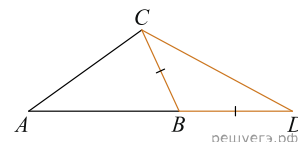


Вариант 291

ID: 46363

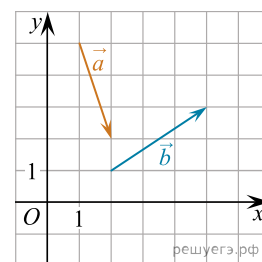
1.

В треугольнике ABC угол A равен 44° , угол C равен 62° . На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD , равный стороне BC . Найдите угол D треугольника BCD . Ответ дайте в градусах.



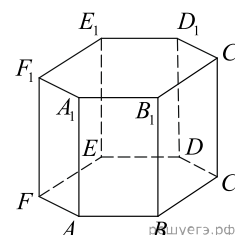
2.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



3.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками A и E_1 .



4.

Игральную кость бросают два раза. Найдите вероятность того, что выпавшие значения совпадают. Ответ округлите до сотых.

5.

Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

6.

Стрелок в тире стреляет по мишеням. По каждой он стреляет до тех пор, пока не поразит её. При каждом отдельном выстреле стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,05. Сколько потребуется выстрелов, чтобы поразить две мишени? Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

7.

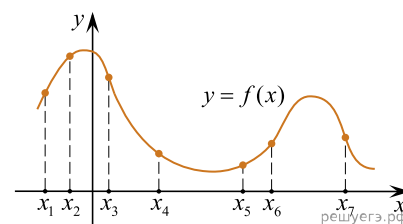
Решите уравнение: $\sqrt{\frac{1}{1-5x}} = \frac{1}{6}$.

8.

Найдите значение выражения $q(b-2) - q(b+2)$, если $q(b) = 3b$.

9.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 , x_7 . В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



10.

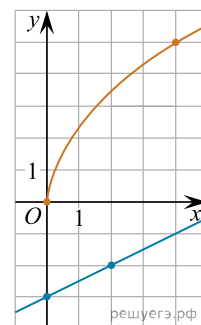
Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 20$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20 м?

11.

По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 90 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 1 минуте. Ответ дайте в метрах.

12.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A . Найдите абсциссу точки A .



13.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 200 000 рублей. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r , если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 130 000 рублей, а второй год — 150 000 рублей.

14.

а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3} \cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = 3 \cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

15.

Перпендикулярные и равные ребра AD и BC тетраэдра $ABCD$ являются диаметрами двух оснований цилиндра, длина образующей которого равна длине ребра BC .

а) Докажите, что осевое сечение цилиндра, проходящее через BC , делит высоту тетраэдра $ABCD$, опущенную на грань ABC , в отношении 5 : 3, считая от вершины D .

б) Найдите отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади полной поверхности тетраэдра.

16.

Решите неравенство $3 \cdot (x+1)^{\log_2(x+1)^2} - 48 \cdot 2^{\log_2^2(x+1)} \geq 2 \cdot (x+1)^{\log_2(x+1)} - 32$.

17.

Алексей вышел из дома на прогулку со скоростью u км/ч. После того, как он прошел 6 км, из дома следом за ним выбежала собака Жучка, скорость которой была на 9 км/ч больше скорости Алексея. Когда Жучка догнала хозяина, они повернули назад и вместе возвратились домой со скоростью 4 км/ч. Найдите значение u , при котором время прогулки Алексея окажется наименьшим. Сколько при этом составит время его прогулки?

18.

Дан прямоугольник $ABCD$. Известно, что $CD = 3AD$. Точка M — середина его стороны AD . На стороне CD отмечена точка N . Известно, что $CN = 2ND$. Точка K — середина отрезка CM .

а) Докажите, что точки B , N и K лежат на одной прямой.

б) Найдите KN , если известно, что $AD = 4\sqrt{5}$.

19.

Найдите все значения параметра b , при каждом из которых найдется такое число a , что система

$$\begin{cases} y = -b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 8a^2 = 4 + 4a \cdot (x + y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

20.

Снеговик написал ряд натуральных чисел от 1 до 2025. Затем он зачеркнул каждое второе число, начиная слева, а последнее незачеркнутое число перенес в начало ряда. Затем повторил операцию: зачеркнул каждое второе число, начиная слева, а последнее незачеркнутое число перенес в начало ряда. И так далее до тех пор, пока не останется ровно два числа.

а) Может ли после очередной операции остаться 253 числа?

б) Может ли после очередной операции остаться 64 числа?

в) Чему равна сумма последних двух незачеркнутых чисел?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27769	37
2	644807	-3
3	245364	2
4	639941	0,17
5	501061	0,91
6	509446	40
7	510328	-7
8	26820	-12
9	502067	3
10	28004	15
11	99611	400
12	509271	36
13	517574	25

14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

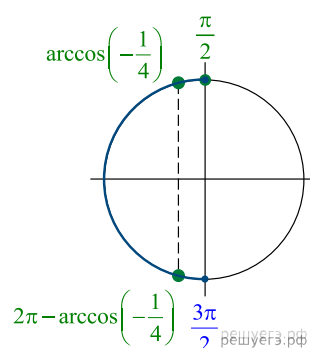
$$4 \sin x \cos x - 4 \cos x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(4 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{\pi}{2}, \arccos\left(-\frac{1}{4}\right), 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\};$
 $2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right).$

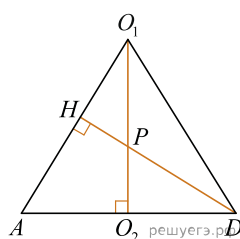
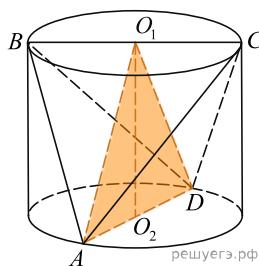
б) $\frac{\pi}{2}; \arccos\left(-\frac{1}{4}\right);$



15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть отрезок DH — высота тетраэдра. Точка O_1 — середина отрезка BC , точка O_2 — середина отрезка AD , при этом отрезки O_1O_2 и BC , а также AD и BC перпендикулярны. Значит, плоскость AO_1D перпендикулярна отрезку BC , и тогда плоскости ABC и AO_1D перпендикулярны по признаку. Следовательно, отрезок DH лежит в плоскости AO_1D . Осевое сечение проходит через отрезок O_1O_2 , значит, отрезок DH пересекает плоскость сечения в точке, лежащей на O_1O_2 , — назовем ее P .



Из условия $O_1O_2 = AD$. Пусть $AO_2 = O_2D = x$, $O_1O_2 = 2x$. По теореме Пифагора $AO_1 = \sqrt{5}x$. Из подобия треугольников AO_1O_2 и ADH получаем $\sqrt{5}x \cdot DH = 2x \cdot 2x$, то есть $DH = \frac{4\sqrt{5}x}{5}$. Далее находим:

$$AH = \sqrt{4x^2 - \frac{80x^2}{25}} = \frac{2\sqrt{5}x}{5},$$

$$\cos \angle ADH = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$DP = \frac{DO_2}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}x}{2},$$

$$PH = DH - DP = \frac{4\sqrt{5}x}{5} - \frac{\sqrt{5}x}{2} = \frac{3\sqrt{5}x}{10}.$$

Следовательно,

$$DP : PH = \frac{\sqrt{5}x}{2} : \frac{3\sqrt{5}x}{10} = \frac{5\sqrt{5}}{10} : \frac{3\sqrt{5}}{10} = 5 : 3.$$

б)Треугольники AO_1D и BO_2C являются равнобедренными, их основания и высоты равны, следовательно, равны и сами треугольники. Значит, все грани тетраэдра — равные треугольники. Тогда

$$S_{\text{полн}} = 4 \cdot S_{ABC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AO_1 \cdot BC = 4\sqrt{5}x^2,$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot AO_2 \cdot O_1O_2 = 2\pi \cdot x \cdot 2x = 4\pi x^2,$$

а искомое отношение равно $\frac{4\pi x^2}{4\sqrt{5}x^2} = \frac{\sqrt{5}\pi}{5}.$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{5}\pi}{5}.$

16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Заметим, что

$$2^{\log_2^2(x+1)} = 2^{\log_2(x+1) \cdot \log_2(x+1)} = \left(2^{\log_2(x+1)}\right)^{\log_2(x+1)} = (x+1)^{\log_2(x+1)},$$

$$(x+1)^{\log_2(x+1)^2} = (x+1)^{2\log_2(x+1)} = \left((x+1)^{\log_2(x+1)}\right)^2,$$

и введём замену $t = (x+1)^{\log_2(x+1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} 3t^2 - 48t \geqslant 2t - 32 &\Leftrightarrow 3t(t - 16) \geqslant 2(t - 16) \Leftrightarrow (t - 16)(3t - 2) \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leqslant \frac{2}{3}, & 3t^2 - 48t \geqslant 2t - 32 \Leftrightarrow 3t(t - 16) \geqslant 2(t - 16) \Leftrightarrow \\ & t \geqslant 16. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (t - 16)(3t - 2) \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leqslant \frac{2}{3}, \\ t \geqslant 16. \end{cases} \end{aligned}$$

Вернёмся к исходной переменной и прологарифмируем неравенства по основанию 2, при этом знак неравенства не меняется:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} (x+1)^{\log_2(x+1)} \leq \frac{2}{3}, \\ (x+1)^{\log_2(x+1)} \geq 16 \end{array} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x+1)^{\log_2(x+1)} \leq \log_2 \frac{2}{3}, \\ \log_2(x+1)^{\log_2(x+1)} \geq \log_2 16 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2^2(x+1) \leq \log_2 \frac{2}{3} \quad (*), \\ \log_2^2(x+1) \geq 4. \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} (x+1)^{\log_2(x+1)} \leq \frac{2}{3}, \\ (x+1)^{\log_2(x+1)} \geq 16 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x+1)^{\log_2(x+1)} \leq \log_2 \frac{2}{3}, \\ \log_2(x+1)^{\log_2(x+1)} \geq \log_2 16 \end{array} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2^2(x+1) \leq \log_2 \frac{2}{3} \quad (*), \\ \log_2^2(x+1) \geq 4. \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} (x+1)^{\log_2(x+1)} \leq \frac{2}{3}, \\ (x+1)^{\log_2(x+1)} \geq 16 \end{array} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x+1)^{\log_2(x+1)} \leq \log_2 \frac{2}{3}, \\ \log_2(x+1)^{\log_2(x+1)} \geq \log_2 16 \end{array} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2^2(x+1) \leq \log_2 \frac{2}{3} \quad (*), \\ \log_2^2(x+1) \geq 4. \end{array} \right] \end{aligned}$$

Правая часть неравенства (*) отрицательна, а левая — неотрицательна, поэтому неравенство (*) решений не имеет. Решим второе неравенство:

$$\log_2^2(x+1) \geq 4 \Leftrightarrow (\log_2(x+1) + 2)(\log_2(x+1) - 2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x+1) \leq -2, \\ \log_2(x+1) \geq 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x+1 \leq \frac{1}{4}, \\ x+1 \geq 4 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x \leq -\frac{3}{4}, \\ x \geq 3. \end{array} \right]$$

Ответ: $\left(-1; -\frac{3}{4}\right] \cup [3; +\infty)$.

17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Скорость сближения Алексея и Жучки (разность скоростей) $\Delta v = 9$ км/ч. Первоначальная разность расстояний между хозяином и собакой составляет $\Delta S = 6$ км. Найдем разностное отношение $t = \Delta S / \Delta v = 2/3$ часа. Это и есть время, которое потребовалось Жучке, чтобы догнать Алексея.

С того времени, как Жучка бежала за хозяином, Алексей прошел расстояние, равное $\frac{2}{3}v$ км. В соответствии с условием задачи Алексей прошел еще 6 км пока Жучка была дома. Значит, в направлении от дома Алексей, будучи на прогулке, прошел $6 + \frac{2}{3}v$ км. Такой же путь Алексей прошел после того, как Жучка догнала его, но в обратном направлении. На преодоление этого пути (со скоростью 4 км/ч) потребовалось $\frac{6 + \frac{2}{3}v}{4} = \frac{3}{2} + \frac{v}{6}$ часа. Итак, вся прогулка Алексея продлилась

$$\left(\frac{6}{v} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{v}{6}\right) = \left(\frac{6}{v} + \frac{v}{6}\right) + \frac{13}{6} \text{ часа.}$$

Эта сумма будет наименьшей, когда сумма двух взаимно обратных положительных выражений $\frac{6}{v}$ и $\frac{v}{6}$ примет наименьшее значение. И эта наименьшая сумма заведомо известна, она равна 2 (классическое неравенство $\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 2$ — наименьшее значение достигается при $a = 1$). Следовательно, в нашем случае должно выполняться равенство $\frac{6}{v} = \frac{v}{6} = 1$, то есть $v = 6$ км/ч. Время всей прогулки Алексея составляет $2 + \frac{13}{6} = \frac{25}{6}$ часа.

Ответ: 6 км/ч, $\frac{25}{6}$ часа.

Приведем решение Андрея Анатольевича.

Пусть v — скорость Алексея, и S — расстояние, на котором он находился в тот момент, когда его догнала Жучка. Время движения Алексея до того момента, когда из дому выбежала Жучка, равно $\frac{6}{v}$, время движения от этого момента до встречи с Жучкой равно $\frac{S-6}{v}$, время движения до возвращения домой $\frac{S}{4}$, тогда общее время составит

$$t(v) = \frac{6}{v} + \frac{S-6}{v} + \frac{S}{4} = \frac{S(v+4)}{4v}.$$

С другой стороны, время движения Жучки до встречи с Алексеем составит $\frac{S}{v+9}$. Тогда

$$\frac{S-6}{v} = \frac{S}{v+9} \Leftrightarrow S = \frac{6(v+9)}{9}.$$

Подставив данное выражение для S в первое уравнение, получим

$$t(v) = \frac{6(v+9)(v+4)}{9 \cdot 4v} = \frac{v^2 + 13v + 36}{6v}.$$

Для нахождения минимального времени исследуем функцию $f(v)$ на максимум и минимум с помощью производной:

$$f'(v) = \left(\frac{v^2}{6v}\right)' + \left(\frac{13v}{6v}\right)' + \left(\frac{36}{6v}\right)' = \frac{1}{6} - \frac{6}{v^2}.$$

Учитывая, что $v > 0$, найдем, что производная обращается в 0 при $v = 6$.

При $v = 6$ км/ч функция $f(v)$ принимает наименьшее значение, равное $\frac{25}{6}$ часа, или 4 часа 10 минут.

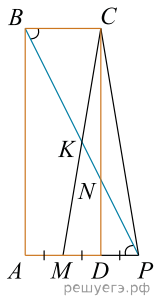
18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть прямые BN и AD пересекаются в точке P . Углы CBP и NPD равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AP и секущей BP . Значит, прямоугольные треугольники BCN и PDN подобны по острому углу, откуда следуют соотношения

$$\frac{BC}{PD} = \frac{CN}{ND} = 2.$$

Следовательно, $BC = 2PD$. В то же время $BC = 2MD$, и потому $MD = PD$. Значит, прямая CD — медиана треугольника MCP , а N — точка пересечения его медиан, поскольку $\frac{CN}{ND} = \frac{2}{1}$. Таким образом, прямая PN — также медиана треугольника MCP , поэтому она пересекает сторону CM в ее середине — точке K . Следовательно, точка K лежит на прямой PN , а значит, и на прямой BN .



б) Из условия получаем, что $CD = 12\sqrt{5}$, $ND = 4\sqrt{5}$. По теореме Пифагора в треугольнике PDN :

$$NP = \sqrt{ND^2 + DP^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{80 + 20} = 10.$$

По свойству точки пересечения медиан $\frac{NP}{KN} = \frac{2}{1}$, откуда $KN = 5$.

Ответ: б) 5.

Приведем другое решение.

а) Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Пусть $AD = 2a$, тогда $CD = 6a$. Найдем координаты точек B и N , найдем уравнение прямой BN :

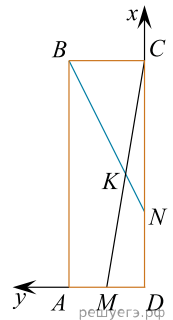
$$M(0; 0),$$

$$N(2a; 0),$$

$$C(6a; 0),$$

$$K\left(3a; \frac{a}{2}\right),$$

$$B(6a; 2a).$$



Уравнение прямой BN имеет вид $y = kx + b$. Подставляя координаты точек, получаем:

$$\begin{cases} 2a = 6a \cdot k + b, \\ 0 = 2a \cdot k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 6a \cdot k - 2a \cdot k, \\ b = -2a \cdot k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ b = -a. \end{cases}$$

Значит, уравнение прямой BN есть $y = \frac{1}{2}x - a$. Подставим в него координаты точки K : $\frac{a}{2} = \frac{3}{2}a - a$, откуда $0 = 0$. Таким образом, точка K принадлежит прямой BN .

б) Из условия $2a = 4\sqrt{5}$, то есть $a = 2\sqrt{5}$. Следовательно, $K(6\sqrt{5}; \sqrt{5})$, $N(4\sqrt{5}; 0)$ и $\vec{KN} = (-2\sqrt{5}; -\sqrt{5})$. Длина вектора $\vec{KN}$ равна $\sqrt{20 + 5} = 5$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем второе уравнение системы:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + 8a^2 = 4 + 4a(x+y) &\Leftrightarrow x^2 - 4ax + 4a^2 + y^2 - 4ay + 4a^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2. \\
 x^2 + y^2 + 8a^2 = 4 + 4a(x+y) &\Leftrightarrow x^2 - 4ax + 4a^2 + y^2 - 4ay + 4a^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2. \\
 x^2 + y^2 + 8a^2 = 4 + 4a(x+y) &\Leftrightarrow x^2 - 4ax + 4a^2 + y^2 - 4ay + 4a^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2.
 \end{aligned}$$

Графиком уравнения является окружность с центром $(2a; 2a)$ и радиусом 2. При всех a такие окружности описывают полосу, ограниченную касательными, параллельными $y = x$. Поскольку $r = 2$, получаем:

$$2 = \frac{|0 - 0 + d|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |d| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow d = \pm 2\sqrt{2},$$

а значит, $y = x \pm 2\sqrt{2}$.

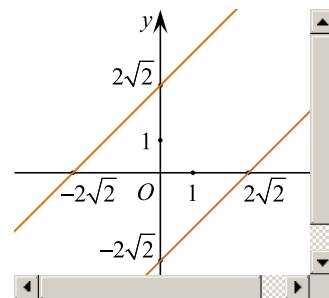
Точки всех таких окружностей лежат не ниже прямой $y = x - 2\sqrt{2}$, а ветви параболы $y = -b - x^2$ направлены вниз, следовательно, хотя бы одно решение будет, если

$$-b - x^2 \geq x - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + x + b - 2\sqrt{2} \leq 0.$$

Наименьшее значение квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, достигается в точке $x_B = -\frac{1}{2}$, откуда:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + b - 2\sqrt{2} \leq 0 \Leftrightarrow b \leq 2\sqrt{2} + \frac{1}{4}.$$

Ответ: $b \leq 2\sqrt{2} + \frac{1}{4}$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а, б) Из 2025 чисел будут зачеркнуты 1012 и останется 1013. Затем будут зачеркнуты 506 и останется 507. Затем будут зачеркнуты 253 и останется 254. Затем будут зачеркнуты 127 и останется 127. Затем будут зачеркнуты 63 и останется 64. После этого количество чисел будет падать вдвое каждую операцию.

в) Заметим, что число, переставленное вперед после первой операции, станет вторым числом после второй операции и будет вычеркнуто на третьей. Аналогично число, переставленное вперед после второй операции, будет вычеркнуто на четвертой и так далее. Значит, после девятой операции (когда останется 4 числа), эти числа будут такими — переставленное после девятой, переставленное после восьмой, еще какие-то два числа. Следовательно, после десятой операции останутся переставленное после девятой и еще одно число. Их можно не переставлять, нас интересует только их сумма. Выясним, что это за числа.

После первой операции останутся только нечетные числа. Вычтем из каждого из них по 1 и поделим на 2 (от этого из суммы двух чисел вычтется 2, а потом она поделится на 2). Получатся числа 1012, 0, 1, 2, ..., 1011. Можно заменить 1012 на 0, поскольку оно все равно будет вычеркнуто. Тогда при второй операции получатся числа 1011, 0, 1, 3, ..., 1009. Снова вычтем из каждого из них по 1 и поделим на 2, а первые два числа заменим на что угодно, поскольку они все равно будут вычеркнуты. Получим 0, 0, 0, 1, 2, ..., 504. Продолжим делать аналогичные действия. Иногда (например, после третьей операции) будут получаться четные числа, тогда перед делением на 2 не нужно будет вычитать из них единицу.

Итак, третья операция:

$$0, 0, 0, 1, 2, \dots, 504 \rightarrow 0, 0, 2, 4, \dots, 504 \rightarrow 504, 0, 0, 2, 4, \dots, 502 \rightarrow 0, 0, 0, 1, 2, \dots, 251.$$

Четвертая (без вычитания единицы):

$$0, 0, 0, 1, 2, \dots, 251 \rightarrow 0, 0, 2, 4, \dots, 250 \rightarrow 250, 0, 0, 2, 4, \dots, 248 \rightarrow 0, 0, 0, 1, 2, \dots, 124.$$

Пятая (без вычитания единицы):

$$0, 0, 0, 1, 2, \dots, 124 \rightarrow 0, 0, 2, 4, \dots, 124 \rightarrow 124, 0, 0, 2, 4, \dots, 122 \rightarrow 0, 0, 0, 1, 2, \dots, 61.$$

Шестая (без вычитания единицы):

$$0, 0, 0, 1, 2, \dots, 61 \rightarrow 0, 0, 2, 4, \dots, 60 \rightarrow 60, 0, 0, 2, 4, \dots, 58 \rightarrow 0, 0, 0, 1, 2, \dots, 29.$$

Седьмая (без вычитания единицы):

$$0, 0, 0, 1, 2, \dots, 29 \rightarrow 0, 0, 2, 4, \dots, 28 \rightarrow 28, 0, 0, 2, 4, \dots, 26 \rightarrow 0, 0, 0, 1, 2, \dots, 13.$$

Восьмая (без вычитания единицы):

$$14, 0, 0, 1, 2, \dots, 13 \rightarrow 14, 0, 2, 4, \dots, 12 \rightarrow 12, 14, 0, 2, 4, \dots, 10 \rightarrow 6, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Прекратим модифицировать числа. После девятой операции получим 4, 6, 0, 2, после десятой получим 0, 4. Итак, их сумма равна 4. Они были пять раз поделены на 2, значит, до этого сумма была равна 128. До этого $2 \cdot 128 + 2 = 258$, до этого $2 \cdot 258 + 2 = 518$, до этого $2 \cdot 518 + 2 = 1038$. Это и есть ответ.

Ответ: а) нет; б) да; в) 1038.