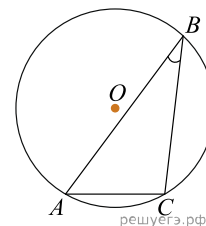


Вариант 287

ID: 14089

1.

Найдите хорду, на которую опирается угол 30° , вписанный в окружность радиуса 3.

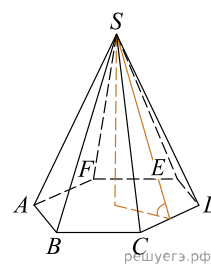


2.

Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(2; 1)$, $(2; 4)$, $(6; 1)$, $(6; 4)$.

3.

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45° . Найдите объем пирамиды.



4.

В стопке лежат школьные тетради в одинаковых зелёных обложках. Две из них в косую линейку, восемь в обычную линейку, шесть в крупную клетку и девять в обычную клетку. Найдите вероятность того, что взятая случайным образом из этой стопки тетрадь окажется в обычную линейку.

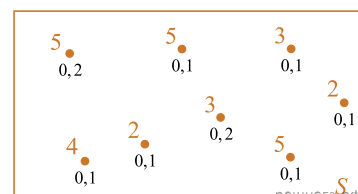
5.

При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 9 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков?

6.

На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X .

Найдите вероятность события $X = 5$.



7.

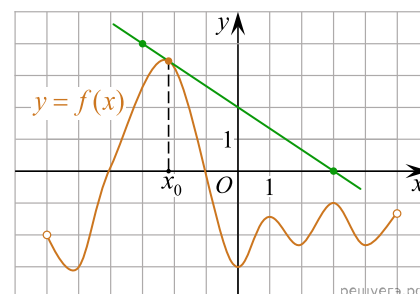
Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{7}}(7-x) = -2$.

8.

Найдите значение выражения $8^{2\log_8 3}$.

9.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Найдите значение производной функции $g(x) = 6f(x) - 3x$ в точке x_0 .



10.

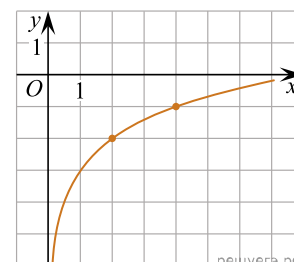
Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu=3$ моль воздуха объемом $V_1=8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha=5,75$ — постоянная, а $T=300$ К — температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

11.

Первые 190 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 180 км — со скоростью 90 км/ч, а затем 170 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12.

На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f(32)$.



13.

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере 5 млн рублей, где 5 — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029	Июль 2030
Долг (в млн руб.)	5	$0,75$	$0,45$	$0,25$	0

Найдите наименьшее значение 5 , при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

14.

а) Решите уравнение $2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

15.

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG : GB = AF : FC = 1 : 5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF .

16.

Решите неравенство $98^x - 2 \cdot 14^x - 70^x + 2 \cdot 10^x \geq 0$.

17.

В двух областях есть по 90 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3кг алюминия или 0,1кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1кг алюминия можно заменить 1кг никеля. Какую наибольшую суммарную массу металлов можно добыть в двух областях за сутки?

18.

Точки M и N — середины сторон соответственно AB и AC треугольника ABC . Прямая, проходящая через вершину A , пересекает отрезки MN и BC в точках K и L соответственно, причем в четырехугольник $BMKL$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что периметр треугольника AMK вдвое больше отрезка BL .

б) Найдите AL , если $AB = 12$, $BC = 16$, $AC = 20$.

19.

Найдите, при каких значениях параметра уравнение

$$5^{x^2} + 5^{x^2} \log_{25} a = 5^{-|x|} \log_{125} a + \left(\frac{1}{5}\right)^{|x|}$$

имеет хотя бы одно решение.

20.

На столе лежат 140 карточек — синие и белые, на каждой карточке записано ровно одно натуральное число. Все числа на белых карточках различны, и число на любой синей карточке не меньше числа на любой белой карточке. Среднее арифметическое всех записанных чисел равно 70. Если все числа на синих карточках уменьшить на 5, а все числа на белых карточках увеличить на 2, то среднее арифметическое всех чисел станет равным 67,5 (при уменьшении некоторые числа могут не быть натуральными).

а) Могут ли все числа на белых карточках быть четными?

б) Может ли среднее арифметическое чисел на синих карточках равняться 70,5?

в) Какое наименьшее среднее арифметическое может быть у чисел на синих карточках?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27858	3
2	513334	5
3	27181	48
4	704175	0,32
5	508761	0,5
6	509533	0,4
7	26658	-42
8	26883	9
9	525688	-7
10	27996	2
11	99607	72
12	509009	2
13	643163	7

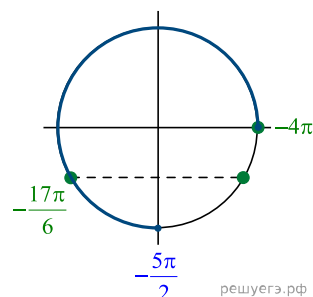
14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2 \sin x \cos x - 2 \sin x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2 \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin x = -\frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим числа: -4π и $-\frac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-4\pi; -\frac{17\pi}{6}$.

15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Из условия следует, что $AG = AF = 2$. Треугольники AMG и AMF равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $MG = MF$.

б) Проведём высоту MH боковой грани AMB . Из прямоугольного треугольника AHM находим

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 8.$$

В прямоугольном треугольнике MHG катет HG равен 4. Поэтому

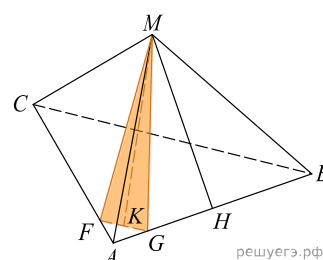
$$MG = \sqrt{MH^2 + HG^2} = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}.$$

Треугольник AGF равносторонний, поэтому $GF = AG = 2$. В равнобедренном треугольнике GMF проведём высоту MK . Она делит отрезок GF пополам. Из прямоугольного треугольника MKG получаем

$$MK = \sqrt{MG^2 - GK^2} = \sqrt{80 - 1} = \sqrt{79}.$$

Следовательно, площадь треугольника GMF равна $\frac{1}{2} \cdot GF \cdot MK = \sqrt{79}$.

Ответ: $\sqrt{79}$.



16.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $\log_7 2$ и/или 0 или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Разложим левую часть неравенства на множители:

$$2^x(7^x - 2)(7^x - 5^x) \geq 0.$$

Учитывая, что $2^x > 0$ при всех x , получаем:

$$\begin{cases} 7^x - 2 \geq 0, \\ 7^x - 5^x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \log_7 2, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7^x - 2 \leq 0, \\ 7^x - 5^x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \log_7 2, \\ x \leq 0 \end{cases}$$

откуда $x \leq 0, \quad x \geq \log_7 2.$

Ответ: $x \leq 0, \quad x \geq \log_7 2.$

17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, необходимо, чтобы в каждой области независимо от другой было добыто наибольшее количество металла. Для этого рабочие в каждой из областей должны работать по 5 часов в сутки. Всех рабочих первой области необходимо направить на добычу алюминия: за единицу времени они добывают его в три раза больше, чем никеля. За сутки в первой области добудут $0,3 \cdot 5 \cdot 90 = 135$ кг алюминия.

Во второй области 90 рабочих, работая по 5 часов, затратят на добычу металла 450 человеко-часов. Пусть x человеко-часов они затратят на добычу алюминия, тогда $450 - x$ часов будет затрачено на добычу никеля. Всего будет добыто $\sqrt{x}$ кг алюминия и $\sqrt{450 - x}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{450 - x}$ на отрезке $[0; 450]$. Применяя неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным, получаем:

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{450 - x}}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{450 - x}^2}{2}} = \sqrt{225} = 15.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\sqrt{x} = \sqrt{450 - x}$, откуда $x = 225$. При найденном значении x будет добыто $2 \cdot 15 = 30$ кг металла (15 кг алюминия и 15 кг никеля).

ля).

Общая масса металлов составляет $135 + 30 = 165$ кг.

Ответ: 165 кг.

18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Прямая MK параллельна прямой BL , поэтому прямая MK проходит через середину отрезка AL , откуда $AK = KL$. Отрезок MK — средняя линия треугольника ABL , то есть $BL = 2MK$. В четырехугольник $BMKL$ можно вписать в окружность, следовательно,

$$KL + MB = MK + BL = 3MK.$$

Выразим периметр треугольника AMK :

$$P_{AMK} = AK + AM + MK = KL + MB + MK = 3MK + MK = 4MK = 2BL. \quad P_{AMK} = AK + AM + MK = KL + MB + MK = 3MK + MK = 4MK = 2BL.$$

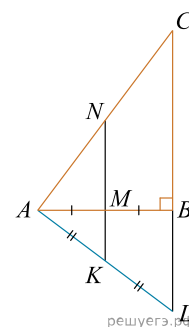
б) Для длин сторон треугольника ABC верно равенство $AB^2 + BC^2 = AC^2$, поэтому треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом ABC по теореме, обратной теореме Пифагора. Пусть $MK = x$. Из доказанного в пункте а) получаем:

$$KL = MK + BL - MB = x + 2x - 6 = 3x - 6,$$

откуда $AL = 2KL = 6x - 12$. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABL найдем:

$$\begin{aligned} (2x)^2 + 12^2 &= (6x - 12)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 12^2 = 36x^2 - 144x + 12^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 32x^2 &= 144x \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = 4,5. \quad (2x)^2 + 12^2 = (6x - 12)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 12^2 &= 36x^2 - 144x + 12^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 32x^2 &= 144x \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = 4,5. \end{aligned}$$

Таким образом,



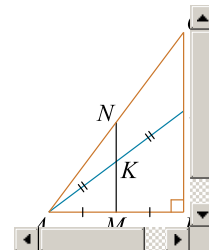
решуегз.рф

$$AL = 6x - 12 = 27 - 12 = 15.$$

Ответ: 6) 15.

Примечание.

Условие неоднозначно описывает положение точки L . На рисунке в решении она выбрана на продолжении прямой BC за точку B . Однако точку L можно было расположить и на отрезке BC — рисунок для этого случая изображен справа. Такое расположение отрезков и точек получается зеркальным отражением отрезка AL относительно прямой AB . Все длины и отношения из решения сохраняют свою силу и в этом случае.



19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения. ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений. ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$\begin{aligned}
 5^{x^2} + 5^{x^2} \log_{25} a &= 5^{-|x|} \log_{125} a + \left(\frac{1}{5}\right)^{|x|} \Leftrightarrow 5^{x^2} (1 + \log_{25} a) = 5^{-|x|} (\log_{125} a + 1) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{5^{x^2}}{5^{-|x|}} &= \frac{1 + \log_{125} a}{1 + \log_{25} a} \Leftrightarrow 5^{x^2 + |x|} = \frac{1 + \frac{1}{3} \log_5 a}{1 + \frac{1}{2} \log_5 a}. 5^{x^2} + 5^{x^2} \log_{25} a = 5^{-|x|} \log_{125} a + \left(\frac{1}{5}\right)^{|x|} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 5^{x^2} (1 + \log_{25} a) = 5^{-|x|} (\log_{125} a + 1) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{5^{x^2}}{5^{-|x|}} = \frac{1 + \log_{125} a}{1 + \log_{25} a} \Leftrightarrow 5^{x^2 + |x|} = \frac{1 + \frac{1}{3} \log_5 a}{1 + \frac{1}{2} \log_5 a}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 5^{x^2 + |x|}$. Заметим, что $x^2 + |x| \geq 0$, следовательно, $f(x) \geq 1$. Чтобы полученное имело хотя бы одно решение, правая часть должна быть не меньше единицы. Пусть $t = \log_5 a$, решим неравенство:

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + \frac{1}{3}t}{1 + \frac{1}{2}t} &\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{1}{3}t}{1 + \frac{1}{2}t} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{1}{3}t - 1 - \frac{1}{2}t}{1 + \frac{1}{2}t} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\frac{\frac{1}{6}t}{1 + \frac{1}{2}t} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{t}{6 + 3t} \leq 0 \Leftrightarrow -2 < t \leq 0. \frac{1 + \frac{1}{3}t}{1 + \frac{1}{2}t} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{1}{3}t}{1 + \frac{1}{2}t} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{1 + \frac{1}{3}t - 1 - \frac{1}{2}t}{1 + \frac{1}{2}t} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\frac{1}{6}t}{1 + \frac{1}{2}t} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{6}t}{6 + 3t} \leq 0 \Leftrightarrow -2 < t \leq 0.
 \end{aligned}$$

Вернемся к исходной переменной:

$$-2 < \log_5 a \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{25} < a \leq 1.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{25}; 1\right]$.

20.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Сумма всех чисел равна $70 \cdot 140 = 9800$. Пусть на белых карточках записано x чисел с суммой S , тогда на синих записано $140 - x$ чисел с суммой $9800 - S$. После изменения сумма чисел на белых карточках станет равной $S + 2x$, на синих — $9800 - S - 5(140 - x)$, поэтому их среднее арифметическое будет равно

$$\frac{S + 2x + 9100 - S + 5x}{140} = \frac{9100 + 7x}{140} = 65 + \frac{x}{20} = 67,5,$$

откуда $x = 50$. Итак, есть 50 чисел с суммой S на белых карточках и $140 - 50 = 90$ чисел с суммой $9800 - S$ на синих карточках.

а) Если все числа на белых карточках четны, то максимальное из них не меньше $50 \cdot 2 = 100$, поэтому все числа на синих карточках не меньше 100. При этом сумма чисел на белых карточках не меньше $2 + 4 + \dots + 100 = 102 \cdot 25 = 2550$, а на синих — не меньше $90 \cdot 100 = 9000$, поэтому общая сумма больше 9800. Получено противоречие.

б) Это условие сводится к уравнению $\frac{9800 - S}{90} = 70,5$, откуда $S = 3455$. Значит, сумма чисел на синих карточках равна 6345, и число хотя бы на одной из них не превосходит $\frac{6345}{90} = 70,5$, поэтому все числа на белых карточках не превосходят 70. Тогда их сумма не превосходит $70 + 69 + \dots + 21 = 91 \cdot 25 < 3455$. Получено противоречие.

в) Пусть $\frac{9800 - S}{90} = t$, тогда среди чисел на синих карточках есть число, не превосходящее t . Значит, сумма чисел на белых карточках не превосходит $t + (t - 1) + \dots + (t - 49) = 50t - 1225$. Сумма же чисел на синих карточках равна $90t$. Общая сумма не превосходит 9800:

$$90t + 50t - 1225 \geq 9800 \Leftrightarrow 140t \geq 11025 \Leftrightarrow t \geq 78,75.$$

Приведем пример, когда это среднее не больше 79. Пусть на всех синих карточках написано 79, тогда $S = 9800 - 90 \cdot 79 = 2690$. При этом $79 + 78 + \dots + 30 = 109 \cdot 25 = 2725$, и если взять для белых карточек набор чисел $79 + 78 + \dots + 32 + 16 + 10$, то все условия будут выполнены. Итак, $t \leq 79$. Допустим, что $t < 79$, тогда среди синих карточек есть карточка с числом, не превосходящим 78, поэтому сумма чисел на белых карточках не превосходит

$$78 + 77 + \dots + 29 = 107 \cdot 25 = 2675,$$

и тогда

$$\frac{9800 - S}{90} \geq \frac{9800 - 2675}{90} = 79\frac{1}{6}.$$

Вновь получено противоречие.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 79.
