(3x^2) \leq \log_{7-x}(10x+25), \\ 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 1, \\ 3x+4 > 0, \\ 3x+4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{7-x}(3x^2) - \log_{7-x}(10x+25) \leq 0, \\ x > -\frac{4}{3}, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2 - 10x - 25}{7-x-1} \leq 0, \\ 7-x > 0, \\ 3x^2 > 0, \\ x > -\frac{4}{3}, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-5)(3x+5)}{6-x} \leq 0, \\ -\frac{4}{3} < x < 7, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} < x < -1, \\ -1 < x < 0, \\ 0 < x \leq 5, \\ 6 < x < 7. \end{cases}$$



Ответ: $\left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 5] \cup (6; 7)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $2^x = y$. Поскольку $y > 0$, на него можно умножить обе части неравенства. Получим:

$$y + \frac{6}{y} \leq 7 \Leftrightarrow y^2 - 7y + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-6) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 6.$$

Откуда $0 \leq x \leq \log_2 6$.

Ответ: $[0; \log_2 6]$.

№ 153.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{\log_3^2(3x) - 1}{\log_3(9x)} + \frac{1}{\log_3 x - 4} &\leq 6 \Leftrightarrow \frac{(\log_3 3 + \log_3 x)^2 - 1}{\log_3 9 + \log_3 x} + \frac{1}{\log_3 x - 4} \leq 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_3^2 x + 2\log_3 x}{\log_3 x + 2} + \frac{1}{\log_3 x - 4} \leq 6. \frac{\log_3^2(3x) - 1}{\log_3(9x)} + \frac{1}{\log_3 x - 4} \leq 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(\log_3 3 + \log_3 x)^2 - 1}{\log_3 9 + \log_3 x} + \frac{1}{\log_3 x - 4} \leq 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_3^2 x + 2\log_3 x}{\log_3 x + 2} + \frac{1}{\log_3 x - 4} \leq 6. \end{aligned}$$

Пусть $t = \log_3 x$, решим рациональное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{t^2 + 2t}{t+2} + \frac{1}{t-4} \leq 6 &\Leftrightarrow \frac{t(t+2)}{t+2} + \frac{1}{t-4} \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t-4} - 6 \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 4t + 1 - 6t + 24}{t-4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 10t + 25}{t-4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(t-5)^2}{t-4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 4, \\ t = 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -2, \\ -2 < t < 4, \\ t = 5. \end{cases} \frac{t^2 + 2t}{t+2} + \frac{1}{t-4} \leq 6 \Leftrightarrow \frac{t(t+2)}{t+2} + \frac{1}{t-4} \leq 6 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t-4} - 6 \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 4t + 1 - 6t + 24}{t-4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 10t + 25}{t-4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(t-5)^2}{t-4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} t < 4, \\ t = 5, \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -2, \\ -2 < t < 4, \\ t = 5. \end{cases} \frac{t^2 + 2t}{t+2} + \frac{1}{t-4} \leq 6 \Leftrightarrow \frac{t(t+2)}{t+2} + \frac{1}{t-4} \leq 6 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t-4} - 6 \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 4t + 1 - 6t + 24}{t-4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 10t + 25}{t-4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(t-5)^2}{t-4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} t < 4, \\ t = 5, \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -2, \\ -2 < t < 4, \\ t = 5. \end{cases} \frac{t^2 + 2t}{t+2} + \frac{1}{t-4} \leq 6 \Leftrightarrow \frac{t(t+2)}{t+2} + \frac{1}{t-4} \leq 6 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t-4} - 6 \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 4t + 1 - 6t + 24}{t-4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2 - 10t + 25}{t-4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(t-5)^2}{t-4} \leq 0, \\ t \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} t < 4, \\ t = 5, \\ t \neq -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -2, \\ -2 < t < 4, \\ t = 5. \end{cases}
\end{cases}
\end{aligned}$$

Вернемся к исходной переменной, находим:

$$\begin{cases} \log_3 x < -2, \\ -2 < \log_3 x < 4, \\ \log_3 x = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{9}, \\ \frac{1}{9} < x < 81, \\ x = 243. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{9}; 81\right) \cup \{243\}$.

№ 154.

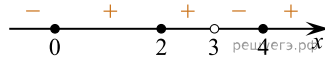
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Решим неравенство методом интервалов. Найдём нули числителя:

$$\begin{aligned}
0,2^{|x^2-4x+2|} - 0,04 = 0 &\Leftrightarrow 0,2^{|x^2-4x+2|} = 0,2^2 \Leftrightarrow |x^2-4x+2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+2 = 2, \\ x^2-4x+2 = -2. \end{cases} & 0,2^{|x^2-4x+2|} - 0,04 = 0 &\Leftrightarrow 0,2^{|x^2-4x+2|} = 0,2^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow |x^2-4x+2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+2 = 2, \\ x^2-4x+2 = -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 0, \\ x^2 - 4x + 4 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 4, \\ x = 2. \end{cases}$$

Расставим знаки на числовой прямой:



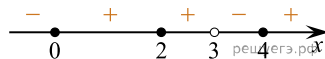
Таким образом, множество решений неравенства: $(-\infty; 0] \cup \{2\} \cup (3; 4]$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{2\} \cup (3; 4]$.

Приведем другое решение.

Решим неравенство с помощью метода рационализации.

$$\begin{aligned} \frac{0,2^{|x^2-4x+2|}-0,04}{3-x} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{0,2^{|x^2-4x+2|}-0,2^2}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2-|x^2-4x+2|}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2^2-(x^2-4x+2)^2}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(2-x^2+4x-2)(2+x^2-4x+2)}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-4)(x-2)^2}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x = 2, \\ 3 < x \leq 4. \end{cases} \\ \frac{0,2^{|x^2-4x+2|}-0,04}{3-x} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{0,2^{|x^2-4x+2|}-0,2^2}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2-|x^2-4x+2|}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2^2-(x^2-4x+2)^2}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2-x^2+4x-2)(2+x^2-4x+2)}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x-4)(x-2)^2}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x = 2, \\ 3 < x \leq 4. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{2-|x^2-4x+2|}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2^2-(x^2-4x+2)^2}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(2-x^2+4x-2)(2+x^2-4x+2)}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x-4)(x-2)^2}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x = 2, \\ 3 < x \leq 4. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{2-|x^2-4x+2|}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2^2-(x^2-4x+2)^2}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(2-x^2+4x-2)(2+x^2-4x+2)}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x-4)(x-2)^2}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x = 2, \\ 3 < x \leq 4. \end{cases} \end{aligned}$$



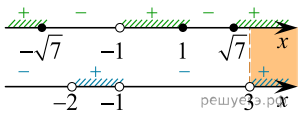
Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{2\} \cup (3; 4]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{x^2-x-6}{x+1} + \log_2(x^2+1) &\leq \log_2 \left(x^3-x^2-5x+\frac{4}{x+1}-3 \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x+1} > 0, \\ x^2+1 > 0, \\ \frac{(x^2-x-6)(x^2+1)}{x+1} \leq x^3-x^2-5x+\frac{4}{x+1}-3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x+1} > 0, \\ \frac{x^4-x^3-5x^2-x-6}{x+1} \leq \frac{x^4-6x^2-8x+1}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x+1} > 0, \\ \frac{x^3-x^2-7x+7}{x+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)(x-3)}{x+1} > 0, \\ \frac{(x-1)(x^2-7)}{x+1} \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решим полученную систему неравенств методом интервалов (см. рис.),



получим, что $x > 3$.

Ответ: $(3; +\infty)$.

№ 156.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Рассмотрим отдельно числитель дроби:

$$\begin{aligned} 2^{2x+1} - 96 \cdot 0,5^{2x+3} + 2 &= 2 \cdot 2^{2x} - 12 \cdot \frac{1}{2^{2x}} + 2 = 2^{2x} - 6 \cdot \frac{1}{2^{2x}} + 1 = \\ &= \frac{1}{2^{2x}} ((2^{2x})^2 + 2^{2x} - 6) = \frac{1}{2^{2x}} (2^{2x} + 3) (2^{2x} - 2) \quad 2^{2x+1} - 96 \cdot 0,5^{2x+3} + 2 = \\ &= 2 \cdot 2^{2x} - 12 \cdot \frac{1}{2^{2x}} + 2 = 2^{2x} - 6 \cdot \frac{1}{2^{2x}} + 1 = \\ &= \frac{1}{2^{2x}} ((2^{2x})^2 + 2^{2x} - 6) = \frac{1}{2^{2x}} (2^{2x} + 3) (2^{2x} - 2) \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \frac{2^{2x+1} - 96 \cdot 0,5^{2x+3} + 2}{x+1} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2^{2x}}(2^{2x} + 3)(2^{2x} - 2)}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2^{2x} - 2^1}{x+1} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{x+1}{2^{2x} - 96 \cdot 0,5^{2x+3} + 2} \leq 0 \Leftrightarrow -1 < x \leq 0,5. \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2^{2x}}(2^{2x} + 3)(2^{2x} - 2)}{x+1} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{2^{2x} - 2^1}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x+1}{2^{2x} - 96 \cdot 0,5^{2x+3} + 2} \leq 0 &\Leftrightarrow -1 < x \leq 0,5. \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; 0,5]$.

№ 157.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Воспользуемся свойством $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, получим:

$$\begin{aligned} 7^{\ln(x^2-2x)} \leq (2-x)^{\ln 7} &\Leftrightarrow 7^{\ln(x^2-2x)} \leq 7^{\ln(2-x)} \Leftrightarrow \ln(x^2-2x) \leq \ln(2-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ x^2 - 2x \leq 2-x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ (x-2)(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 0. \quad 7^{\ln(x^2-2x)} \leq (2-x)^{\ln 7} \Leftrightarrow 7^{\ln(x^2-2x)} \leq 7^{\ln(2-x)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln(x^2-2x) \leq \ln(2-x) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ x^2 - 2x \leq 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ (x-2)(x+1) \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow -1 \leq x < 0. \end{aligned}$$

Ответ: $[-1; 0)$.

№ 158.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Решим первое неравенство:

$$\frac{(x-1)^2 + 4(x+1)^2}{2} \leq \frac{(3x+1)^2}{4} \Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 8(x+1)^2 \leq (3x+1)^2 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 + 4(x+1)^2}{2} \leq \frac{(3x+1)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 8(x+1)^2 \leq (3x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 + 8x^2 + 16x + 8 \leq 9x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Ответ: $\{-3\}$.

№ 159.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

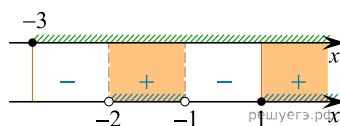
Решение. Последовательно получаем:

$$\frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \leq \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2} - \frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \cdot \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+1} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \leq \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x+3}}{x+2} - \frac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \cdot \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+1} \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \cdot \frac{3x+3-2x-4}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3} \cdot (x-1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0.$$

И решим это неравенство методом интервалов, учитывая, что $x \geq -3$.



Ответ: $\{-3\} \cup (-2; -1) \cup [1; +\infty)$.

№ 160.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. На области определения неравенства все выражения, кроме $\log_{0,2}x + 1$, принимают только положительные значения. Поэтому неравенство верно тогда и только тогда, когда на ОДЗ выполнено неравенство $\log_{0,2}x + 1 \geq 0$. Получаем:

$$\frac{2^{\log_2(x-3)} \cdot (\log_{0,2}x + 1)}{|x-4| \cdot \sqrt{6-x}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{0,2}x \geq -1, \\ x-3 > 0, \\ x-4 \neq 0, \\ 6-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 5, \\ x > 3, \\ x \neq 4, \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 4, \\ 4 < x \leq 5. \end{cases} \frac{2^{\log_2(x-3)} \cdot (\log_{0,2}x + 1)}{|x-4| \cdot \sqrt{6-x}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{0,2}x \geq -1, \\ x-3 > 0, \\ x-4 \neq 0, \\ 6-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 5, \\ x > 3, \\ x \neq 4, \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 4, \\ 4 < x \leq 5. \end{cases}$$

Ответ: $(3; 4) \cup (4; 5]$.

№ 161.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Введём прямоугольную систему координат с началом координат в точке, где находится метеостанция, ось абсцисс направим на восток, ось ординат — на север. Тогда в момент первого измерения эпицентр циклона находился в точке с координатами $(-5; 24)$, а во время второго измерения — в точке с координатами $(-3,5; 20)$. По условию, эпицентр движется прямолинейно. Пусть эта прямая задана уравнением $y = kx + b$. Найдём коэффициенты k и b в уравнении этой прямой:

$$\begin{cases} 24 = -5k + b, \\ 20 = -3,5k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -1,5k, \\ b = 24 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{8}{3}, \\ b = \frac{32}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение прямой $y = -\frac{8}{3}x + \frac{32}{3}$ или $8x + 3y - 32 = 0$. Тогда наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции, будет равно расстоянию от точки $(0; 0)$ до прямой $8x + 3y - 32 = 0$:

$$\rho = \frac{|8 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 32|}{\sqrt{8^2 + 3^2}} = \frac{32}{\sqrt{73}} \text{ (км)}.$$

Ответ: $\frac{32}{\sqrt{73}}$ км.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть в первой области x рабочих заняты на добыче алюминия, а $20 - x$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 10 часов в сутки, один рабочий добывает 1 кг алюминия или 1 кг никеля, поэтому за сутки рабочие добудут x кг алюминия и $(20 - x)$ кг никеля.

Пусть во второй области y рабочих заняты на добыче алюминия, а $20 - y$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 10 часов в сутки, n рабочих добывают $\sqrt{10 \cdot n}$ кг любого из металлов, поэтому вместе бригады добудут $\sqrt{10y}$ кг алюминия и $\sqrt{10(20-y)}$ кг никеля.

Всего будет произведено $x + \sqrt{10y}$ кг алюминия (1) и $20 - x + \sqrt{200 - 10y}$ кг никеля (2). Поскольку алюминия необходимо добывать втрое больше никеля, имеем:

$$x + \sqrt{10y} = 3(20 - x + \sqrt{200 - 10y}) \Leftrightarrow 4x = 60 + 3\sqrt{200 - 10y} - \sqrt{10y}. \quad (*) \quad x + \sqrt{10y} = 3(20 - x + \sqrt{200 - 10y}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x = 60 + 3\sqrt{200 - 10y} - \sqrt{10y}. \quad (*)$$

Количеству никеля $s = 20 - x + \sqrt{200 - 10y}$ соответствует количество сплава $4s$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$4s = 80 - 4x + 4\sqrt{200 - 10y} = 80 - (60 + 3\sqrt{200 - 10y} - \sqrt{10y}) + 4\sqrt{200 - 10y} = 4s = 80 - 4x + 4\sqrt{200 - 10y} = \\ = 80 - (60 + 3\sqrt{200 - 10y} - \sqrt{10y}) + 4\sqrt{200 - 10y} = \\ = 20 + \sqrt{10y} + \sqrt{200 - 10y}.$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение функции $f(y) = \sqrt{10y} + \sqrt{200 - 10y}$ при натуральных y не больших 20.

Имеем:

$$f'(y) = \frac{5}{\sqrt{10y}} - \frac{5}{\sqrt{200 - 10y}} = 5 \cdot \frac{\sqrt{200 - 10y} - \sqrt{10y}}{\sqrt{200 - 10y} \cdot \sqrt{10y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{200 - 10y} - \sqrt{10y} \underset{y \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} 200 - 10y = 10y \Leftrightarrow y = 10.$$

В найденной точке производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в ней функция достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области.

Далее имеем: $f(10) = 20$, $s = 10$, из (*) $x = 20$. Это означает, что все рабочие первой области должны быть заняты на производстве алюминия, за сутки они произведут его 20 кг, а рабочие второй области бригадами по 10 и 10 человек должны быть заняты на добыче алюминия и никеля, они добудут их по 10 кг. Всего будет добыто 30 кг алюминия и 10 кг никеля, из них будет произведено 40 кг сплава.

Ответ: 40 кг.

Приведем решение Ольги Тыньяновой.

Найдем максимальное количество металла, которое может быть добыто в двух областях.

В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг металла (алюминия или никеля), поэтому общее количество добытого металла равно $0,1 \cdot 20 \cdot 10 = 20$ кг.

Пусть во второй области добыто x кг алюминия, тогда на его добычу будет затрачено x^2 часов, и на добычу никеля можно будет затратить $200 - x^2$ часов, при этом будет добыто $\sqrt{200 - x^2}$ кг никеля.

Общее количество добытого во второй области металла составит $f(x) = x + \sqrt{200 - x^2}$.

Имеем:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{200 - x^2}}.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{x}{\sqrt{200 - x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = 10.$$

При $x = 10$ функция $f(x)$ достигает максимального значения, равного 20.

Таким образом, во второй области максимальное количество добытого металла составляет 20кг при условии, что добывается 10 кг алюминия и 10 кг никеля.

Следовательно, общее количество металла, добытого в двух областях, не может быть больше 40кг, а следовательно, количество произведенного заводом сплава также не может быть больше 40 кг.

Покажем, что количество сплава может быть равно 40 кг.

При максимальном производстве металла во второй области там будет добыто 10кг алюминия и 10кг никеля. Если в первой области все рабочие будут заняты на добыче алюминия, то его будет добыто 20кг. Следовательно, всего будет добыто 30кг алюминия, и на 1кг никеля будет приходится 3кг алюминия, как и требуется для производства сплава.

Таким образом, максимальное количество сплава, которое может произвести завод, равно 40 кг.

№ 163.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть на первом комбинате x человек заняты изготовлением деталей A , где $0 \leq x \leq 500$, тогда $500 - x$ человек заняты изготовлением деталей B . Пусть на втором комбинате y человек заняты изготовлением деталей A , где $0 \leq y \leq 200$, тогда $200 - y$ человек заняты изготовлением деталей B . Всего на двух комбинатах будет изготовлено $8x + 2y$ деталей A и $2(500 - x) + 8(200 - y)$ деталей B . Для изготовления изделия нужна 1 деталь A и 3 детали B . Чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий, должно выполняться равенство

$$3 \cdot (8x + 2y) = 2 \cdot (500 - x) + 8 \cdot (200 - y),$$

откуда $x = 100 - \frac{7y}{13}$.

Количество изделий S будет равно количеству деталей A :

$$S(x; y) = 8x + 2y = 8 \cdot \left(100 - \frac{7y}{13}\right) + 2y = 800 - \frac{30y}{13}.$$

Наибольшее значение убывающей линейной функции $f(y) = 800 - \frac{30y}{13}$ достигается при наименьшем возможном значении y , то есть при $y = 0$. При этом $x = 100$, а потому на первом комбинате будет изготовлено 800 деталей A и $400 \cdot 2 = 800$ деталей B , а на втором комбинате — только 1600 деталей B .

Ответ: 800.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Первое решение:

Из условия «на втором заводе для изготовления t деталей (и A , и B) требуется t^2 человеко-смен» следует, что работающие на заводе 100 человек за смену смогут произвести максимум 10 деталей одного типа.

Пусть на первом комбинате x рабочих заняты на производстве детали A , а остальные $100 - x$ рабочих производят детали типа B , и пусть на втором комбинате из 10 деталей производится y деталей типа A и $10 - y$ деталей типа B . Внесем данные из условия в таблицу.

	Деталь A		Деталь B	
	Количество человек	Количество деталей	Количество человек	Количество деталей
Первый комбинат	x	$3x$	$100 - x$	$100 - x$
Второй комбинат		y		$10 - y$
Всего		$3x + y$		$100 - x + 10 - y$

Для производства изделий деталей типа B должно быть в три раза больше деталей типа A :

$$3(3x + y) = 100 - x + 10 - y \Leftrightarrow x = 11 - 0,4y \quad (*)$$

Пусть s шт.— количество изделий, оно равно количеству деталей типа A : $s = 3x + y$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s = 3x + y = 3 \cdot (11 - 0,4y) + y = 33 - 0,2y.$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение $f(y) = 33 - 0,2y$ при неотрицательных целых значениях y , не больших 10.

Функция $f(y) = 33 - 0,2y$ — убывающая. Наибольшее значение на отрезке $[0; 10]$ она принимает при $y = 0$, при этом $x = 11$, а $f(0) = 33$.

Таким образом, максимальное количество изделий за смену будет собрано, если на втором заводе будут изготавливать только детали типа B (10 рабочих изготовят 10 деталей типа B), а на первом заводе 11 человек изготовят 33 детали типа A , а остальные 89 рабочих изготовят 89 деталей типа B . Итого получим 33 детали типа A и 99 деталей типа B , на производстве которых были заняты все 200 человек.

Значит, комбинат сможет собрать за смену 33 изделия.

Ответ: 33 изделия.

Замечание.

Вначале мы прочли условие иначе и полагали, что на втором заводе для изготовления t деталей каждого типа (и A , и B независимо друг от друга) требуется t^2 человеко-смен. Приведём решение и примечания к нему для такого понимания условия. К этому же пониманию условия относятся комментарии читателей.

Второе решение:

Пусть на первом комбинате x рабочих, а на втором комбинате y рабочих заняты на производстве детали A . Внесем данные из условия в таблицу.

	Деталь A		Деталь B	
	Количество человек	Количество деталей	Количество человек	Количество деталей
Первый комбинат	x	$3x$	$100 - x$	$100 - x$
Второй комбинат	y	$\sqrt{y}$	$100 - y$	$\sqrt{100 - y}$
Всего		$3x + \sqrt{y}$		$100 - x + \sqrt{100 - y}$

Для производства изделий деталей типа B должно быть в три раза больше деталей типа A :

$$3(3x + \sqrt{y}) = 100 - x + \sqrt{100 - y} \Leftrightarrow x = 10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y} \quad (*) \quad 3(3x + \sqrt{y}) = 100 - x + \sqrt{100 - y} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y} \quad (*)$$

Пусть s шт — количество изделий, оно равно количеству деталей типа A : $s = 3x + \sqrt{y}$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s = 3x + \sqrt{y} = 3(10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y}) + \sqrt{y} = 30 + 0,1(\sqrt{y} + 3\sqrt{100 - y}). \quad s = 3x + \sqrt{y} = 3(10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y}) + \sqrt{y} = \\ = 30 + 0,1(\sqrt{y} + 3\sqrt{100 - y}). \quad s = 3x + \sqrt{y} = \\ = 3(10 + 0,1\sqrt{100 - y} - 0,3\sqrt{y}) + \sqrt{y} = \\ = 30 + 0,1(\sqrt{y} + 3\sqrt{100 - y}).$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение $f(y) = \sqrt{y} + 3\sqrt{100 - y}$ при натуральных значениях y не больших 100. Имеем:

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{3}{2\sqrt{100 - y}} = \frac{\sqrt{100 - y} - 3\sqrt{y}}{2\sqrt{100 - y} \cdot \sqrt{y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{100 - y} = 3\sqrt{y} \Leftrightarrow_{y \in \mathbb{N}} 100 - y = 9y \Leftrightarrow y = 10.$$

В найденной точке производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в ней функция достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области, равным $f(10) = \sqrt{10} + 3\sqrt{90} = 10\sqrt{10}$, при этом $s = 30 + \sqrt{10}$. Количество деталей должно быть натуральным числом, $3 < \sqrt{10} < 4$, поэтому рабочие могут произвести, самое большее, 33 детали типа A .

Из (*) находим $x = 10$ чел. Это означает, что 10 рабочих первого комбината и 10 рабочих второго комбината должны быть заняты на производстве детали A , за сутки они произведут их 33шт, оставшиеся 90 рабочих первого комбината и 90 рабочих второго комбината должны быть заняты на производстве деталей B , за сутки они произведут их 99 шт.

Ответ: 33 изделия.

Примечание 1.

Внимательный читатель мог бы задать вопрос о том, почему в равенстве (*) предполагается, что деталей производится ровно в отношении 1:3. Ведь можно произвести, например, 11 деталей типа B и 34 детали типа A , из них получится собрать 33 изделия, а одна деталь типа A останется лишней. Ответим на этот вопрос.

Если есть лишние детали, то уменьшим их число до соотношения 1:3 и отправим на обед людей, производивших лишние детали. Тогда получим решение задачи для меньшего числа людей, но с тем же выходом продукта и соотношением деталей 1:3. Теперь вернём людей с обеда. Меньшего количества изделий мы не получим, поскольку зависимость между числом деталей и количеством людей неубывающая. Большого количества изделий тоже не достичь, поскольку из лишних деталей целого изделия собрать не получится. Поэтому наибольшее коли-

чество изделий совпадет с найденным.

Примечание 2.

Заметим, что если рабочие второго комбината будут производить только детали типа B , то они произведут их 10 шт. Пусть при этом 89 рабочих первого комбината произведут 89 деталей типа B , а оставшиеся 11 рабочих первого комбината произведут 33 детали типа A . Тогда всего будет произведено 33 детали типа A и 99 деталей типа B . Из них также можно собрать 33 изделия. Таких вариантов довольно много (см. таблицу в конце).

Примечание 3.

Можно было бы спросить, почему не образовать из рабочих второго завода 100 независимых групп, каждая из которых состоит из одного рабочего.

Приведём решение Евгения Обухова.

Пусть первый завод выпускает x деталей B , а второй завод выпускает y деталей B . Тогда на первом заводе деталь B выпускает x рабочих, а деталь A выпускает $100 - x$ рабочих. Поэтому первый завод выпускает $300 - 3x$ деталей A .

На втором заводе деталь B выпускает y^2 рабочих, деталь A выпускает $100 - y^2$ рабочих. Поэтому второй завод выпускает $[\sqrt{100 - y^2}]$ деталей A . Здесь [...] — целая часть числа.

Пусть комбинат выпускает k изделий. Имеем следующие необходимые и достаточные условия:

$$\begin{cases} 300 - 3x + [\sqrt{100 - y^2}] \geq k, \\ x + y \geq 3k. \end{cases}$$

Рассмотрим $y = 10$. Тогда получим:

$$\begin{cases} 300 - 3x \geq k, \\ x + 10 \geq 3k. \end{cases}$$

Домножим второе неравенство на 3 и сложим с первым, получим: $330 \geq 10k \Leftrightarrow k \leq 33$. Заметим, что $x = 89, k = 33$ (при $y = 10$) удовлетворяют исходному неравенству. То есть комбинат может изготовить 33 изделия.

Проверим, может ли он изготовить больше. Пусть $k \geq 34$, тогда

$$\begin{cases} 300 - 3x + [\sqrt{100 - y^2}] \geq 34, \\ x + y \geq 102. \end{cases}$$

Поскольку теперь мы можем считать $y \leq 9$, из второго неравенства находим $x \geq 93$. Тогда оценим: $300 - 3x + [\sqrt{100 - y^2}] \leq 300 - 3 \cdot 93 + 10 = 31$. Получили противоречие с первым неравенством.

Следовательно, максимальное число изделий, которое может произвести комбинат, равно 33.

Приведём таблицу других вариантов, также дающих 33 изделия.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Обозначим буквой t время, прошедшее с начального момента времени. Поскольку каждый велосипедист движется по взаимно перпендикулярным дорогам, то расстояние между ними может быть вычислено по теореме Пифагора. Рассмотрим $f(t)$ — квадрат длины в каждый момент времени, тогда

$$\begin{aligned} f(t) &= (5 - 40t)^2 + (3 - 30t)^2 = \\ &= 25 - 400t + 1600t^2 + 9 - 180t + 900t^2 = 2500t^2 - 580t + 34. \end{aligned}$$

Итак, $f(t) = 2500t^2 - 580t + 34$, $t \geq 0$. У данной квадратичной функции есть наименьшее значение, которое достигается при $t_0 = \frac{580}{2 \cdot 2500} = \frac{29}{250}$ ч. $= \frac{29}{250} \cdot 60 \text{ мин} = 6\frac{24}{25}$ мин. Найдем его:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{29}{250}\right) &= \left(5 - 40 \cdot \frac{29}{250}\right)^2 + \left(3 - 30 \cdot \frac{29}{250}\right)^2 = \\ &= \left(5 - \frac{116}{25}\right)^2 + \left(3 - \frac{87}{25}\right)^2 = \left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(-\frac{12}{25}\right)^2 = \left(\frac{15}{25}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2. = \left(5 - \frac{116}{25}\right)^2 + \left(3 - \frac{87}{25}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(-\frac{12}{25}\right)^2 = \left(\frac{15}{25}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, минимальное расстояние между велосипедистами равно $\sqrt{f\left(\frac{29}{250}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$ км и будет достигнуто через $6\frac{24}{25}$ мин.

Ответ: $6\frac{24}{25}$ мин, $\frac{3}{5}$ км.

Примечание.

Условие уточнено редакцией Решу ЕГЭ.

№ 166.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. В каждой области в сутки может быть затрачено 200 человеко-часов труда. При этом в первой области будет добыто $0,2 \cdot 200 = 40$ кг металлов. Пусть в ней будет добыто x кг алюминия, тогда никеля будет добыто $(40 - x)$ кг. Пусть во второй области будет добыто x кг алюминия, тогда никеля будет добыто $\sqrt{200 - x^2}$ кг.

Для производства сплава заводу необходимо получить равное количество алюминия и никеля, поэтому должно выполняться равенство

$$x + y = \sqrt{200 - x^2} + 40 - y. \quad (*)$$

При этом масса сплава будет равна сумме масс всех металлов:

$$m(x) = x + \sqrt{200 - x^2} + 40.$$

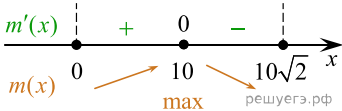
Найдём наибольшее значение функции $m(x)$, где $0 \leq x \leq 10\sqrt{2}$. Для этого найдем производную функции:

$$m'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{200 - x^2}} = \frac{\sqrt{200 - x^2} - x}{\sqrt{200 - x^2}}.$$

Найдем нули производной:

$$m'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{200 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Укажем знаки производной и поведение функции на рисунке:



Наибольшее значение функции достигается в точке максимума при $x = 10$. Из равенства (*) для $x = 10$ находим $y = 20$. Таким образом, наибольшее значение функции $m(x)$ равно

$$m(10) = 10 + \sqrt{200 - 10^2} + 40 = 60.$$

Таким образом, завод сможет производить 60 кг сплава ежедневно.

Ответ: 60.

№ 167.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Числитель и знаменатель дроби положительны, поэтому при фиксированном значении числителя дробь достигает наибольшего значения при наименьшем знаменателе. Подкоренное выражение в знаменателе представляет собой сумму положительного числа и неотрицательного выражения. Следовательно, наибольшая сила тока достигается, если $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 0$, это возможно при $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и тогда

$$I_{\max} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 0^2}} = \frac{U}{R} = \frac{220 \text{ В}}{44 \text{ Ом}} = 5 \text{ А}.$$

Ответ: 5 А.

Приведем другое решение.

Из курса физики известно, что наибольшая сила тока достигается при резонансе, то есть в случае, когда $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, и при этом

$$I_{\max} = \frac{U}{R} = \frac{220 \text{ В}}{44 \text{ Ом}} = 5 \text{ А}.$$

Заодно отметим, что резонансное значение циклической частоты равно

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,2 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ (рад/с)}. \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,2 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ (рад/с)}.$$

№ 168.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть в первой шахте на добыче алюминия за день будет затрачено x человеко-часов, а во второй шахте – y человеко-часов. Составим таблицу по данным задачи.

	Алюминий		Никель	
	Количество человеко-часов	Количество металла за день, кг	Количество человеко-часов	Количество металла за день, кг
Шахта 1	x	x	$100 - x$	$2(100 - x)$
Шахта 2	y	$2y$	$500 - y$	$500 - y$
Всего		$x + 2y$		$700 - 2x - y$

Поскольку алюминия необходимо добывать вдвое больше никеля, имеем:

$$x + 2y = 2(700 - 2x - y) \Leftrightarrow 5x = 1400 - 4y \Leftrightarrow x = 280 - 0,8y. \quad (*)$$

Пусть s — масса сплава, она втрое больше массы добытого никеля: $s = 3(700 - 2x - y)$. Найдём наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него $(*)$:

$$s = 3(700 - 2x - y) = 3(700 - 2(280 - 0,8y) - y) = 3(140 + 0,6y).$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение y . Из $(*)$ ясно, что наибольшее возможное значение y равно 350, при этом $x = 0$, $s = 3(140 + 0,6 \cdot 350) = 1050$. Это означает, что 350 человеко-часов во второй шахте должны быть затрачены для добычи алюминия, а оставшиеся 150 человеко-часов во второй шахте и все 100 человеко-часов в первой шахте должны быть затрачены для добычи никеля. При этом будет добыто 700 кг алюминия и 350 кг никеля, а масса сплава будет равна 1050 кг.

Ответ: 1050 кг.

Приведем другое решение.

На первой шахте наиболее эффективно добывают никель. Пусть все 100 человеко-часов в первой шахте будут затрачены для добычи никеля, тогда его добудут на ней 200кг. Для получения s сплава с добытым на первой шахте никелем на второй шахте необходимо добыть 400кг алюминия, с этим справятся 40 рабочих, работая

по 5 часов каждый. Из оставшихся 60 рабочих второй шахты можно половину направить на добычу алюминия, а вторую половину — на добычу никеля. Они произведут 150 кг никеля и 300 кг алюминия. При этом всего будет добыто 700 кг алюминия и 350 кг никеля, а масса общая сплава будет равна 1050 кг.

Покажем, что лучшей производительности не достичь: действительно, рабочие не простаивают, металла не добывается с избытком. Если же на первой шахте за kn человеко-часов вместо $2kn$ кг никеля добудут k кг алюминия, то для производства сплава на второй шахте потребуется добыть $0,5kn$ никеля вместо возможных k кг алюминия. При таком распределении усилий рабочих вместо возможных $3kn$ кг сплава будет произведено $1,5kn$ кг сплава, то есть труд будет неэффективным.

№ 169.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть a — количество загруженных микроавтобусов, а b — количество загруженных грузовиков. Поскольку паром перевозит микроавтобусы и грузовики при условии полной загрузки, $5a + 9b = 111$. Частное решение данного уравнения — $a_0 = 222$, $b_0 = -111$, тогда $a = 222 + 9k$, $b = -111 - 5k$, где k — целое число. Так как a и b — натуральные числа, возможны только два значения k : $k = -23$, тогда $a = 15$, $b = 4$, или $k = -24$, тогда $a = 6$, $b = 9$. Так как количество загруженных на паром микроавтобусов составляет не более 70% от количества загруженных на паром грузовиков, получаем, что $a = 6$, $b = 9$. В таком случае суммарная стоимость всех микроавтобусов и грузовиков, перевозимых паромом, равна $6 \cdot 5 + 9 \cdot 4 = 66$ тысяч условных единиц.

Ответ: 66 тысяч условных единиц.

№ 170.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Скорость сближения Алексея и Жучки (разность скоростей) $\Delta u = 9$ км/ч. Первоначальная разность расстояний между хозяином и собакой составляет $\Delta S = 6$ км. Найдем разностное отношение $t = \Delta S / \Delta v = 2/3$ часа. Это и есть время, которое потребовалось Жучке, чтобы догнать Алексея.

С того времени, как Жучка бежала за хозяином, Алексей прошел расстояние, равное $\frac{2}{3}v$ км. В соответствии с условием задачи Алексей прошел еще 6 км пока Жучка была дома. Значит, в направлении от дома Алексей, будучи на прогулке, прошел $6 + \frac{2}{3}v$ км. Такой же путь Алексей прошел после того, как Жучка догнала его, но в обратном направлении. На преодоление этого пути (со скоростью 4 км/ч) потребовалось $\frac{6 + \frac{2}{3}v}{4} = \frac{3}{2} + \frac{v}{6}$ часа. Итак, вся прогулка Алексея продлилась

$$\left(\frac{6}{v} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{v}{6}\right) = \left(\frac{6}{v} + \frac{v}{6}\right) + \frac{13}{6} \text{ часа.}$$

Эта сумма будет наименьшей, когда сумма двух взаимно обратных положительных выражений $\frac{6}{v}$ и $\frac{v}{6}$ примет наименьшее значение. И эта наименьшая сумма заведомо известна, она равна 2 (классическое неравенство $\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 2$ — наименьшее значение достигается при $a=1$). Следовательно, в нашем случае должно выполняться равенство $\frac{6}{v} = \frac{v}{6} = 1$, то есть $v = 6$ км/ч. Время всей прогулки Алексея составляет $2 + \frac{13}{6} = \frac{25}{6}$ часа.

Ответ: 6 км/ч, $\frac{25}{6}$ часа.

Приведем решение Андрея Анатольевича.

Пусть v — скорость Алексея, и S — расстояние, на котором он находился в тот момент, когда его догнала Жучка. Время движения Алексея до того момента, когда из дому выбежала Жучка, равно $\frac{6}{v}$, время движения от этого момента до встречи с Жучкой равно $\frac{S-6}{v}$, время движения до возвращения домой $\frac{S}{4}$, тогда общее время составит

$$t(v) = \frac{6}{v} + \frac{S-6}{v} + \frac{S}{4} = \frac{S(v+4)}{4v}.$$

С другой стороны, время движения Жучки до встречи с Алексеем составит $\frac{S}{v+9}$. Тогда

$$\frac{S-6}{v} = \frac{S}{v+9} \Leftrightarrow S = \frac{6(v+9)}{9}.$$

Подставив данное выражение для S в первое уравнение, получим

$$t(v) = \frac{6(v+9)(v+4)}{9 \cdot 4v} = \frac{v^2 + 13v + 36}{6v}.$$

Для нахождения минимального времени исследуем функцию $f(v)$ на максимум и минимум с помощью производной:

$$f'(v) = \left(\frac{v^2}{6v}\right)' + \left(\frac{13v}{6v}\right)' + \left(\frac{36}{6v}\right)' = \frac{1}{6} - \frac{6}{v^2}.$$

Учитывая, что $v > 0$, найдем, что производная обращается в 0 при $v = 6$.

При $v = 6$ км/ч функция $f(v)$ принимает наименьшее значение, равное $\frac{25}{6}$ часа, или 4 часа 10 минут.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. Известно, что медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$

Поэтому треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна 180° . Тогда $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90^\circ$. Следовательно, треугольник ABC прямоугольный.

б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим:

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

$$\text{Тогда } AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}(AB^2 + BC^2) = \frac{5}{4}AC^2 = 125.$$

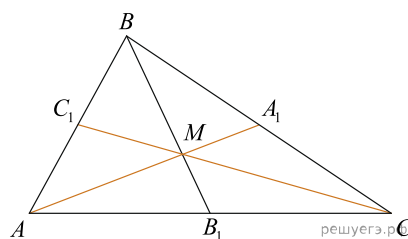
Ответ: 125.

Приведём другое решение пункта а).

Покажем, что медиана, проведенная к стороне AC , равна половине этой стороны. Тогда угол, противолежащий стороне AC , равен 90° , что и требуется доказать. Действительно, медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины. Значит, $BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC$.

Приведём еще одно решение пункта а).

Треугольник AB_1B — равнобедренный, $AB_1 = B_1C = B_1B$. Отрезок B_1C_1 — высота треугольника AB_1B , отрезок B_1C_1 — средняя линия треугольника ABC , тогда прямые B_1B и CB параллельны. Значит, прямые BC и AB перпендикулярны по теореме о перпендикулярности прямой, параллельной перпендикуляру.



Поскольку $AB_1 = BB_1 = CB_1$, точка B_1 — центр описанной окружности, а AC — ее диаметр. Тогда угол B прямой, так как опирающийся на диаметр.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Тогда $DQ = 25$ и $\operatorname{tg} \angle DQM = \frac{MD}{DQ} = \frac{3}{5}$, откуда

$$AD = BC = CM \cdot \operatorname{ctg} \angle CBM = 17 \cdot \operatorname{ctg} \angle MQD = 17 \cdot \frac{5}{3} = \frac{85}{3}.$$

Ответ: $\frac{85}{3}$.

При решении пункта б) можно воспользоваться тем, что треугольники BCM и MDP подобны по двум углам по доказанному в пункте а). Тогда

$$\frac{BC}{DM} = \frac{CM}{DP} \Leftrightarrow AD = BC = \frac{DM \cdot CM}{DP} = \frac{(32-17) \cdot 17}{9} = \frac{85}{3}.$$

№ 173.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. Заметим сначала, что $AE^2 + EK^2 = 9 + 4 = 13 = AK^2$, значит, $\angle AEK = 90^\circ$ по обратной теореме Пифагора. Тогда $\angle BEA = 90^\circ - \angle CEK = \angle CKE$. Следовательно, треугольники ABE и ECK подобны по двум углам. Из подобия имеем:

$$\frac{BE}{CK} = \frac{AE}{EK} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow CK = \frac{2}{3}BE.$$

б) Коэффициент подобия треугольников ABE и ECK равен $\frac{3}{2}$. Пусть $AB = 3x$, $BE = 3y$, $EC = 2x$, $CK = 2y$. Из равенства сторон квадрата получаем:

$$3x = 3y + 2x \Leftrightarrow x = 3y.$$

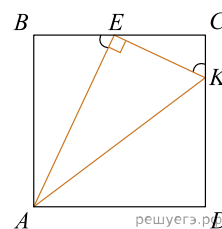
Из прямоугольного треугольника ABE по теореме Пифагора находим:

$$(3x)^2 + x^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{10}.$$

$ABCK$ — прямоугольная трапеция, поэтому ее площадь равна

$$S = \frac{AB + CK}{2} \cdot BC = \frac{3x + \frac{2}{3}x}{2} \cdot 3x = \frac{11}{2}x^2 = \frac{99}{20} = 4,95.$$

Ответ: б) 4,95.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

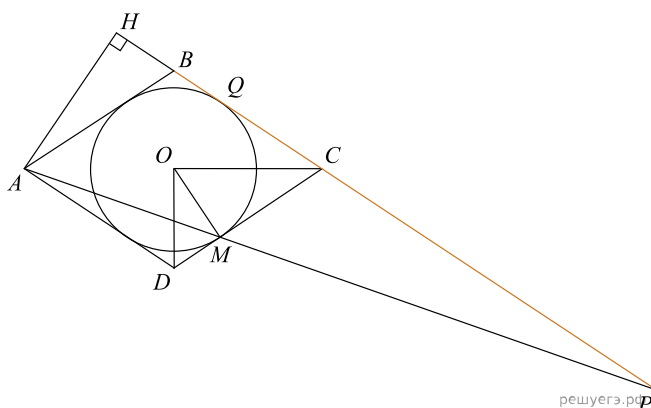
Решение. а) Обозначим $DM = BQ = x$, $CM = y$. Треугольники CMP и DMA подобны с коэффициентом подобия $\frac{CM}{MD} = \frac{y}{x}$, поэтому

$$CP = \frac{y}{x} \cdot AD = \frac{y(x+y)}{x}.$$

Тогда

$$BP = BC + CP = x + y + \frac{y(x+y)}{x} = (x+y) \left(1 + \frac{y}{x}\right) = \frac{(x+y)^2}{x} = \frac{BC^2}{BQ}.$$

Следовательно, $BP \cdot BQ = BC^2$.



б) Пусть O — центр окружности радиуса r , вписанной в ромб. Тогда OM — высота прямоугольного треугольника COD , проведённая из вершины прямого угла, поэтому

$$r = OM = \sqrt{DM \cdot MC} = \sqrt{1 \cdot 4} = 2.$$

Значит, высота ромба равна $2r = 4$.

Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую BC . Тогда AH — высота ромба, поэтому

$$AH = 2r = 4; \quad BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Из подобия треугольников CMP и DMA находим, что

$$CP = \frac{CM}{MD} \cdot AD = 4 \cdot 5 = 20.$$

Значит,

$$PH = CP + BC + BH = 20 + 5 + 3 = 28.$$

Из прямоугольного треугольника AHP находим, что

$$\operatorname{tg} \angle APH = \frac{AH}{PH} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}.$$

Следовательно, $\angle APC = \angle APH = \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$.

Приведем решение пункта а) Григория Осокина.

Заметим, что $\angle BAQ = \angle DAM$, поскольку треугольники BAQ и ADM равны по двум сторонам и углу между ними. Углы DAM и BPA равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых BP и AD секущей AP . Тогда $\angle BAQ = \angle BPA$.

Следовательно, треугольники BAQ и BAP подобны по двум углам, значит,

$$\frac{BA}{BP} = \frac{BQ}{BA} \Leftrightarrow AB^2 = BP \cdot BQ.$$

Тогда $BP \cdot BQ = BC^2$, поскольку $BC = AB$.

№ 175.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Треугольник BOC подобен треугольнику DOA по двум углам, поэтому

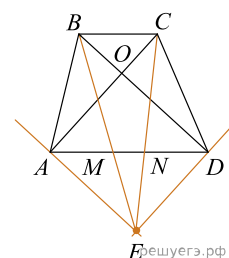
$$\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}.$$

Отрезки AO и ED , DO и AE соответственно параллельны, следовательно, $AODE$ — параллелограмм, значит, $AE = DO$ и $BO : AE = 1 : 2$, что и требовалось доказать.

б) Треугольник AME подобен треугольнику DMB по двум углам, отсюда следует, что

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AE}{BD} = \frac{AE}{1,5AE} = \frac{2}{3} \Rightarrow AM = \frac{2}{5}AD.$$

Аналогично



Ершуга.рф

$$CO = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}DE \Rightarrow AC = 1,5DE \Rightarrow DN = \frac{2}{5}AD \Rightarrow MN = \frac{1}{5}AD = 2.$$

Ответ: б) 2.

№ 176.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) По теореме об угле между касательной и хордой $\angle BKC = \angle KPC$. Из этого следует, что прямоугольные треугольники CBK и CHP подобны по двум углам.

б) Аналогично пункту а) доказывается подобие прямоугольных треугольников CHK и CDP . Тогда верны равенства:

$$\frac{CB}{CK} = \frac{CH}{CP},$$

$$\frac{CH}{CK} = \frac{CD}{CP},$$

откуда

$$CB \cdot CP = CH \cdot CK,$$

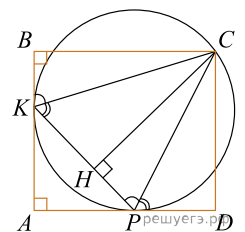
$$CK \cdot CD = CH \cdot CP.$$

Перемножая полученные выражения, получаем

$$CB \cdot CP \cdot CK \cdot CD = CH^2 \cdot CK \cdot CP \Leftrightarrow CB \cdot CD = CH^2,$$

откуда $S_{ABCD} = 49$.

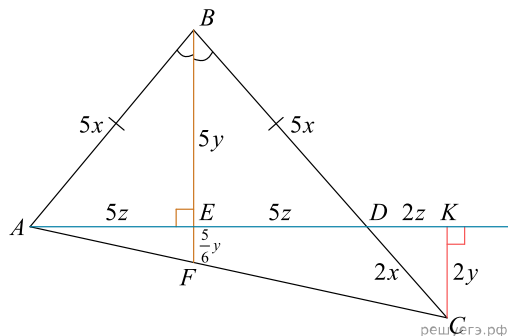
Ответ: б) 49.



№ 177.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) В равнобедренном треугольнике ABD биссектриса BE является и высотой, значит, прямая BF перпендикулярна прямой AD . Тогда прямые BF и CK параллельны. По теореме Фалеса $AE : EK = AF : FC$. По свойству биссектрисы треугольника $AF : FC = AB : BC$. Значит, $AE : EK = AB : BC$, что и требовалось доказать.



б) Пусть $BD = 5x = AB$, а $CD = 2x$, тогда $BC = 7x$. Треугольники BDE и CDK подобны по двум углам ($\angle BDE = \angle KDC$, как вертикальные, $\angle BED = \angle CKD = 90^\circ$), треугольники AEF и AKC подобны по двум углам (угол A — общий, $\angle AEF = \angle AKC = 90^\circ$). Пусть $CK = 2y$, а $KD = 2z$, тогда $BE = 5y$, $AE = 5z$, $EF = \frac{5}{6}y$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{S_{ABE}}{S_{CDEF}} &= \frac{S_{ABE}}{S_{CKEF} - S_{CKD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5y \cdot 5z}{\frac{1}{2} (2y + \frac{5}{6}y) \cdot 7z - \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 2z} = \frac{25 \cdot 6}{17 \cdot 7 - 24} = \frac{30}{19} \cdot \frac{S_{ABE}}{S_{CDEF}} = \frac{S_{ABE}}{S_{CKEF} - S_{CKD}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 5y \cdot 5z}{\frac{1}{2} (2y + \frac{5}{6}y) \cdot 7z - \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 2z} = \frac{25 \cdot 6}{17 \cdot 7 - 24} = \frac{30}{19}. \end{aligned}$$

Ответ: 30 : 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Отрезок KB — хорда, на которую опирается прямой угол, то есть диаметр окружности. Следовательно, вписанный угол KMB — прямой, потому что опирается на диаметр. Смежный с ним угол AMK также прямой, тогда треугольники AKM и ABC подобны по двум углам.

б) Найдем площадь четырехугольника $CKMB$ как сумму площадей прямоугольных треугольников CKB и BMK . Из прямоугольных треугольников KCB и ABC по теореме Пифагора соответственно получаем:

$$CK = \sqrt{KB^2 - BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{29})^2 - 4^2} = \sqrt{116 - 16} = 10,$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 16} = 4\sqrt{10}.$$

Из подобия треугольников AKM и ABC получаем $\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{KM}$, откуда

$$AM = \frac{AC \cdot (AC - CK)}{AB} = \frac{12 \cdot 2}{4\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5},$$

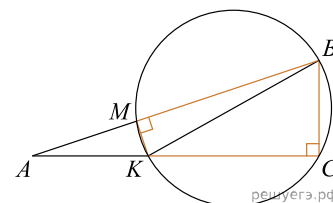
$$KM = \frac{BC \cdot (AC - CK)}{AB} = \frac{4 \cdot 2}{4\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$BM = AB - AM = 4\sqrt{10} - \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{17\sqrt{10}}{5}.$$

Таким образом, площадь четырехугольника $CKMB$ равна

$$\begin{aligned}
 S_{CKMB} &= S_{CKB} + S_{BMK} = \frac{1}{2} \cdot CK \cdot CB + \frac{1}{2} \cdot BM \cdot KM = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{17\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} = 20 + \frac{17}{5} = \frac{117}{5}. \quad S_{CKMB} = S_{CKB} + S_{BMK} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot CK \cdot CB + \frac{1}{2} \cdot BM \cdot KM = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{17\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} = 20 + \frac{17}{5} = \frac{117}{5}.
 \end{aligned}$$

Ответ: б) $\frac{117}{5}$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть общая касательная к данным окружностям, проведённая через точку C , пересекает общую касательную AB в точке M . Тогда $MA = MC = MB$, то есть медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB . Значит, $\angle ACB = 90^\circ$. Тогда $\angle ACE = 90^\circ$, поэтому AE — диаметр меньшей окружности. Следовательно, прямая AE перпендикулярна прямой AB . Аналогично докажем, что прямая BD перпендикулярна прямой AB . Прямые AE и BD перпендикулярны одной и той же прямой AB , значит, они параллельны.

б) Пусть радиусы окружностей равны r и R , где $r < R$. Заметим (доказательство ниже), что $AB = 2\sqrt{rR}$. Проведем равный AB перпендикуляр EF из точки E на BD . Тогда:

$$\begin{aligned}
 DE &= \sqrt{EF^2 + DF^2} = \sqrt{AB^2 + (BD - BF)^2} = \\
 &= \sqrt{4rR + (2R - 2r)^2} = 2\sqrt{R^2 + r^2 - Rr} = 2\sqrt{25 + 4 - 10} = 2\sqrt{19}. \quad DE = \sqrt{EF^2 + DF^2} = \\
 &= \sqrt{AB^2 + (BD - BF)^2} = \sqrt{4rR + (2R - 2r)^2} = \\
 &= 2\sqrt{R^2 + r^2 - Rr} = 2\sqrt{25 + 4 - 10} = 2\sqrt{19}.
 \end{aligned}$$

Отрезок AC — высота прямоугольного треугольника ABE , проведённая из вершины прямого угла, а EB и ED — секущие к большей окружности, проведённые из одной точки, поэтому

$$EL \cdot DE = EC \cdot EB = AE^2.$$

Следовательно,

$$EL = \frac{EC \cdot EB}{ED} = \frac{AE^2}{ED} = \frac{16}{2\sqrt{19}} = \frac{8\sqrt{19}}{19}.$$

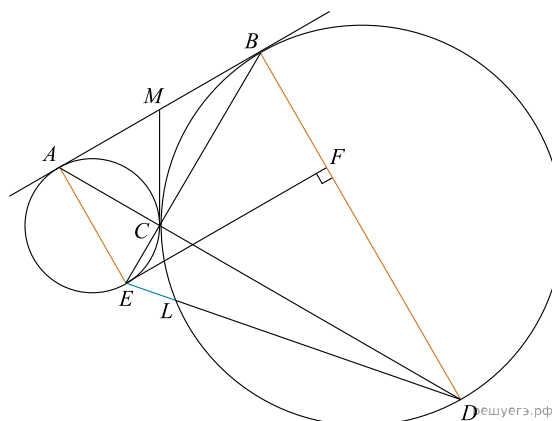
Ответ: $\frac{8\sqrt{19}}{19}$.

Примечание.

Докажем, что заключенный между точками касания отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям равен $2\sqrt{rR}$.

Пусть точка O_1 — центр окружности радиусом r , точка O_2 — центр окружности радиусом R , и пусть A и B — точки касания окружностей с касательной. Не ограничивая общности, будем считать, что $R > r$. Покажем, что $AB = 2\sqrt{rR}$.

Из точки O_1 проведём к O_2B перпендикуляр O_1H . Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, потому отрезки O_1A_1 и O_2A_2 , перпендикулярные общей касательной, параллельны между собой. От-



резки AB и O_1H , перпендикулярные радиусу O_2B , также параллельны между собой. Следовательно, четырёхугольник O_1ABH — параллелограмм, являющийся прямоугольником. Противоположные стороны прямоугольника равны, поэтому $HB = O_1A = r$.

Треугольник O_1HO_2 — прямоугольный, в нём $O_1O_2 = R + r$, $O_2H = R - r$. По теореме Пифагора находим:

$$O_1H^2 = O_1O_2^2 - O_2H^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr.$$

Следовательно, $AB = O_1H = 2\sqrt{Rr}$.

№ 180.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б и использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) По теореме об угле между касательной и хордой находим, что $\angle CAK = \angle ABK$. Аналогично $\angle BAK = \angle ACK$. Таким образом,

$$\angle AKC = 180^\circ - \angle CAK - \angle ACK = 180^\circ - \angle ABK - \angle BAK = \angle AKB.$$

Что и требовалось доказать.

б) По условию $\operatorname{tg} \angle CAB = \frac{1}{\sqrt{15}}$, значит,

$$\cos \angle CAB = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{15}}} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

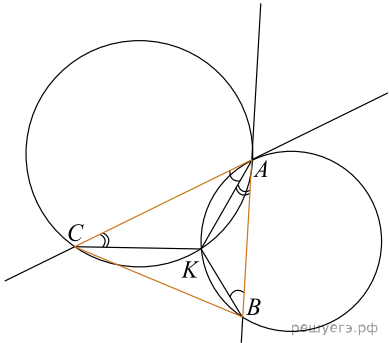
тогда $\sin \angle CAB = \frac{1}{4}$. Из подобия треугольников AKC и AKB получаем, что $AK : KC = BK : AK$. Отсюда $AK = 2$, и коэффициент подобия равен 2.

Заметим теперь, что $\angle AKC = 180^\circ - \angle BAC$. Значит, $\cos AKC = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. Запишем теорему косинусов для треугольника AKC :

$$AC^2 = 4 + 16 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 20 + 4\sqrt{15} \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{5 + \sqrt{15}}.$$

Далее, $AB : AC = 1 : 2$, тогда $AB = \sqrt{5 + \sqrt{15}}$, откуда находим площадь треугольника ABC :

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \frac{1}{4} = \frac{5 + \sqrt{15}}{4}.$$



Ответ: $\frac{5 + \sqrt{15}}{4}$.

№ 181.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(8 \sin^4 x)^5 + 5(8 \sin^4 x) = (4 \sin x + a)^5 + 5(4 \sin x + a).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^5 + 5t$, тогда исходное уравнение записывается в виде $f(8 \sin^4 x) = f(4 \sin x + a)$. Функция f возрастает как сумма возрастающих функций. Монотонная функция принимает все свои значения единожды, поэтому равенство значений функции достигается только при равенстве аргументов:

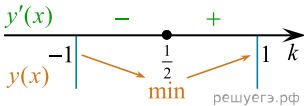
$$8 \sin^4 x = 4 \sin x + a \Leftrightarrow a = 8 \sin^4 x - 4 \sin x.$$

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда множество значений параметра совпадает с множеством значений функции $g(k) = 8k^4 - 4k$ на промежутке $[-1; 1]$. Найдём стационарные точки функции g :

$$32k^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow k^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Изобразим на рисунке знаки производной и поведение функции, получим:

$$\min_{[-1; 1]} g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$



Сравним значения в граничных точках, чтобы определить наибольшее значение функции на отрезке:

$$g(-1) = 8 + 4 = 12,$$

$$g(1) = 8 - 4 = 4,$$

$$\max_{[-1; 1]} g(x) = g(-1) = 12.$$

Таким образом, $a \in \left[-\frac{3}{2}; 12\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; 12\right]$.

№ 182.

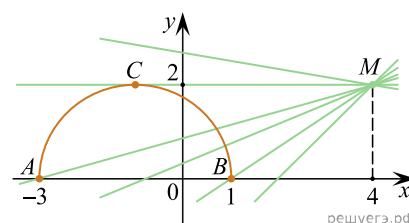
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a = -\frac{2}{3}$, $a = -\frac{2}{7}$, $a = 0$. Ответ отличается от верного только исключением точки $a = -\frac{2}{3}$ и/или включением точки $a = -\frac{2}{7}$	3
Обоснованно получены все значения: $a = -\frac{2}{3}$, $a = -\frac{2}{7}$, $a = 0$	2
Верно найдено одно или два из значений $a = -\frac{2}{3}$, $a = -\frac{2}{7}$ или $a = 0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Запишем уравнение в виде $\sqrt{3-2x-x^2} = -ax+4a+2$. Рассмотрим две функции: $f(x) = \sqrt{3-2x-x^2}$ и $g(x) = -ax+4a+2 = -a(x-4)+2$. Графиком функции $f(x) = \sqrt{3-2x-x^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1, 0)$, лежащая в верхней полуплоскости. При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(4, 2)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC , проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA , заданная уравнением $y = -ax+4a+2$, проходит через точки $M(4, 2)$ и $A(-3, 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a = \frac{2}{7}$. При $0 < -a \leq \frac{2}{7}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент не больше, чем у прямой MA , и пересекает полуокружность в двух точках. При $\frac{2}{7} < -a \leq \frac{2}{3}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA , и не больше, чем у прямой MB , и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{2}{3} \leq a < -\frac{2}{7}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a > \frac{2}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.



Ответ: $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{7}\right) \cup \{0\}$.

№ 183.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен правильный ответ, но допущена описка или арифметическая ошибка не принципиального характера.	3
С помощью верного рассуждения получены значения $a = 2$ и $a = 0$.	2
Показано, что при $a = 2$ система имеет единственное решение.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Система не меняется при смене знака переменной y . Поэтому, поскольку система должна иметь единственное решение, это решение должно иметь вид $(x; 0)$. Найдем, при каких a система будет иметь решения $(x; 0)$.

Для $y = 0$ система принимает вид

$$\begin{cases} 3a = x + 3, \\ |x| = 3, \end{cases}$$

откуда $x = \pm 3$, тогда $a = 2$ или $a = 0$. Осталось проверить, не имеет ли система других решений кроме $(3; 0)$ для $a = 2$ и $(-3; 0)$ для $a = 0$.

Если $a = 2$, то имеем:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2(y^4 + 3) = x + 3(1 - |y|), \\ |x| + |y| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y^4 + 3|y| + 3, \\ 2y^4 + 3|y| + 3 + |y| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y^4 + 3|y| + 3, \\ 2y^4 + 4|y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y^4 + 3|y| + 3, \\ |y|(|y|^3 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 0. \end{cases} \begin{cases} 2(y^4 + 3) = x + 3(1 - |y|), \\ |x| + |y| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y^4 + 3|y| + 3, \\ 2y^4 + 3|y| + 3 + |y| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y^4 + 3|y| + 3, \\ 2y^4 + 4|y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y^4 + 3|y| + 3, \\ |y|(|y|^3 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 0. \end{cases} \begin{cases} 2(y^4 + 3) = x + 3(1 - |y|), \\ |x| + |y| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y^4 + 3|y| + 3, \\ 2y^4 + 3|y| + 3 + |y| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y^4 + 3|y| + 3, \\ 2y^4 + 4|y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y^4 + 3|y| + 3, \\ |y|(|y|^3 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, система имеет единственное решение.

Если $a = 0$, то имеем:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 0 = x + 3(1 - |y|), \\ |x| + |y| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3|y| - 3, \\ |3|y| - 3| + |y| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3|y| - 3, \\ 3||y| - 1| + |y| = 3. \end{cases} (*) \begin{cases} 0 = x + 3(1 - |y|), \\ |x| + |y| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3|y| - 3, \\ |3|y| - 3| + |y| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3|y| - 3, \\ 3||y| - 1| + |y| = 3. \end{cases} (*) \end{aligned}$$

При $y \geq 1$ уравнение $(*)$ принимает вид $4y - 3 = 3$ и имеет корень $y = \frac{3}{2}$. Следовательно, при $a = 0$, система имеет более одного решения. (Нетрудно показать, что решений 3, но об этом не спрашивают.)

Ответ: $a = 2$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = 0$, $a = 6$, $a = 8$ и/или $a = 14$.	3
Исследована функция $f(t) = t^4 - 32t$ при $0 \leq t \leq 2$, и задача сведена к решению двойного неравенства $-48 \leq a^2 - 14a \leq 0$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения.	2
Задача сведена к исследованию функции $f(t) = t^4 - 32t$ при $t \geq 0$, и получено, что $f(t) \geq -48$.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Первый способ. Положим, $\sqrt{4x - x^2} = t$, где $0 \leq t \leq 2$, поскольку $0 \leq 4x - x^2 \leq 4$.

Тогда исходное уравнение принимает вид $t^4 - 32t = a^2 - 14a$. Найдем множество значений функции $f(t) = t^4 - 32t$ на отрезке $[0; 2]$. $f'(t) = 4t^3 - 32 = 4(t^3 - 8) < 0$ на промежутке $[0; 2)$, поэтому функция убывает на отрезке $[0; 2]$ и, следовательно, множество ее значений на отрезке $[0; 2]$ — отрезок $[f(2); f(0)]$, то есть отрезок $[-48; 0]$. Таким образом, уравнение $f(t) = a^2 - 14a$ имеет решения тогда и только тогда, когда выполняются условия $-48 \leq a^2 - 14a \leq 0$.

$$\begin{cases} a^2 - 14a \leq 0, \\ a^2 - 14a + 48 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 14, \\ \begin{cases} a \leq 6, \\ a \geq 8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 6, \\ 8 \leq a \leq 14. \end{cases}$$

Второй способ. Положим $\sqrt{4x - x^2} = t$, где $0 \leq t \leq 2$, поскольку $0 \leq 4x - x^2 \leq 4$, и рассмотрим функцию $f(t) = t^4 - 32t - a^2 + 14a$. Ее производная $f'(t) = 4t^3 - 32 = 4(t^3 - 8) < 0$ на промежутке $[0; 2)$, поэтому функция убывает на отрезке $[0; 2]$ и, значит, имеет на нем не более одного корня. Этот корень есть тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия $f(0) \geq 0$ и $f(2) \leq 0$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} a^2 - 14a \leq 0, \\ a^2 - 14a + 48 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 14, \\ \begin{cases} a \leq 6, \\ a \geq 8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 6, \\ 8 \leq a \leq 14. \end{cases}$$

Третий способ (указание). Построить эскиз графика функции $f(t) = t^4 - 32t$ на отрезке $[0; 2]$ (см. решение1) и исследовать взаимное расположение графика этой функции и прямой $y = a^2 - 14a$.

Ответ: $0 \leq a \leq 6$, $8 \leq a \leq 14$.

№ 185.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Преобразуем уравнение:

$$(\operatorname{ctg} x + 3)^2 + 2a^3 + 3a^2 = (a^2 + 2a + 3)(\operatorname{ctg} x + 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{ctg} x + 3)^2 - (a^2 + 2a + 3)(\operatorname{ctg} x + 3) + a^2(2a + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x + 3 = a^2, \\ \operatorname{ctg} x + 3 = 2a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x = a^2 - 3, \\ \operatorname{ctg} x = 2a. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{ctg} x + 3)^2 - (a^2 + 2a + 3)(\operatorname{ctg} x + 3) + a^2(2a + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

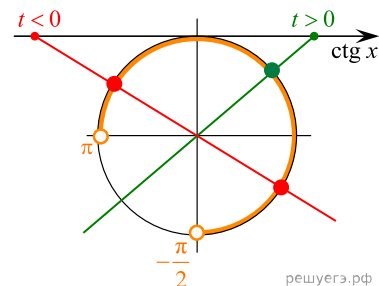
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x + 3 = a^2, \\ \operatorname{ctg} x + 3 = 2a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x = a^2 - 3, \\ \operatorname{ctg} x = 2a. \end{cases}$$

Заметим, что уравнение $\operatorname{ctg} x = t$ при $t \geq 0$ имеет один корень на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \pi)$, а при $t < 0$ — два корня на этом интервале. Тогда исходное уравнение имеет ровно два корня на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \pi)$ в двух случаях: или

$$\begin{cases} a^2 - 3 = 2a, \\ 2a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ a = 3, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1,$$

или

$$\begin{cases} a^2 - 3 \geq 0, \\ 2a \geq 0, \\ a^2 - 3 \neq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \sqrt{3}, \\ a \geq 0, \\ a \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \leq a < 3, \\ a > 3. \end{cases}$$



Объединяя полученные значения, получаем ответ.

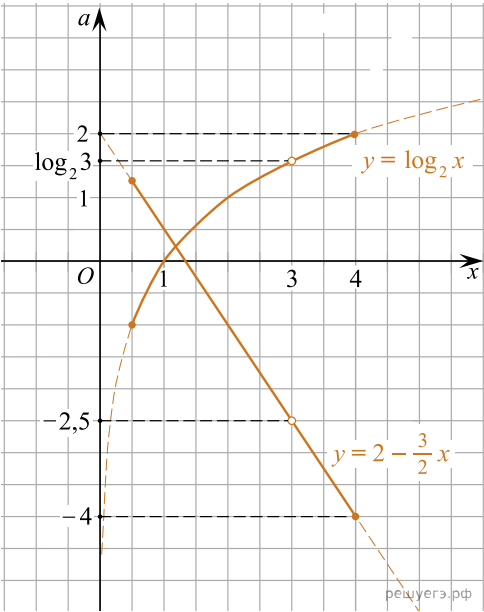
Ответ: $\{-1\} \cup [\sqrt{3}; 3) \cup (3; +\infty)$.

№ 186.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом отличен от нуля. Чтобы найти нули числителя, получим квадратное относительно параметра уравнение и воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета:

$$\begin{aligned} \frac{2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2)}{x^2 - 3x} = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2) = 0, \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a \left(2 - \frac{3}{2}x + \log_2 x \right) + \left(2 - \frac{3}{2}x \right) \cdot \log_2 x = 0, \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = \log_2 x, \\ a = 2 - \frac{3}{2}x, \end{cases} \\ x \neq 3, \\ x > 0. \end{cases} \\ \frac{2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2)}{x^2 - 3x} = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2) = 0, \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a \left(2 - \frac{3}{2}x + \log_2 x \right) + \left(2 - \frac{3}{2}x \right) \cdot \log_2 x = 0, \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = \log_2 x, \\ a = 2 - \frac{3}{2}x, \end{cases} \\ x \neq 3, \\ x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$



Построим график полученной системы на отрезке $[0,5;4]$ в системе координат xOa . По графику определяем, что исходное уравнение имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0,5;4]$ при $-4 \leq a < -2,5$, $-2,5 < a < \log_2 3$ или при $\log_2 3 < a \leq 2$.

Ответ: $[-4; -2,5) \cup (-2,5; \log_2 3) \cup (\log_2 3; 2]$.

№ 187.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Решим задачу графо-аналитическим способом. Уравнение $(y - a^2 - 3a + 18)^2 + (x - 6a)^2 = 3 \cdot |a|^{-\frac{a}{2}}$ задает окружность с центром в точке $(6a; a^2 + 3a - 18)$ и радиусом $R = \sqrt{3 \cdot |a|^{-\frac{a}{2}}}$.

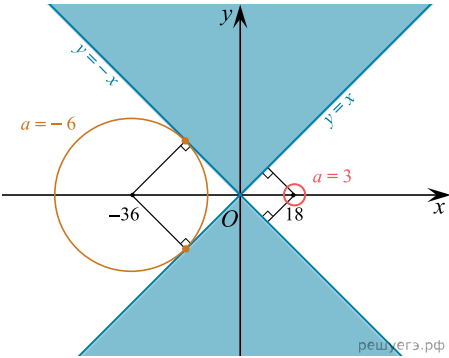
Преобразуем неравенство:

$$y^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x, \\ y \leq -x, \\ y \geq x, \\ y \geq -x. \end{cases}$$

На плоскости xOy множество точек, удовлетворяющих полученной совокупности, представляют собой пару вертикальных углов (см.рис., выделено синим). Для того чтобы исходная система имела ровно два решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность одновременно касалась прямых $y = x$ и $y = -x$. Для этого необходимо, чтобы центр окружности лежал на оси абсцисс. Получаем условие:

$$a^2 + 3a - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6, \\ a = 3. \end{cases}$$

В противном случае система либо не будет иметь решений, либо будет иметь одно решение, либо бесконечно много решений.



Проверим, являются ли прямые $y = x$ и $y = -x$ касательными к окружности при найденных значениях параметра.

При $a = -6$ центр окружности имеет координаты $(-36; 0)$, а радиус равен $R = \sqrt{3 \cdot 6^3}$. Расстояние от точки $(-36; 0)$ до прямых $y = x$ и $y = -x$ равно стороне квадрата с диагональю 36, то есть $18\sqrt{2}$. Равенство $\sqrt{3 \cdot 6^3} = 18\sqrt{2}$ является верным, значит, при $a = -6$ окружность касается прямых $y = x$ и $y = -x$ (изображено оранжевым).

При $a = 3$ центр окружности имеет координаты $(18; 0)$, а радиус равен $R = \sqrt{3 \cdot 3^3}$. Расстояние от точки $(18; 0)$ до прямых $y = x$ и $y = -x$ равно стороне квадрата с диагональю 18, то есть $9\sqrt{2}$. Равенство $\sqrt{3 \cdot 3^3} = 9\sqrt{2}$ является неверным, значит, при $a = 3$ окружность не касается прямых $y = x$ и $y = -x$ (изображено красным).

Таким образом, система имеет ровно два решения только при $a = -6$.

Ответ: -6 .

№ 188.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Рассмотрим три случая раскрытия модулей

Случай 1. При $x \leq -8$ получаем:

$$\begin{aligned} a(-x-8) + (2-a)(-x+8) + 6 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -ax - 8a - 2x + 16 + ax - 8a + 6 &= 0 \Leftrightarrow 2x + 16a = 22 \Leftrightarrow x = 11 - 8a. \quad a(-x-8) + (2-a)(-x+8) + 6 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -ax - 8a - 2x + 16 + ax - 8a + 6 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x + 16a = 22 \Leftrightarrow x &= 11 - 8a. \end{aligned}$$

Число $11 - 8a$ является корнем исходного уравнения при условии

$$11 - 8a \leq -8 \Leftrightarrow 8a \geq 19 \Leftrightarrow a \geq \frac{19}{8}.$$

Случай 2. При $-8 < x \leq 8$ получаем:

$$\begin{aligned} a(x+8) + (2-a)(-x+8) + 6 &= 0 \Leftrightarrow ax + 8a - 2x + 16 + ax - 8a + 6 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2ax - 2x + 22 &= 0 \Leftrightarrow x(a-1) = -11, \quad a(x+8) + (2-a)(-x+8) + 6 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ax + 8a - 2x + 16 + ax - 8a + 6 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2ax - 2x + 22 &= 0 \Leftrightarrow x(a-1) = -11, \end{aligned}$$

Тогда при $a = 1$ на промежутке $(-8; 8]$ корней нет, а при $a \neq 1$ корнем является число $\frac{11}{1-a}$, при условии

$$-8 < \frac{11}{1-a} \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{1-a} + 8 > 0, \\ \frac{11}{1-a} - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{19-8a}{1-a} > 0, \\ \frac{3+8a}{1-a} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -\frac{3}{8}, \\ a > \frac{19}{8}. \end{cases}$$

Случай 3. При $x > 8$ получаем:

$$\begin{aligned} a(x+8) + (2-a)(x-8) + 6 = 0 &\Leftrightarrow ax + 8a + 2x - 16 - ax + 8a + 6 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x + 16a = 10 \Leftrightarrow x = 5 - 8a. \quad a(x+8) + (2-a)(x-8) + 6 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ax + 8a + 2x - 16 - ax + 8a + 6 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x + 16a = 10 \Leftrightarrow x = 5 - 8a. \end{aligned}$$

Число $5 - 8a$ является корнем исходного уравнения при условии

$$5 - 8a > 8 \Leftrightarrow 8a < -3 \Leftrightarrow a < -\frac{3}{8}.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных решения при $a < -\frac{3}{8}$ или $a > \frac{19}{8}$. Дополнительно отметим, что при $a = -\frac{3}{8}$ или $a = \frac{19}{8}$ уравнение имеет единственное решение, при других значениях параметра уравнение не имеет решений.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{19}{8}; +\infty\right)$.

№ 189.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но число -3 ошибочно включено в ответ.	3
С помощью верного рассуждения получены значения параметра a , отличающиеся от верных только включением лишних точек 0, 2, 6 и 12.	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения графика функции и прямой (аналитически или графически).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. В системе координат xOa изобразим ломаную, задаваемую уравнением $a = |4x| - x - 3$, все точки которой обращают числитель дроби в нуль, и параболу $a = x^2 - x$, точки которой соответствуют нулям знаменателя.

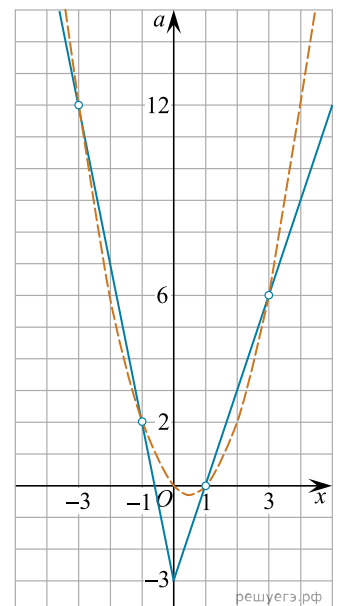
Подставляя $a = x^2 - x$ в уравнение $a = |4x| - x - 3$ и решая полученное уравнение на x , найдем абсциссы точки пересечения ломаной и параболы:

$$|4x| - x - 3 = x^2 - x \Leftrightarrow |4x| = x^2 + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = x^2 + 3, \\ 4x = -(x^2 + 3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 3, \\ x = -1, \\ x = -3. \end{cases}$$

Ординаты точек пересечения суть 0, 6, 2 и 12 соответственно. Для найденных значений параметра числитель и знаменатель обращаются в нуль одновременно.

Следовательно, заданное уравнение имеет ровно два решения, когда $a \in (-3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6) \cup (6; 12) \cup (12; +\infty)$.



Ответ: $a \in (-3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6) \cup (6; 12) \cup (12; +\infty)$.

№ 190.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано.	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной.	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Вычтем из второго уравнения первое и сгруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 6y = 0, \\ 5x^2 - 16xy + 13y^2 - 6x + 10y + 2ax - 4ay + a^2 - 2a - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 3y)^2 + (2x - 3y) - 3y = 0, \\ (x - 2y)^2 - 2(4 - a)(x - 2y) + a^2 - 2a - 5 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть $2x - 3y = s$, $x - 2y = t$, тогда $-3y = 6t - 3s$. Получаем систему

$$\begin{cases} s^2 + s + 6t - 3s = 0, \\ t^2 - 2(4 - a)t + a^2 - 2a - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s - 1)^2 = 1 - 6t, \\ t^2 - 2(4 - a)t + a^2 - 2a - 5 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет решение при $1 - 6t \geq 0$, тогда система имеет решения в том случае, когда уравнение $t^2 - 2(4 - a)t + a^2 - 2a - 5 = 0$ имеет хотя бы один корень, удовлетворяющий условию $t \leq \frac{1}{6}$. Дискриминант этого квадратного уравнения равен

$$D = 4(4 - a)^2 - 4(a^2 - 2a - 5) = 12(7 - 2a).$$

Значит, уравнение имеет корни при $a \leq \frac{7}{2}$.

Рассмотрим квадратичную функцию $f(t) = t^2 - 2(4 - a)t + a^2 - 2a - 5$. Графиком является парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины $t_0 = 4 - a$. При $a \leq \frac{7}{2}$ абсцисса вершины $t_0 \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{6}$. Значит, только один (меньший) корень уравнения $f(t) = 0$ может быть не больше $\frac{1}{6}$. Для этого достаточно, чтобы $f\left(\frac{1}{6}\right) \leq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{36} - \frac{4 - a}{3} + a^2 - 2a - 5 \leq 0 &\Leftrightarrow a^2 - \frac{5}{3}a - \frac{227}{36} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{6} - \sqrt{7} \leq a \leq \frac{5}{6} + \sqrt{7}. \\ \frac{1}{36} - \frac{4 - a}{3} + a^2 - 2a - 5 \leq 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 - \frac{5}{3}a - \frac{227}{36} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{6} - \sqrt{7} \leq a \leq \frac{5}{6} + \sqrt{7}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left[\frac{5}{6} - \sqrt{7}; \frac{5}{6} + \sqrt{7}\right]$.

№ 191.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Записав число $\overline{abc}$ в виде $100a + 10b + c$ и остальные пять чисел аналогично, вычислим предварительно:

$$\begin{aligned}
 f(a, b, c) &= \\
 &= 100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a = \\
 &= 222(a + b + c).
 \end{aligned}$$

а) Равенство $222(a + b + c) = 1754$ невозможно, поскольку 1754 не кратно 3, а 222 кратно 3.
б) Заметим, что минимальное значение $a + b + c$ это $1 + 1 + 1 = 3$, а максимальное $9 + 9 + 9 = 27$. Все промежуточные значения тоже возможны: если сначала увеличивать самое большое число ($1 + 1 + 2, 1 + 1 + 3, \dots, 1 + 1 + 9$), затем следующее и наконец самое маленькое, получим все промежуточные суммы. Количество чисел от 3 до 27 равно 25: $27 - 3 + 1 = 25$.

в) Запишем условие в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{222(a + b + c)}{6} &= 100a + 10b + c \Leftrightarrow 37(a + b + c) = 100a + 10b + c \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 36(a + b + c) &= 99a + 9b \Leftrightarrow 4(a + b + c) = 11a + b \Leftrightarrow 4a + 4b + 4c = 11a + b \Leftrightarrow 3b + 4c = 7a. \quad \Leftrightarrow 36(a + b + c) = 99a + 9b \Leftrightarrow 4(a + b + c) = 11a + b \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 4a + 4b + 4c &= 11a + b \Leftrightarrow 3b + 4c = 7a. \quad \Leftrightarrow 36(a + b + c) = 99a + 9b \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 4(a + b + c) &= 11a + b \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 4a + 4b + 4c &= 11a + b \Leftrightarrow 3b + 4c = 7a.
 \end{aligned}$$

Будем перебирать возможные значения a .

При $a = 1$ получим $b = c = 1$.

При $a = 2$ получим $b = c = 2$.

При $a = 3$ получим $b = c = 3$.

При $a = 4$ получим $b = c = 4$ или $b = 8, c = 1$.

При $a = 5$ получим $b = c = 4$ или $b = 1, c = 8$ или $b = 9, c = 2$.

При $a = 6$ получим $b = c = 6$ или $b = 2, c = 9$.

При $a = 7$ получим $b = c = 7$.

При $a = 8$ получим $b = c = 8$.

При $a = 9$ получим $b = c = 9$.

Всего 13 возможных вариантов.

Ответ: а) нет; б) 25; в) 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Пусть $n = pqx$, тогда $a = px$, $b = qx$ и $m = (p - q)x$.

а) Пусть $x = 1$, $p = 5$, $q = 2$, $n = 10$. Тогда $m = \frac{10}{2} - \frac{10}{5} = 5 - 2 = 3$.

б) Если $(p - q)x = 91$, то число $p - q$ нечетно. Поэтому одно из чисел p и q четно, а значит, $q = 2$. При этом 91 кратно $p - q$, откуда следует, что разность $p - 2$ может равняться 1, 7, 13, 91, то есть p равно 3, 9, 15 или 93. Простое здесь только число 3, но тогда $x = \frac{91}{3 - 2} = 91$, $n = 2 \cdot 3 \cdot 91$ и 3 не будет наибольшим простым делителем — им будет число 13.

в) Если n кратно m , то число

$$\frac{n}{m} = \frac{pqx}{x(p - q)} = \frac{pq}{p - q}$$

будет целым. Заметим, что pq кратно только 1, p , q и pq , при этом $p - q < p$. Вариант $p - q = q$ невозможен, поскольку тогда $p = 2q$. Значит, $p - q = 1$, что возможно только при $p = 3$, $q = 2$. Тогда значения x — это числа, в разложении которых на простые множители есть только степени 2 и 3, и потому $n = 2^a \cdot 3^b$.

Ответ: а) да, б) нет, в) $n = 2^a \cdot 3^b$, $a, b \in \mathbb{N}$.

№ 193.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да, может. Например, если в классе 25 учащихся из них 5 девочек, то доля девочек составляет 20%.

б) Пусть в классе было m учащихся из них n девочек. Тогда по условию $10 < m \leq 26$, а также

$$\frac{n}{m} \leq 0,21 \Leftrightarrow_{m > 0} n \leq 0,21m.$$

Предположим, что после прихода в класс новой девочки доля девочек составит 30%. Тогда

$$\frac{n+1}{m+1} = 0,3 \Leftrightarrow n+1 = 0,3m+0,3 \Leftrightarrow n = 0,3m-0,7,$$

но тогда

$$0,3m-0,7 \leq 0,21m \Leftrightarrow 0,09m \leq 0,7 \Leftrightarrow m \leq 7\frac{7}{9},$$

что противоречит условию $m > 10$, значит, предположение не верно, и после прихода в класс новой девочки доля девочек не может составить 30%.

в) Решим задачу перебором. Заметим, что $26 \cdot 0,21 = 5,46$, значит, до прихода новой девочки в классе не могло быть больше 5 девочек. Рассмотрим все возможные случаи.

Количество девочек	Количество учащихся	Доля девочек после прихода новой девочки
$n = 5$	$\frac{5}{0,21} < 24 \leq m \leq 26$	$\frac{n+1}{m+1} \leq \frac{6}{25} = 0,24$
$n = 4$	$\frac{4}{0,21} < 20 \leq m \leq 26$	$\frac{n+1}{m+1} \leq \frac{5}{21} < 0,24$
$n = 3$	$\frac{3}{0,21} < 15 \leq m \leq 26$	$\frac{n+1}{m+1} \leq \frac{4}{16} = 0,25$
$n = 2$	$\frac{2}{0,21} < 11 \leq m \leq 26$	$\frac{n+1}{m+1} \leq \frac{3}{12} = 0,25$
$n = 1$	$\frac{1}{0,21} < 11 \leq m \leq 26$	$\frac{n+1}{m+1} \leq \frac{2}{12} < 0,25$
$n = 0$	$\frac{0}{0,21} < 11 \leq m \leq 26$	$\frac{n+1}{m+1} \leq \frac{1}{12} < 0,25$

Таким образом, доля девочек после прихода в класс новой девочки не может превышать 0,25 или 25%. Значение 25% достигается, например, при $m = 11$ и $n = 2$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 25.

№ 194.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да, например, $15 \cdot 10 = 150$.

б) Все числа в данном диапазоне начинаются с четверки, а если ее вычеркнуть — будут не меньше 40 (если же ее оставить — тоже будут не меньше 40). Значит, произведение двух двузначных чисел будет не меньше

$$40 \cdot 40 = 1600 > 500 > A.$$

в) Заметим, что $810 = 81 \cdot 10$. Докажем, что для больших чисел описанная ситуация невозможна. Очевидно,

число 811 не получается перемножением чисел 81 и 11 в любых комбинациях.

Если есть подходящее число в диапазоне от 812 до 899, то оно начинается на 8. Если оба двузначных сохраняют в себе эту восьмерку, то их произведение больше чем $80^2 > 900$, что невозможно. Если ни одно ее не сохраняет, то $B = C$ и $A = B^2$, но

$$28^2 = 784 < 811 < 29^2 = 841 < 900 = 30^2,$$

значит, единственным подходящим числом могло бы быть 841, но $41^2 \neq 841$.

Итак, одно из чисел состоит из двух последних цифр числа A (и потому не меньше 12), а второе сохраняет первую цифру (и не меньше 80), значит, их произведение не меньше

$$80 \cdot 12 = 960 > 900 > A.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 810.

№ 195.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно выполнены: a, b, v (пример), v (оценка)	4
Верно выполнены три пункта из четырёх: a, b, v (пример), v (оценка)	3
Верно выполнены два пункта из четырёх: a, b, v (пример), v (оценка)	2
Верно выполнен один пункт из четырёх: a, b, v (пример), v (оценка)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $10a$ (в произвольном порядке), то $a + 10a = 3024$. Уравнение $11a = 3024$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трёх членов: 252, 2520, 252.

в) Приведём пример последовательности из 549 членов: $10, 1, 10, 1, 10, \dots, 1, 10$. Сумма её членов равна

$$10 + 11 \cdot 274 = 3024.$$

Допустим, что в последовательности более чем 549 членов. Разобьём первые 550 членов последовательности на 275 пар соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т.д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 11 и поэтому не меньше 11. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $275 \cdot 11 = 3025 > 3024$. Получили противоречие.

Ответ: а) нет; б) да; в) 549.

№ 196.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходящих и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 11 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше. Театр посетило не более 4 мальчиков, поскольку если бы их было 5 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$, что больше $\frac{4}{13}$. Аналогично, кино посетило не более 6 мальчиков, поскольку $\frac{7}{7+9} = \frac{7}{16} > \frac{2}{5}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 10.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

Из условия:

$$\frac{m_1}{m_1 + d} \leq \frac{4}{13}, \frac{m_2}{m_2 + d} \leq \frac{2}{5},$$

значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{4}{9}, \frac{m_2}{d} \leq \frac{2}{3}$. Тогда $\frac{m_1 + m_2}{d} \leq \frac{10}{9}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1 + m_2 + d} = \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{d} + 1} \geq \frac{1}{\frac{10}{9} + 1} = \frac{9}{19}.$$

Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходящих и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{19}$.

Ответ: а) да; б) 10; в) $\frac{9}{19}$.

№ 197.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Любые два написанных числа дают одинаковые остатки от деления на 4 или 7: если взять три или шесть других чисел и добавить к ним одно из этих двух, то в обоих случаях сумма будет кратна 4 или 7, значит, у заменяющих друг друга чисел одинаковые остатки. Следовательно, разность любых двух написанных чисел кратна 4 или 7, а потому и их наименьшему общему кратному — числу 28. Значит, все числа дают одинаковые остатки от деления на 28. Напротив, если у всех чисел остатки одинаковы, то сумма четырех или семи из них будет кратна 4 или 7.

а) Число 567 при делении на 28 дает остаток 7, а число 1414 — остаток 14, поэтому они не подходят.

б) Заметим, что квадраты четных чисел кратны 4, а квадраты нечетных представимы в виде $(4x \pm 1)^2 = 16x^2 \pm 8x + 1$. Следовательно, n^2 не может при делении на 4 давать остаток 3, а именно такой остаток дает число 567.

в) Нужно, чтобы n^2 и n давали одинаковые остатки при делении на 28, то есть чтобы $n^2 - n = n(n - 1)$ было кратно 28. Число 1 является наименьшим натуральным числом и удовлетворяет этому условию. В качестве остальных девяти чисел можно взять числа

1,

$$29 = 28 \cdot 1 + 1,$$

$$57 = 29 \cdot 2 + 1,$$

$$85 = 29 \cdot 3 + 1$$

...,

дающие при делении на 28 остаток 1.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 1.

Примечание.

Проверяющим ЕГЭ экспертам были присланы решения, подразумевающие, что число и его квадрат должны быть различными. В этом случае наименьшим искомым числом является 8. Приведем соответствующее рассуждение.

в) Нужно, чтобы n^2 и n давали одинаковые остатки при делении на 28, то есть чтобы $n^2 - n = n(n - 1)$ было кратно 28. Один из множителей должен быть кратен 7. Число 1 не подходит, поскольку рано своему квадрату. При $n = 7$ произведение равно 42, оно не кратно 28. При $n = 8$ произведение равно 56, оно подходит. Значит, наименьшее подходящее n равно 8. В качестве примера можно взять числа 8, 64 и любые другие 8 чисел, дающие при делении на 28 остаток 8.

Отметим также, что в Москве единицу в пунктах) эксперты засчитывали как верный ответ, а в Вологде неукоснительно следовали присланным решениям и не засчитывали. И на апелляции не засчитали. См.также обсуждение в комментариях ниже.

№ 198.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да, например $109 = 90 + 19$.
б) Сразу заметим, что

$$A = B + C \leq 99 + 99 = 198,$$

поэтому A начинается с цифры 1. Далее, если B и C кратны 3, то и их сумма A кратна 3. Делимость на 3 определяется суммой цифр числа (она должна быть кратна трем), поэтому убирать из A единицу нельзя (от этого остаток от деления на 3 изменится). Значит, и B и C содержат в записи единицу. Тогда вторая их цифра должна быть 2, 5 или 8. Если в числе A были бы две такие цифры, то их сумма с единицей давала бы остаток 2 от деления на 3. Значит, там одна такая цифра, а B и C состоят из одних и тех же двух цифр, одна из которых единица. Осталось разобрать варианты:

— не трехзначные:

$$12 + 12, 12 + 21, 21 + 21, 15 + 15, 15 + 51, 18 + 18, 18 + 81;$$

— не содержат нужных цифр: $51 + 51 = 102$ и $81 + 81 = 162$.

в) Заметим, что $98 + 91 = 189$. Докажем, что это наилучший пример. Если хоть одно из чисел B и C меньше 90, то

$$A = B + C \leq 99 + 90 = 189,$$

поэтому такие примеры рассматривать не нужно.

Если же они оба начинаются с девятки, то $B = 90 + b$, $C = 90 + c$ и $A = 180 + b + c$, где b и c — цифры. Поскольку $A \geq 190$, его последняя цифра равна $b + c - 10$. Ясно, что это не 9, поскольку

$$b + c \leq 9 + 9 = 18 > 19,$$

не b и не c (если например $b = b + c - 10$, то $c = 10$). Значит, эта цифра в числах B и C не используется. Поэтому $B = C = 91$, что тоже невозможно, так как $b + c < 10$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 189.

№ 199.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно выполнены все пункты	4
Верно выполнены три пункта из четырёх	3
Верно выполнены два пункта из четырёх	2
Верно выполнен один пункт из четырёх	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Сумма цифр этого числа равна 21, поэтому число кратно 3 и не может быть простым.

б) Если число имеет нечетное число делителей, то оно является квадратом (иначе все делители разбиваются на пары дающих в произведении исходное число). Но поскольку его сумма цифр 21, оно кратно 3 и не кратно 9, а потому квадратом быть тоже не может.

в) Рассмотрим суммы цифр, стоящих на четных и нечетных местах. По признаку делимости на 11 они должны быть либо равны (невозможно, их общая сумма нечетна), либо отличаться на кратное 11 (то есть в нашем случае на 11, поскольку отличаться на 22 и больше, давая вместе 21, они не могут). Если два числа в сумме дают 21 и отличаются на 11, то это 5 и 16. Однако в этом случае сумма даже минимальных трех цифр слишком велика: $1 + 2 + 3 = 6 > 5$, значит, получить такое число нельзя.

г) Для делимости на 12 необходимо и достаточно обеспечить делимость на 3 (она есть) и на 4. Делимость на 4 проверяется по последним двум цифрам — они должны образовывать число, кратное 4. Перечислим все такие числа: 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64, всего их восемь. К каждому из них нужно поставить вперед четырехзначное число, составленное из остальных четырех цифр, таких чисел $4! = 24$. Значит, ответ $24 \cdot 8 = 192$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) нет; г) 192.

№ 200.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Во время первого прохода слева направо Поля закроет все ячейки с чётными номерами. Открытыми останутся ячейки с нечётными номерами: 1, 3, ..., 47, 49.

Во время второго прохода справа налево Поля закроет ячейки, номера которых при делении на 4 дают в остатке 3: 47, 43, 39, ..., 3. Открытыми останутся ячейки, номера которых при делении на 4 дают в остатке 1: 1, 5, ..., 45, 49.

Во время третьего прохода слева направо Поля закроет все ячейки, номера которых дают при делении на 8 в

остатке 5: 5, 13, 21, 29, 37, 45. Открытыми останутся ячейки, номера которых при делении на 8 дают в остатке 1: 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49.

Во время четвёртого прохода справа налево Поля закроет ячейки, номера которых при делении на 16 дают в остатке 9: 41, 25, 9. Открытыми останутся ячейки, номера которых при делении на 16 дают в остатке 1: 1, 17, 33, 49.

Во время пятого прохода слева направо Поля закроет все ячейки, номера которых дают при делении на 32 остаток 17: 17, 49. Открытыми останутся ячейки, номера которых при делении на 32 дают в остатке 1: 1, 33.

Во время шестого прохода справа налево Поля закроет ячейку 1, номер которой при делении на 64 даёт в остатке 1. Открытой останется ячейка 33, номер которой при делении на 64 даёт в остатке 33.

Таким образом, $f(50) = 33$.

б) Предположим, что нашлось n , такое, что $f(n) = 2013$, т.е. последней открытой ячейкой является ячейка с номером 2013.

Прежде всего, заметим, что если n — чётно, то $f(n) = f(n-1)$, поскольку последняя ячейка с номером n будет закрыта при первом проходе ряда слева направо, таким образом, если бы эта ячейка отсутствовала, то на значении номера последней открытой ячейки это бы не отразилось. Значит, можно считать n нечётным. Во время первого прохода слева направо Поля закроет все ячейки с чётными номерами. Открытыми останутся ячейки с нечётными номерами, то есть с номерами m , дающими при делении на 4 в остатке 1 или 3.

Число 2013 при делении на 4 даёт в остатке 1. Поскольку эта ячейка осталась открытой, то во время второго прохода справа налево Поля закроет ячейки, номера которых при делении на 4 дают в остатке 3. Открытыми останутся ячейки с номерами m , дающими при делении на 4 в остатке 1, то есть с номерами, дающими при делении на 8 в остатке 1 или 5.

Поскольку ячейка с номером 1 осталась открытой, то во время третьего прохода слева направо Поля закроет ячейки, номера которых при делении на 8 дают в остатке 5. Число 2013 при делении на 8 даёт в остатке 5. Значит, она должна быть закрыта во время третьего прохода ряда. Получили противоречие. Следовательно, не существует натурального числа n , такого что $f(n) = 2013$.

в) Пусть $n = 50 + 4^k$, где $k \geq 3$, тогда $f(n) = f(50) = 33$. После первых шести проходов из первых 50 ячеек останется открытой одна ячейка с номером 33, а количество открытых ячеек с номерами, большими 50, уменьшится в 2^6 раз и будет равно 4^{k-3} . Если $k > 3$, то после каждой пары проходов слева направо и справа налево ячейка с номером 33 будет оставаться открытой, а количество ячеек с номерами, большими 50, будет уменьшаться в 4 раза. В конце концов, останутся открытыми 2 ячейки: одна — с номером 33, и другая — с каким-то номером, большим 50, которая будет закрыта во время последнего прохода слева направо. Значит, $f(n) = 33$.

Ответ: а) 33; в) 33.
