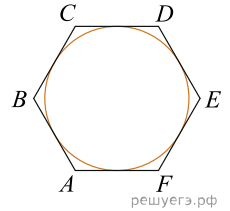


Вариант 28

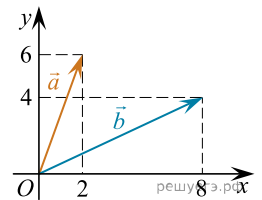
№ 1.

Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}$.



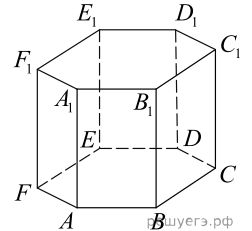
№ 2.

Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 3.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол $AC_1 C$. Ответ дайте в градусах.



№ 4.

Вася, Петя, Коля и Лёша бросили жребий— кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

№ 5.

Игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось ровно два броска? Ответ округлите до тысячных.

№ 6.

Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{5-2x}} = \frac{1}{3}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $(2a^3)^4 : (2a^{11})$ при $a = 11$.

№ 8.

Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

№ 9.

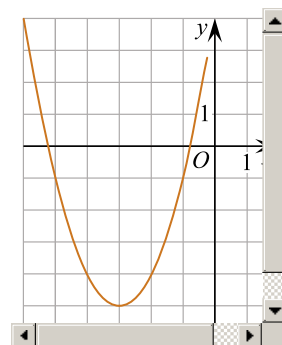
Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 6,4 километров?

№ 10.

При двух одновременно работающих принтерах расход бумаги составляет 1 пачку за 12 минут. Определите, за сколько минут израсходует пачку бумаги первый принтер, если известно, что он сделает это на 10 минут быстрее, чем второй.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите $f(1)$.

**№ 12.**

Найдите наименьшее значение функции $y = 9x^2 - x^3$ на отрезке $[-1; 5]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $(\sqrt{3} \sin x - 2 \sin^2 x) \cdot \log_6(-\operatorname{tg} x) = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

№ 14.

Точка O — центр грани $A_1B_1C_1D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Сечения параллелепипеда плоскостями AOB и BOC являются прямоугольниками, стороны AB и BC этих сечений в 3 раза меньше соответствующих больших сторон сечений.

- а) Докажите, что $ABCD$ — квадрат.
б) Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью BOC .
-

№ 15.

Решите неравенство $-\log_{\frac{x}{6}}\left(\frac{\lg\sqrt{6-x}}{\lg x}\right) > \lg\frac{|x|}{x}$.

№ 16.

15 декабря 2024 года планируется взять кредит в банке на 31 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й (с января 2025 года по июнь 2027 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15 июня 2027 года долг составит 100 тысяч рублей;
- 15 июля 2027 года долг должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 555 тысяч рублей?

№ 17.

В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла, AM и CN — биссектрисы треугольников ACH и BCH соответственно.

- а) Докажите, что прямые AM и CN перпендикулярны.
б) Найдите длину отрезка MN , если $BC = 20$ и $\sin\angle ABC = \frac{1}{3}$.
-

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - 2x + 12) \cdot \sqrt{y - 2x + 12} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

№ 19.

На доске написано несколько различных натуральных чисел, которые делятся на 3 и оканчиваются на 4.

- а) Может ли сумма составлять 282?
б) Может ли их сумма составлять 390?
в) Какое наибольшее количество чисел могло быть на доске, если их сумма равна 2226?
-

Ответы

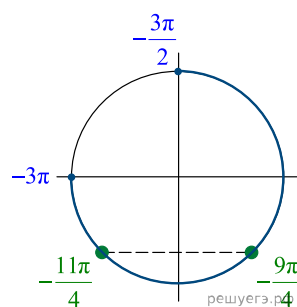
Номер	Задание	Ответ
1	27917	1,5
2	27730	20
3	245369	60
4	320169	0,25
5	508797	0,417
6	77374	-2
7	77399	88
8	27485	0,5
9	27986	7
10	689013	20
11	508943	11
12	77441	0

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Заметим, что уравнение определено при $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$. При этом условии можно приравнять числители:

$$\begin{aligned}
 \sin 2x &= \sqrt{2} \sin^4 \frac{x}{2} - \sqrt{2} \cos^4 \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin x \cos x &= -\cos x \Leftrightarrow \cos x (\sqrt{2} \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \\
 \sin 2x &= \sqrt{2} \sin^4 \frac{x}{2} - \sqrt{2} \cos^4 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x &= \sqrt{2} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin x \cos x = -\cos x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos x (\sqrt{2} \sin x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \sin 2x = \sqrt{2} \sin^4 \frac{x}{2} - \sqrt{2} \cos^4 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x &= \sqrt{2} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin x \cos x &= -\cos x \Leftrightarrow \cos x (\sqrt{2} \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \sin 2x = \sqrt{2} \sin^4 \frac{x}{2} - \sqrt{2} \cos^4 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x &= \sqrt{2} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin x \cos x &= -\cos x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos x (\sqrt{2} \sin x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



б) Отберем корни при помощи тригонометрической окружности (см. рис.). Получаем корни: $-\frac{11\pi}{4}$ и $-\frac{9\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Плоскость BOC пересекает грань $A_1B_1C_1D_1$ по прямой, параллельной прямой BC . Следовательно, эта плоскость проходит через середины ребер A_1B_1 и C_1D_1 — точки K и M соответственно. Аналогично плоскость AOB проходит через середины ребер B_1C_1 и A_1D_1 — точки L и N . Пусть $AB = 2x$ и $BC = 2y$, тогда $BL = 6x$ и $BK = 6y$, $KB_1 = x$ и $LB_1 = y$. Из равных по двум катетам прямоугольных треугольников BB_1K и BB_1L по теореме Пифагора получаем:

$$BB_1^2 = BK^2 - B_1K^2 = 36y^2 - x^2,$$

$$BB_1^2 = BL^2 - B_1L^2 = 36x^2 - y^2,$$

откуда

$$36y^2 - x^2 = 36x^2 - y^2 \Leftrightarrow 37y^2 = 37x^2 \Leftrightarrow x = y.$$

Это и означает требуемое.

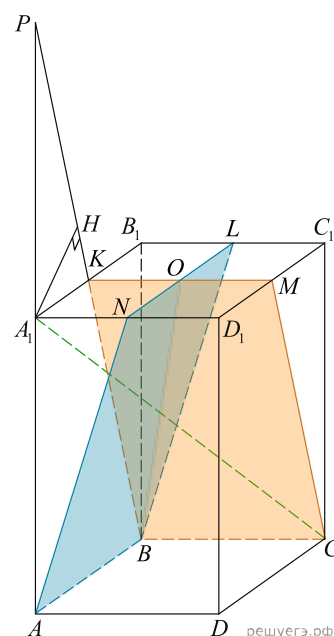
б) Пусть прямые AA_1 и BK пересекаются в точке P . Проведем в треугольнике A_1KP высоту A_1H . Проекция прямой A_1H на плоскость $A_1B_1C_1$ есть прямая AB , а тогда по теореме о трех перпендикулярах прямые A_1H и KM перпендикулярны. Прямые A_1H и BK перпендикулярны по построению. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая A_1H перпендикулярна плоскости BCO , и угол A_1CH — искомый.

Треугольники A_1PK и B_1BK равны по катету и острому углу. Из пункта а) следует, что $A_1P = BB_1 = x\sqrt{35}$. В прямоугольном треугольнике длина высоты, проведенной к гипотенузе, равна произведению длин катетов, деленному на длину гипотенузы:

$$A_1H = \frac{A_1P \cdot A_1K}{PK} = \frac{x\sqrt{35} \cdot x}{6x} = \frac{\sqrt{35}x}{6}.$$

Квадрат длины диагонали прямоугольного прямоугольника равен сумме квадратов длин трех его измерений, откуда

$$A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AD^2 + DC^2} = \sqrt{35x^2 + 4x^2 + 4x^2} = \sqrt{43x^2} = x\sqrt{43}.$$



Из прямоугольного треугольника A_1CH находим:

$$\sin \angle A_1CH = \frac{A_1H}{A_1C} = \frac{x\sqrt{35}}{6x\sqrt{43}} = \frac{\sqrt{1505}}{258},$$

то есть $\angle A_1CH = \arcsin \frac{\sqrt{1505}}{258}$.

Ответ: б) $\arcsin \frac{\sqrt{1505}}{258}$.

Приведем решение Александра Турбанова (Липецк).

а) Пусть точки M, L, P, Q — середины ребер A_1B_1, D_1C_1, B_1C_1 и A_1D_1 соответственно. Прямая ML параллельна прямой CB , а прямая PQ — прямой AB . Пусть $AB = 2x, AQ = 6x, BC = 2y, CL = 6y$. По теореме Пифагора из треугольников BMB_1 и PBB_1 получаем:

$$BB_1 = \sqrt{36y^2 - x^2} = \sqrt{36x^2 - y^2},$$

$$36y^2 - x^2 = 36x^2 - y^2 \Leftrightarrow 37y^2 = 37x^2 \Leftrightarrow x = y,$$

то есть $AB = BC$, поэтому четырехугольник $ABCD$ — квадрат по определению.

б) Пусть $x = y = a$. Из пункта а) известно, что $BB_1 = \sqrt{35}a$. Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Тогда в выбранной системе отсчета верны следующие координаты:

$$B(0; 0; 0),$$

$$C(0; 2a; 0),$$

$$O(a; a; a\sqrt{35}),$$

$$A_1(2a; 0; a\sqrt{35}),$$

$$\overrightarrow{A_1C}(-2a; 2a; -a\sqrt{35}).$$

Уравнение плоскости BOC имеет вид $Ax + By + Cz = 0$, поскольку она проходит через начало координат. Подставляя координаты точек C и O , находим:

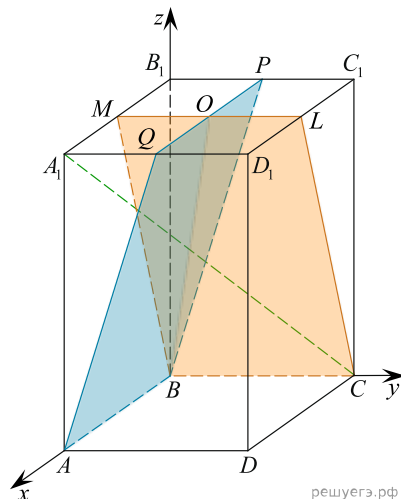
$$\begin{cases} 2a \cdot B = 0, \\ a \cdot A + a \cdot B + a\sqrt{35} \cdot C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A = -\sqrt{35}C. \end{cases}$$

Полагая $C = 1$, находим нормаль к плоскости BOC : $\vec{n}(-\sqrt{35}; 0; 1)$.

Пусть угол φ — искомый, тогда

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{A_1C}|} = \frac{|2a\sqrt{35} - a\sqrt{35}|}{\sqrt{35+0+1} \cdot \sqrt{4a^2+4a^2+35a^2}} = \frac{a\sqrt{35}}{6a\sqrt{43}} = \frac{\sqrt{1505}}{258}, \quad \sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{A_1C}|} = \frac{|2a\sqrt{35} - a\sqrt{35}|}{\sqrt{35+0+1} \cdot \sqrt{4a^2+4a^2+35a^2}} = \\ &= \frac{a\sqrt{35}}{6a\sqrt{43}} = \frac{\sqrt{1505}}{258}, \quad \sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{A_1C}|} = \\ &= \frac{|2a\sqrt{35} - a\sqrt{35}|}{\sqrt{35+0+1} \cdot \sqrt{4a^2+4a^2+35a^2}} = \\ &= \frac{a\sqrt{35}}{6a\sqrt{43}} = \frac{\sqrt{1505}}{258}, \end{aligned}$$

и потому $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{1505}}{258}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Заметим, что значения $x \leq 0$ не входят в ОДЗ данного неравенства. При $x > 0$ получаем, что $\frac{|x|}{x} = 1$, и исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{\frac{x}{6}} \left(\frac{\lg \sqrt{6-x}}{\lg x} \right) < 0.$$

Заметим также, что значения $x \geq 6$ не входят в ОДЗ данного неравенства. При $0 < x < 6$ для основания логарифма справедлива оценка $0 < \frac{x}{6} < 1$, и неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\lg \sqrt{6-x}}{\lg x} > 1.$$

Перенесём единицу в левую часть, приведём к общему знаменателю и воспользуемся методом рационализации:

$$\begin{aligned} \frac{\lg \sqrt{6-x}}{\lg x} > 1 &\Leftrightarrow \frac{\lg \sqrt{6-x} - \lg x}{\lg x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{6-x}-x}{x-1} > 0, \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6-x-x^2}{x-1} > 0, \\ 0 < x < 6 \end{cases} \\ (*) \end{matrix} \Leftrightarrow \frac{\lg \sqrt{6-x}}{\lg x} > 1 \Leftrightarrow \frac{\lg \sqrt{6-x} - \lg x}{\lg x} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{6-x}-x}{x-1} > 0, \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6-x-x^2}{x-1} > 0, \\ 0 < x < 6 \end{cases} \\ (*) \end{matrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-1} < 0, \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+3)(x-2)}{x-1} < 0, \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{x-1} < 0, \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2. \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-1} < 0, \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+3)(x-2)}{x-1} < 0, \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{x-1} < 0, \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2. \end{aligned}$$

*) Выше мы воспользовались тем, что на ОДЗ знак разности двух положительных функций совпадает со знаком разности их квадратов, а потому на интервале $(0; 6)$ совпадают знаки выражений $\sqrt{6-x}-x$ и $6-x-x^2$.

Ответ: (1; 2).

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания		Баллы
Обоснованно получен верный ответ		2
Верно построена математическая модель		1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше		0
Максимальный балл		2

Решение. Заполним таблицу в соответствии с условием задачи.

Номер месяца	Долг после начисления процен- тов, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг до начисления процен- тов, тыс. руб.

			$S = 100 + 30x$
1	$1,02 \cdot (100 + 30x)$	$2 + 1,6x$	$100 + 29x$
2	$1,02 \cdot (100 + 29x)$	$2 + 1,58x$	$100 + 28x$
...	...	...	...
29	$1,02 \cdot (100 + 2x)$	$2 + 1,04x$	$100 + x$
30	$1,02 \cdot (100 + x)$	$2 + 1,02x$	100
31	$1,02 \cdot 100$	$1,02 \cdot 100$	0

Найдём сумму выплат, воспользовавшись формулой суммы арифметической прогрессии:

$$B = 2 \cdot 30 + \frac{1,6x + 1,02x}{2} \cdot 30 + 1,02 \cdot 100 = 60 + 39,3x + 102 = 162 + 39,3x \text{ тыс. руб.}$$

По условию эта сумма равна 555 тыс. руб. Значит,

$$162 + 39,3x = 555 \Leftrightarrow 39,3x = 393 \Leftrightarrow x = 10.$$

Найдём сумму взятую в кредит:

$$S = 100 + 30 \cdot 10 = 400 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 400 000 рублей.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Построим прямую AM до пересечения с прямой CM в точке K . Пусть $\angle A = 2\alpha$, тогда $\angle CAM = \angle MAH = \alpha$. По свойству прямоугольного треугольника $\angle B = 90^\circ - 2\alpha$. Треугольник CHB прямоугольный, $\angle HCB = 90^\circ - 90^\circ + 2\alpha = 2\alpha$, тогда $\angle HCK = \angle KCB = \alpha$. $\angle ACK = 90^\circ - \alpha$, поэтому в треугольнике ACK имеем $\angle AKC = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ$, тогда прямые AM и CN перпендикулярны.

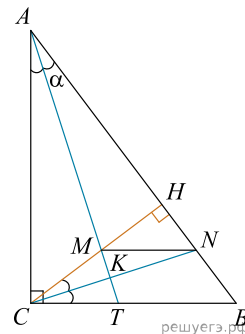
б) Заметим, что в треугольнике ACN отрезок AK является биссектрисой и высотой, а значит, треугольник ACN равнобедренный. Тогда $CK = KN$. Таким образом, отрезок AK является серединным перпендикуляром к стороне CN , а значит, $CM = MN$. Аналогично прямая CK — биссектриса и высота в треугольнике MCT , следовательно, треугольник является равнобедренным и $CM = CT$.

Воспользуемся свойством биссектрисы для треугольника ABC :

$$\frac{CT}{TB} = \frac{AC}{AB} = \sin \angle ABC = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, $CT = 5$, $TB = 15$. Получаем, $MN = CT = CM = 5$.

Ответ: б) 5.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Решим задачу графоаналитическим способом. В системе координат xOy построим график первого уравнения исходной системы. Для этого преобразуем уравнение:

$$(xy - 2x + 12) \cdot \sqrt{y - 2x + 12} = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 2x + 12 = 0, \\ y - 2x + 12 \geq 0, \\ y - 2x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{12}{x} + 2, \\ y \geq 2x - 12, \\ y = 2x - 12. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения исходной системы является объединение прямой $y = 2x - 12$ и части гиперболы $y = -\frac{12}{x} + 2$, лежащей не ниже этой прямой (выделено синим). Найдём точки пересечения прямой и гиперболы:

$$\begin{cases} y = -\frac{12}{x} + 2, \\ y = 2x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{12}{x} + 2 = 2x - 12, \\ y = 2x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0, \\ y = 2x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -10, \\ x = 6, \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким образом, прямая и гипербола пересекаются в точках $A(1; -10)$ и $B(6; 0)$.

Графиком уравнения $y = 3x + a$ является семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом 3, пересекающих ось ординат в точке $(0; a)$. Количество решений системы равно числу общих точек графиков уравнений исходной системы.

Найдём граничные положения прямой $y = 3x + a$. Прямая $y = 3x + a$ проходит через точку $B(6; 0)$ (выделено пурпурным) при

$$0 = 3 \cdot 6 + a \Leftrightarrow a = -18.$$

Прямая $y = 3x + a$ проходит через точку $A(1; -10)$ (выделено оранжевым) при

$$-10 = 3 \cdot 1 + a \Leftrightarrow a = -13.$$

Прямая $y = 3x + a$ касается гиперболы $y = -\frac{12}{x} + 2$ (выделено красным) при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} \left(-\frac{12}{x} + 2\right)' = 3, \\ y = -\frac{12}{x} + 2, \\ y = 3x + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 2 \\ y = -\frac{12}{x} + 2, \\ y = 3x + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 8, \\ a = 14, \\ x = 2, \\ y = -4, \\ a = -10. \end{cases}$$

Таким образом, при $a = 14$ прямая $y = 3x + a$ касается гиперболы $y = -\frac{12}{x} + 2$ в точке $(-2; 8)$, при $a = -10$ — в точке $(2; -4)$. Анализируя графики получаем, что исходная система:

- при $a \leq -18$ имеет одно решение;
- при $-18 < a \leq -13$ — **два решения**;
- при $-13 < a < -10$ — три решения;
- при $a = -10$ — **два решения**;
- при $-10 < a < 14$ — одно решение;
- при $a = 14$ — **два решения**;
- при $a > 14$ — три решения.

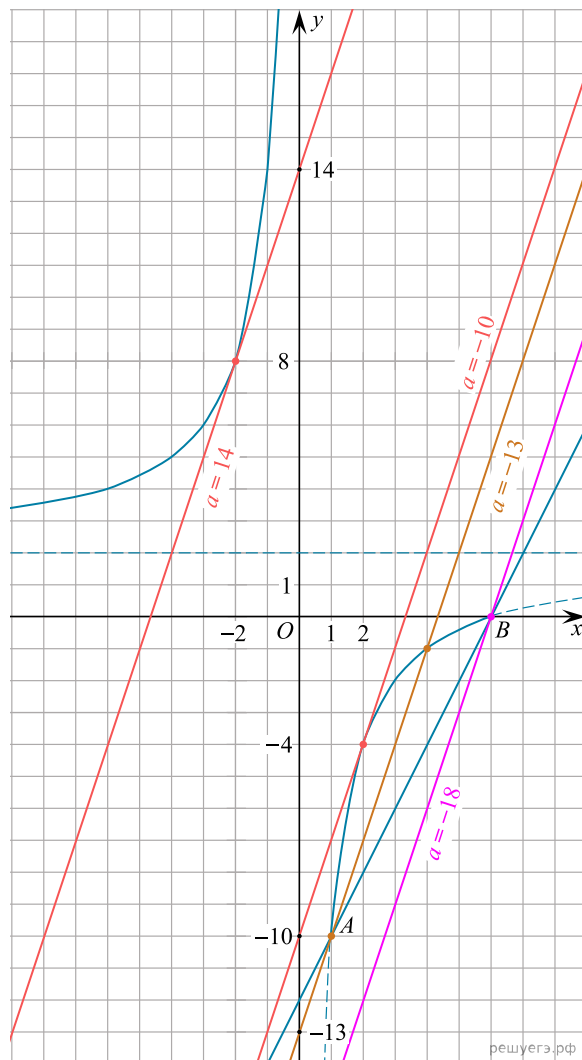
Ответ: $(-18; -13] \cup \{-10, 14\}$.

Приведем аналитический способ решения.

Подставим второе уравнение системы $y = 3x + a$ в первое уравнение. Получим $(3x^2 + ax - 2x + 12)\sqrt{x + a + 12} = 0$. Заметим, что одним из корней полученного уравнения, будет $x = -a - 12$. Далее возможны три варианта, в которых уравнение $3x^2 + (a - 2)x + 12 = 0$ даст ровно один корень.

1. Уравнение $3x^2 + (a - 2)x + 12 = 0$ имеет единственный корень, причем выражение под корнем $x + a + 12$ положительно. Тогда дискриминант равен нулю, откуда

$$(a - 2)^2 - 12^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2 = \pm 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14, \\ a = -10. \end{cases}$$



$$[a = -10.$$

Единственный корень при этом равен $\frac{2-a}{6}$, то есть -2 или 2 соответственно. И в том и в другом случае выражение $x+a+12$ получается положительным.

2. Уравнение $3x^2 + (a-2)x + 12 = 0$ имеет два корня, но один из них равен $-a-12$, а для второго выражение $x+a+12$ положительно. Подставляя, получим

$$\begin{aligned} 3(-a-12)^2 + (a-2)(-a-12) + 12 &= 0 \Leftrightarrow 3a^2 + 72a + 432 - a^2 + 2a - 12a + 24 + 12 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 62a + 468 &= 0 \Leftrightarrow a^2 + 31a + 234 = 0 \Leftrightarrow (a+13)(a+18) = 0. \quad 3(-a-12)^2 + (a-2)(-a-12) + 12 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3a^2 + 72a + 432 - a^2 + 2a - 12a + 24 + 12 &= 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 62a + 468 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + 31a + 234 &= 0 \Leftrightarrow (a+13)(a+18) = 0. \quad 3(-a-12)^2 + (a-2)(-a-12) + 12 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3a^2 + 72a + 432 - a^2 + 2a - 12a + 24 + 12 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 62a + 468 &= 0 \Leftrightarrow a^2 + 31a + 234 = 0 \Leftrightarrow (a+13)(a+18) = 0. \quad 3(-a-12)^2 + (a-2)(-a-12) + 12 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3a^2 + 72a + 432 - a^2 + 2a - 12a + 24 + 12 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 62a + 468 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + 31a + 234 &= 0 \Leftrightarrow (a+13)(a+18) = 0. \end{aligned}$$

При $a = -13$ получаем уравнение $3x^2 - 15x + 12 = 0$ с корнями $1 = -a - 12$ и 4 ($4 - 13 + 12 > 0$) — этот вариант подходит. При $a = -18$ получаем уравнение $3x^2 - 20x + 12 = 0$ с корнями $6 = -a - 12$ и $\frac{2}{3}$ ($\frac{2}{3} - 18 + 12 < 0$) — этот вариант не подходит.

3. Уравнение $3x^2 + (a-2)x + 12 = 0$ имеет два корня, для одного из них выражение $x+a+12$ положительно, а для другого отрицательно, то есть $x = -a - 12$ лежит между корнями этого уравнения. То есть значение функции $3x^2 + (a-2)x + 12$ в точке $x = -a - 12$ отрицательно. Оно уже вычислено в предыдущем пункте и мы получаем $2(a+13)(a+18) < 0$, откуда $a \in (-18; -13)$.

Окончательный ответ: $a \in (-18; -13] \cup \{-10; 14\}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть на доске написаны числа 24, 54 и 204. Тогда их сумма равна 282.

б) Каждое из написанных чисел оканчивается на 4, поэтому если их сумма оканчивается на 0, то их количество должно делиться на 5. Сумма пяти наименьших чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 4, равна $24 + 54 + 84 + 114 + 144 = 420$. Значит, получить сумму 390 невозможно.

в) Пусть на доске написано n чисел. Заметим, что любое число, которое оканчивается на 4, представимо в виде $5k+4$. Значит, сумма чисел, написанных на доске, равна $2226 = 5m + 4n$. Следовательно, $4n$ даёт остаток 1 при делении на 5, откуда получаем, что n даёт остаток 4 при делении на 5.

Предположим, что $n \geq 14$. Сумма четырнадцати наименьших чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 4, равна

$$24 + 54 + 84 + \dots + 384 + 414 = \frac{14 \cdot (24 + 414)}{2} = 3066 > 2226.$$

Значит, $n < 14$, следовательно, $n \leq 9$.

Покажем, что могло быть написано девять чисел. Например, сумма девяти чисел 24, 54, 84, 114, 144, 174, 204, 234, 1194 равна 2226.

Ответ: а) да; б) нет; в) 9.

Приведем решение Евгения Обухова (Москва).

а) Возрастающий ряд натуральных чисел, делящихся на 3 (сумма цифр числа делится на 3) и оканчивающихся на 4, начинается фрагментом: 24, 54, 84, 114, 144, ... Легко подобрать пример: $282 = 114 + 144 + 24$.

б) Допустим, может. Это означает, что в сумме как минимум пять слагаемых (иначе сумма чисел, оканчивающихся на 4, не заканчивается 0). Следовательно, сумма не меньше, чем $24 + 54 + 84 + 114 + 144 = 420 > 390$. Противоречие.

в) Из пункта а) следует, что рассматриваемая последовательность чисел возрастает. Разность соседних чисел должна делиться и на 10, поскольку все числа оканчиваются на 4, и делиться на 3, поскольку все числа делятся на 3. Следовательно, эта разность равна 30. То есть на доске написаны числа вида $24 + k_i \cdot 30$, где k_i — целое неотрицательное число. Тогда сумма n чисел на доске равна

$$24 \cdot n + 30(k_1 + \dots + k_n) = 2226 \quad (*)$$

Так как все числа на доске различны, то

$$k_1 + \dots + k_n \geq 0 + 1 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Тогда

$$2226 \geq 24 \cdot n + \frac{30n(n-1)}{2} = n(15n+9).$$

Из этого неравенства следует, что $n \leq 11$. Из (*) следует, что $2226 - 24 \cdot n$ делится на 10, следовательно, $n = 11$ и $n = 10$ заведомо не подходят. При $n = 9$ из (*) получаем, что $k_1 + \dots + k_9 = 67$. Построение примера завершает его представление:

$$k_1 = 0, k_2 = 1, \dots, k_8 = 7, k_9 = 67 - (1 + \dots + 7) = 39.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 9.

Приведем решение Владислава Франка (Санкт-Петербург).

а) Да. Например, $24 + 54 + 204$.

б) Нет. Если их последние цифры четверки, то нужно минимум 5 чисел, чтобы их сумма кончалась на 0, но даже сумма самых маленьких пяти таких чисел слишком велика: $24 + 54 + 84 + 114 + 144 = 420 > 390$.

в) Разобьем числа на группы по пять. Тогда в каждой группе сумма кончается на 0. Значит, в последней группе (она могла бы быть неполной) должно быть 4 числа — иначе последняя цифра суммы не сойдется. Итак, общее количество чисел может быть 4, 9, 14, 19, ... Если взять 14 наименьших чисел, то их сумма будет равна $24 + 54 + \dots + 414 = 3066 > 2226$. Поэтому чисел не более девяти. Девять чисел взять можно, например, $24 + 54 + \dots + 234 + 1194 = 2226$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 9.
