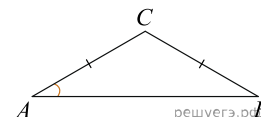


Вариант 278

ID: 14036

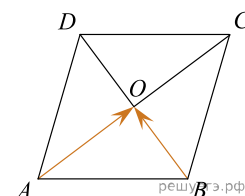
№ 1.

В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 8$, $\operatorname{tg} A = \frac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите AC .



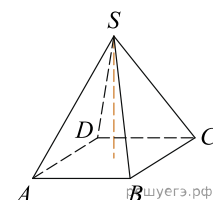
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AO} + \vec{BO}$.



№ 3.

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12, объем равен 200. Найдите боковое ребро этой пирамиды.



№ 4.

На конференцию приехали 3 ученых из Норвегии, 3 из России и 4 из Испании. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад ученого из России.

№ 5.

Стрелок стреляет по одному разу по каждой из пяти одинаковых мишеней. Вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно четыре мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно три мишени»?

№ 6.

Средняя масса упаковки наполнителя для игрушек равна 1500 г, а стандартное отклонение равно 40 г. При помощи неравенства Чебышева найдите верхнюю оценку вероятности события «масса наполнителя в случайно выбранной упаковке отклоняется от средней более чем на 100 г».

№ 7.

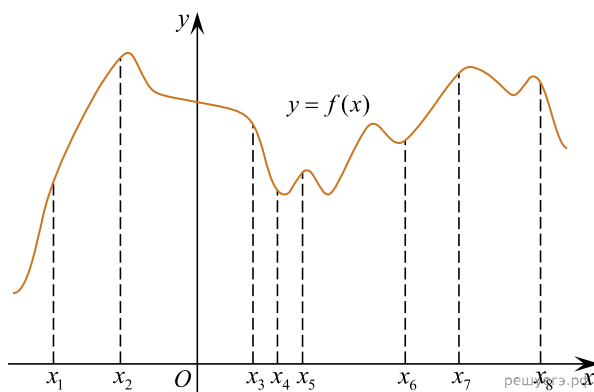
Найдите корень уравнения $3 \cdot 9^{x-1} = \frac{1}{27}$.

№ 8.

Найдите значение выражения $\frac{51 \cos 4^\circ}{\sin 86^\circ} + 8$.

№ 9.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



№ 10.

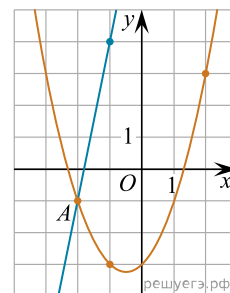
Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку (в Н·м), определяется формулой $M = NIBl^2 \sin \alpha$, где $I = 2$ А — сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл — значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м — размер рамки, $N = 1000$ — число витков провода в рамке, α — острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше $0,75$ Н·м?

№ 11.

Автомобиль, движущийся с постоянной скоростью 70 км/ч по прямому шоссе, обгоняет другой автомобиль, движущийся в ту же сторону с постоянной скоростью 40 км/ч. Каким будет расстояние (в километрах) между этими автомобилями через 15 минут после обгона?

№ 12.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

**№ 13.**

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке в размере S тысяч рублей на три года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2029 и 2030 годов долг должен быть на 70% меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей по кредиту составила 11 502 тысяч рублей. Найдите S .

№ 14.

- Решите уравнение $\log_{\cos x}(3 \sin^4 x + \cos 4x + 2) = 4 + \log_{\cos x} 3$.
- Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; 2\pi]$.

№ 15.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

- а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
 - б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.
-

№ 16.

Решите неравенство $\frac{27^x - 3 \cdot 9^{x+1} + 3^{x+5} - 729}{50x^2 + 10x + 0,5} \leq 0$.

№ 17.

В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области рабочие объединены в две бригады, одна из которых добывает алюминий, а другая — никель, причем для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

№ 18.

Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

- а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.
 - б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 8$ и $KT = 4$.
-

№ 19.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y(y+1) \leq 0, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6a(x+y) + 5a^2 - 6x + 4a + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

№ 20.

В записи натурального числа n сделаем замену цифр. Если цифра $a > 0$, то заменяем её на цифру $(10 - a)$, а если $a = 0$, то её не меняем. Обозначим полученное число через n^* .

а) Может ли быть $n = 10n^*$?

б) Какое наибольшее значение может принимать отношение $\frac{n}{n^*}$?

в) Если n делится на n^* , то чему может быть равно отношение $\frac{n}{n^*}$?

Ответы

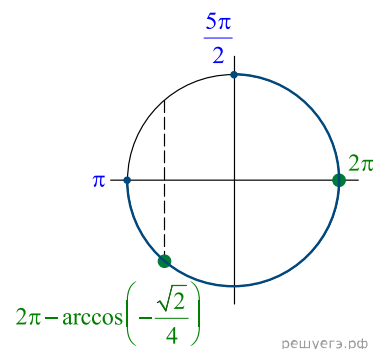
Номер	Задание	Ответ
1	27289	7
2	27717	10
3	27178	13
4	285924	0,3
5	635146	2
6	509458	0,16
7	672744	-1
8	501598	59
9	317539	5
10	27999	30
11	549340	7,5
12	509149	6
13	701456	9000

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем исходное уравнение:

$$\begin{aligned}
 \log_3(\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{2} - x) + 2 \sin 2x + 81) = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin x + 2 \sin 2x + 81 = 3^4 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin x + 4 \sin x \cos x = 0 &\Leftrightarrow \sin x (\sqrt{2} + 4 \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sqrt{2} + 4 \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi k, \\ x = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi k, \\ x = -\pi + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



решуегэ.рф

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi k, \\ x = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi k, \\ x = -\pi + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \log_3(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin 2x + 81) = 4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x + 2\sin 2x + 81 = 3^4 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x + 4\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sin x(\sqrt{2} + 4\cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sqrt{2} + 4\cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi k, \\ x = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi k, \\ x = -\pi + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \log_3(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin 2x + 81) = 4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x + 2\sin 2x + 81 = 3^4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x + 4\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sqrt{2} + 4\cos x) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sqrt{2} + 4\cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi k, \\ x = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi k, \\ x = -\pi + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \log_3(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin 2x + 81) = 4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x + 2\sin 2x + 81 = 3^4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x + 4\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sin x(\sqrt{2} + 4\cos x) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sqrt{2} + 4\cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi k, \\ x = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi k, \\ x = -\pi + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

б) Выясним, какие из найденных корней принадлежат отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$, при помощи тригонометрической окружности. Подходят: π , 2π и $\pi + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\pi k; \pm(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) π , $\pi + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$, 2π .

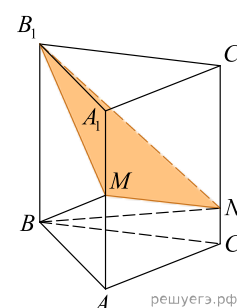
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. Площадь основания призмы равна $9\sqrt{3}$, а объём призмы равен $54\sqrt{3}$.

В четырёхугольной пирамиде $B_1A_1C_1NM$ высота совпадает с высотой основания призмы $A_1B_1C_1$, опущенной на сторону A_1C_1 , и равна $3\sqrt{3}$. Основание A_1C_1NM пирамиды $B_1A_1C_1NM$ является трапецией, площадь которой равна 27. Значит, объём пирамиды $B_1A_1C_1NM$ равен $27\sqrt{3}$, то есть составляет половину объёма призмы. Поэтому объёмы многогранников $B_1A_1C_1NM$ и $ABCMNB_1N$ равны.

б) В четырёхугольной пирамиде $BACNM$ высота совпадает с высотой основания призмы ABC , опущенной на сторону AC , и равна $3\sqrt{3}$. Основание пирамиды $BACNM$ является трапецией, площадь которой равна 9. Объём пирамиды $BACNM$ равен $9\sqrt{3}$.

Многогранник $ABCMNB_1N$ состоит из двух частей: $BACNM$ и MNB_1B . Значит, объём тетраэдра MNB_1B равен $18\sqrt{3}$.



Ответ: $18\sqrt{3}$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Выражение в числителе дроби представляет собой куб разности:

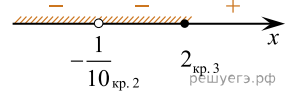
$$27^x - 3 \cdot 9^{x+1} + 3^{x+5} - 729 = 3^{3x} - 27 \cdot 3^{2x} + 243 \cdot 3^x - 729 = (3^x - 9)^3,$$

а выражение в знаменателе — полный квадрат:

$$50x^2 + 10x + 0,5 = \frac{1}{2}(100x^2 + 20x + 1) = \frac{1}{2}(10x + 1)^2.$$

Решим неравенство методом интервалов и рационализации, для этого применим теорему о знаках: при положительных a выражения $(a^b - a^c)$ и $(a-1)(b-c)$ имеют одинаковые знаки. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{(3^x - 9)^3}{(10x + 1)^2} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{(3^x - 3^2)^3}{(10x + 1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)^3}{(10x + 1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{10}, \\ -\frac{1}{10} < x \leq 2. \end{cases} \frac{(3^x - 9)^3}{(10x + 1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(3^x - 3^2)^3}{(10x + 1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x - 2)^3}{(10x + 1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{10}, \\ -\frac{1}{10} < x \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{10}\right) \cup \left(-\frac{1}{10}; 2\right]$.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, а рабочие первой области одинаково эффективно добывают и алюминий, и никель, они могут добывать любой из металлов. За сутки ими будет добыто $160 \cdot 5 \cdot 0,1 = 80$ кг металла.

Пусть во второй области алюминий добывают t рабочих, а никель— $160 - t$ рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5t}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160 - t)}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции $f(t) = \sqrt{5t} + \sqrt{800 - 5t}$ для натуральных t , не больших 160. Имеем:

$$f'(t) = \frac{5}{2\sqrt{5t}} - \frac{5}{2\sqrt{800 - 5t}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{800 - 5t} - \sqrt{5t}}{\sqrt{5t} \cdot \sqrt{800 - 5t}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{800 - 5t} = \sqrt{5t} \Leftrightarrow_{t \in \mathbb{N}} 800 - 5t = 5t \Leftrightarrow t = 80.$$

При t меньших 80 производная положительна, а при t больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{\max} = 40$, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

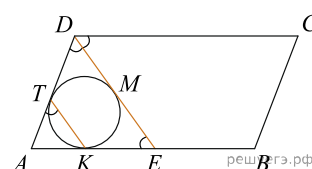
Таким образом, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80— на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 120 кг металла.

Ответ: 120 кг.

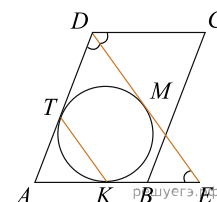
№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Прямые AE и CD параллельны, а DE — биссектриса угла ADC , поэтому $\angle AED = \angle CDE = \angle ADE$. Значит, треугольник ADE равнобедренный, $AD = AE$. Отрезки AK и AT касательных, проведённых к окружности из точки A , равны, значит, треугольник ATK также равнобедренный, причём угол при вершине A у этих треугольников общий. Поэтому $\angle ATK = \angle ADE$. Следовательно, $KT \parallel DE$.



б) Пусть окружность касается основания DE равнобедренного треугольника ADE в точке M . Тогда M — середина DE . Обозначим $DM = x$. Тогда $DT = DM = x$, $AT = AD - DT = 8 - x$. Треугольник ATK подобен треугольнику ADE , поэтому $\frac{AT}{AD} = \frac{TK}{DE}$, или $\frac{8-x}{8} = \frac{4}{2x}$. Отсюда находим, что $x=4$. Тогда $DE = 2x=8$, значит, треугольник ADE равносторонний. Следовательно, $\angle BAD = \angle EAD = 60^\circ$.



Ответ: 60° .

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Выделим в уравнении системы полные квадраты:

$$3x^2 - 6ax + 3a^2 + 3y^2 - 6ay + 3a^2 - 6x + 4a + 3 - a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-a)^2 + 3(y-a)^2 - 6(x-a) + 3 - 2a - a^2 = 0.$$

Ещё раз выделим полный квадрат:

$$3(x-a)^2 - 6(x-a) + 3 + 3(y-a)^2 = a^2 + 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a-1)^2 + (y-a)^2 = \frac{a^2 + 2a}{3}.$$

Уравнение определяет окружность с центром $(a+1; a)$ и радиусом $\sqrt{\frac{a^2 + 2a}{3}}$. Неравенство $y(y+1) \leq 0$ определяет горизонтальную полосу $-1 \leq y \leq 0$.

На рисунке видно, что единственное решение получается в двух случаях.

1. Окружность касается полосы внешним образом. Это происходит тогда и только тогда, когда центр расположен вне полосы, а её радиус равен расстоянию от центра до ближайшей границы полосы:

$$\begin{cases} a < -1, \\ (a+1)^2 = \frac{a^2 + 2a}{3} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a > 0, \\ a^2 = \frac{a^2 + 2a}{3}, \end{cases}$$

откуда

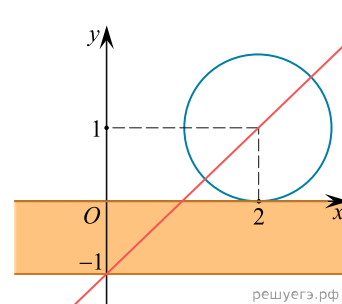
$$\begin{cases} a < -1, \\ 2a^2 + 4a + 3 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a > 0, \\ 2a^2 - 2a = 0. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Вторая система имеет решение $a = 1$.

2. Окружность превращается в точку и при этом принадлежит полосе:

$$\begin{cases} -1 \leq a \leq 0, \\ a^2 + 2a = 0 \end{cases} \text{ откуда } a = 0.$$

Ответ: 0; 1.



№ 20.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Числа n и n^* содержат одинаковое количество цифр, поэтому не могут отличаться в 10 раз.

б) Если в числе n есть цифра, отличная от 9 и 0, заменим ее на 9. При этом n увеличится, а n^* уменьшится, значит, у указанной дроби увеличится числитель и уменьшится знаменатель, то есть дробь увеличится. Для достижения максимума нужно, чтобы число n состояло из нулей и девяток, тогда число n^* состоит из нулей и единиц (на местах, соответствующих местам девяток в n), откуда $n = 9n^*$ и $\frac{n}{n^*} = 9$.

в) Сократим n и n^* на максимально возможную степень десятки. После этого они не будут заканчиваться на 0, а их отношение не изменится. Кроме того по пункту б) это отношение не превосходит 9. Приведем несколько примеров.

При $n = 9$ получаем $\frac{9}{1} = 9$.

При $n = 8$ получаем $\frac{8}{2} = 4$.

При $n = 5$ получаем $\frac{5}{5} = 1$.

При $n = 185$ получаем $\frac{925}{185} = 5$.

Докажем, что других вариантов нет. Пусть $a \neq 0$ — последняя цифра n . Пусть, например, $n = 2n^*$, тогда $2(10-a)$ заканчивается на a , откуда $2(10-a) - a$ кратно 10, $20 - 3a$ кратно 10, то есть $3a$ кратно 10, что невозможно.

Пусть $n = 3n^*$, тогда $3(10-a)$ заканчивается на a , откуда $3(10-a) - a$ кратно 10, то есть $30 - 4a$ кратно 10, $4a$ кратно 10, что возможно только при $a = 5$.

Пусть $n = 6n^*$, тогда $6(10-a)$ заканчивается на a , откуда $6(10-a) - a$ кратно 10, то есть $60 - 7a$ кратно 10, то есть $7a$ кратно 10, что невозможно.

Пусть $n = 7n^*$, тогда $7(10-a)$ заканчивается на a , откуда $7(10-a) - a$ кратно 10, то есть $70 - 8a$ кратно 10, $8a$ кратно 10, что возможно только при $a = 5$.

Пусть $n = 8n^*$, тогда $8(10-a)$ заканчивается на a , откуда $8(10-a) - a$ кратно 10, то есть $80 - 9a$ кратно 10, то есть $9a$ кратно 10, что невозможно.

Осталось разобрать случай, когда n кончается на 5 и больше чем n^* в 3 или 7 раз. Сразу отметим, что если n кончается на 05, то и n^* тоже и поэтому $3n^*$, $7n^*$ кончаются на 15, 35 соответственно.

Пусть $b \neq 0$ — предпоследняя цифра n , тогда $10 - b$ — предпоследняя цифра n^* , откуда $x(10(10-b)+5)$ кончается на $10b+5$, то есть

$$x(10(10-b)+5) - 10b - 5$$

кратно 100 (здесь $x \in \{3; 5; 7\}$). Тогда: $100x - 10bx + 5x - 10b - 5$ кратно 100 и $-10bx + 5x - 10b - 5$ кратно 100.

При $x = 3$ получаем $-40b + 10$ кратно 100, откуда $-4b + 1$ кратно 10. Это невозможно, $-4b + 1$ нечетно.

При $x = 7$ получаем $-80b + 30$ кратно 100, откуда $-8b + 3$ кратно 10. Это невозможно, $-6b + 3$ нечетно.

Ответ: а) нет; б) 9; в) 1, 4, 5, 9.
