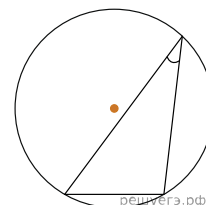


Вариант 293

ID: 46369

1.

Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности?
Ответ дайте в градусах.

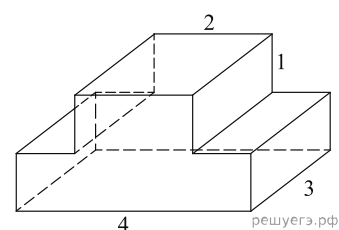


2.

Даны векторы $\vec{a}(3; -2)$ и $\vec{b}(0; 1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

3.

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



4.

У Дины в копилке лежит 7 рублёвых, 5 двухрублёвых, 6 пятирублёвых и 2 десятирублёвых монеты. Дина наугад достает из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит менее 60 рублей.

5.

В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя не глядя переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

6.

Случайная величина X принимает только два значения: 0 и $a(a > 0)$. Найдите a , если известно, математическое ожидание $E(X) = 0,2$ и дисперсия $D(X) = 0,36$.

7.

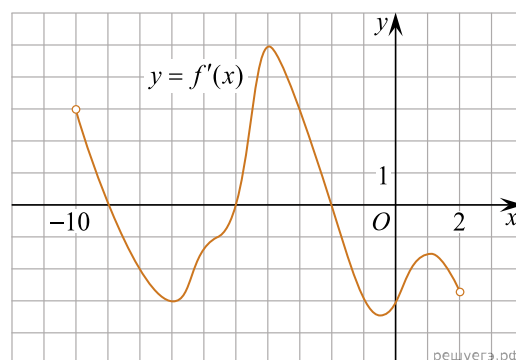
Найдите корень уравнения $(x-1)^3 = -8$.

8.

Найдите значение выражения $\frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x}$ при $x > 0$.

9.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10;2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



10.

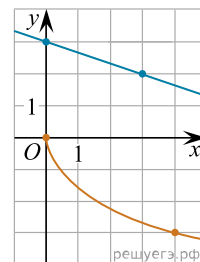
На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где l — длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8 \text{ Н/кг}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н? Ответ выразите в метрах.

11.

Часы со стрелками показывают 8 часов ровно. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

12.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите ординату точки A.



13.

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029	Июль 2030
Долг (в млн руб.)	S	$0,7S$	$0,4S$	$0,2S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

14.

а) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{-\cos x} \cdot \operatorname{tg} x} = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

15.

В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с равными сторонами AB и BC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC = 1:3$.

- а) Докажите, что прямая KM перпендикулярна прямой AC .
 - б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 9$, $AC = 12$ и $AA_1 = 3$.
-

16.

Решите неравенство $\frac{1}{4^x - 2 \cdot 2^x + 1} \leq \frac{4^{x+1}}{32^x - 2^{4x+1} + 8^x}$.

17.

Алексей вышел из дома на прогулку со скоростью u км/ч. После того, как он прошел 6 км, из дома следом за ним выбежала собака Жучка, скорость которой была на 9 км/ч больше скорости Алексея. Когда Жучка догнала хозяина, они повернули назад и вместе возвратились домой со скоростью 4 км/ч. Найдите значение u , при котором время прогулки Алексея окажется наименьшим. Сколько при этом составит время его прогулки?

18.

Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C вписан в окружность. Биссектриса угла A пересекает описанную окружность в точке A_1 , биссектриса угла B пересекает описанную окружность в точке B_1 , биссектриса угла C пересекает описанную окружность в точке C_1 .

- а) Докажите, что угол $A_1BB_1 = 45^\circ$.
 - б) Известно, что $AB = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 60^\circ$. Найдите B_1C_1 .
-

19.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{3x^2 - (3a + 1)x + a}$$

имеет один корень на отрезке $[0; 1]$.

20.

На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: $1 + 1 + 111 + 11 + 11 + 1 = 136$.

- а) Можно ли получить сумму 122, если $n = 59$?
- б) Можно ли получить сумму 123, если $n = 59$?
- в) Какую наибольшую четырёхзначную сумму можно получить, если $n = 59$?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27857	30
2	649891	-2
3	27193	18
4	509433	0,1
5	500998	0,6
6	704652	2
7	282850	-1
8	26824	5
9	27501	5
10	27967	2
11	99600	240
12	509280	-9
13	643163	7

14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Уравнение определено при условии

$$2025 - 2025 \sin x > 0 \Leftrightarrow 1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 1.$$

Применим формулы приведения, получим:

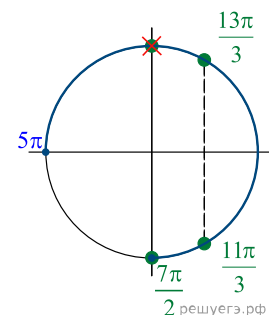
$$\frac{1 + \sin\left(\frac{2025\pi}{2} - 2x\right) + \cos(2025\pi - x)}{\sqrt{2025 - 2025 \sin x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ 1 + \cos 2x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ 2\cos^2 x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ \cos x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \frac{1 + \sin\left(\frac{2025\pi}{2} - 2x\right) + \cos(2025\pi - x)}{\sqrt{2025 - 2025 \sin x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ 1 + \cos 2x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ 2\cos^2 x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ \cos x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \frac{1 + \sin\left(\frac{2025\pi}{2} - 2x\right) + \cos(2025\pi - x)}{\sqrt{2025 - 2025 \sin x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ 1 + \cos 2x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ 2\cos^2 x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1, \\ \cos x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни при помощи единичной окружности. Подходят числа: $\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$.

15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка N — середина ребра AB , точка L — середина ребра AC . По теореме Фалеса прямая MN параллельна прямой BL , поэтому прямая NM перпендикулярна прямой AC , плоскость KNM перпендикулярна прямой AC , прямая KM перпендикулярна прямой AC .

б) Проведем MH — высоту треугольника AMB . Из $MH \perp AB$ и $KN \perp MH$ следует, что $MH \perp ABB_1$, а значит, угол HKM — искомый, причем $\sin \angle HKM = \frac{MH}{KM}$.

Пусть отрезок CE — высота треугольника ABC , тогда $MH : CE = 1 : 4$, откуда

$$MH = \frac{1}{4}CE = \frac{1}{4} \cdot \frac{2S_{ABC}}{AB} = \frac{BL \cdot AC}{4AB} = \frac{BL}{3}.$$

Из прямоугольных треугольников ABL и KMN соответственно находим:

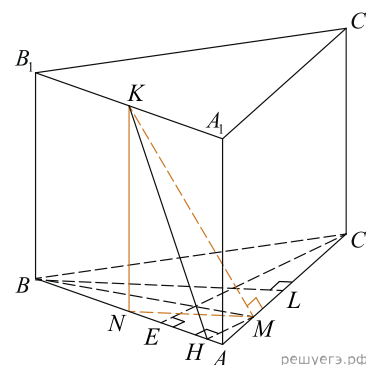
$$BL = \sqrt{AB^2 - AL^2} = \sqrt{81 - 36} = 3\sqrt{5},$$

$$KM = \sqrt{KN^2 + MN^2} = \sqrt{AA_1^2 + \frac{BL^2}{4}} = \sqrt{9 + \frac{45}{4}} = \frac{9}{2}.$$

Таким образом, получаем:

$$MH = \sqrt{5},$$

$$\sin \angle HKM = \frac{MH}{KM} = \frac{2\sqrt{5}}{9},$$



решуегэ.рф

$$\angle HKM = \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{9}.$$

Ответ: б) $\arcsin \frac{2\sqrt{5}}{9}$.

Приведем решение при помощи векторов и координат.

а) Пусть $\vec{BA} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{BB_1} = \vec{c}$. Точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$, тогда

$$\vec{AC} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\vec{KM} = \vec{KN} + \vec{NM} = -\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}.$$

Из условия $AB = BC$ имеем: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, и поскольку в прямой призме вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получаем:

$$\begin{aligned} \vec{KM} \cdot \vec{AC} &= \left(\frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} \right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{4}(\vec{b}^2 - \vec{a}^2) = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2) = 0. \\ \vec{KM} \cdot \vec{AC} &= \left(\frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} \right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \\ &= \frac{1}{4}(\vec{b}^2 - \vec{a}^2) = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2) = 0. \\ \vec{KM} \cdot \vec{AC} &= \left(\frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} \right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \\ &= \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \\ &= \frac{1}{4}(\vec{b}^2 - \vec{a}^2) = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, прямые KM и AC перпендикулярны.

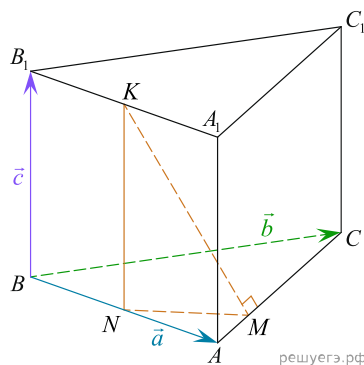


Рис. 1

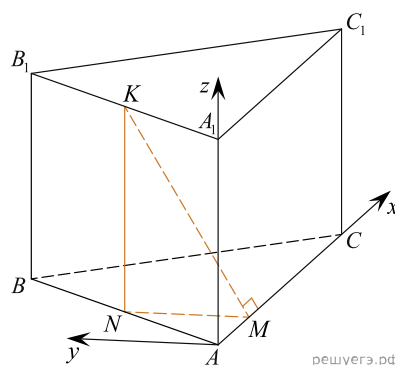


Рис. 2

б) Пусть α — угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , $\vec{n}$ — нормаль к плоскости ABB_1 , тогда $\sin \alpha = \frac{|\vec{KM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{KM}| \cdot |\vec{n}|}$.

Пусть точка A — начало координат, ребро AC лежит на положительной полуоси Ox , точка B имеет положительную ординату. В этой системе координат:

$$A(0; 0; 0),$$

$$C(12; 0; 0),$$

$$B(6; 3\sqrt{5}; 0),$$

$$K\left(3; \frac{3\sqrt{5}}{2}; 3\right),$$

$$M(3; 0; 0),$$

$$\overrightarrow{KM} = \left(0; -\frac{3\sqrt{5}}{2}; -3\right),$$

$$|\overrightarrow{KM}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{\frac{9 \cdot 5}{4} + 9} = \frac{9}{2}.$$

Плоскость ABB_1 содержит векторы $\overrightarrow{AB} = (6; 3\sqrt{5}; 0)$ и $\overrightarrow{BB_1} = (0; 0; 3)$, причем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BB_1} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(3\sqrt{5} \cdot 3 - 0 \cdot 0) - \vec{j}(6 \cdot 3 - 0 \cdot 0) + \vec{k}(6 \cdot 0 - 3\sqrt{5} \cdot 0) = \\ &= 9\sqrt{5}\vec{i} - 18\vec{j} + 0\vec{k} = 9(\sqrt{5}\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k}). \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BB_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(3\sqrt{5} \cdot 3 - 0 \cdot 0) - \vec{j}(6 \cdot 3 - 0 \cdot 0) + \vec{k}(6 \cdot 0 - 3\sqrt{5} \cdot 0) = \\ &= 9\sqrt{5}\vec{i} - 18\vec{j} + 0\vec{k} = 9(\sqrt{5}\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k}). \end{aligned}$$

Возьмем в качестве нормали к плоскости вектор $\vec{n} = (\sqrt{5}; -2; 0)$, отметим, что $|\vec{n}| = \sqrt{5+4} = 3$. Тогда:

$$\overrightarrow{KM} \cdot \vec{n} = 0 \cdot \sqrt{5} + \left(-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right) \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 = \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot 2 = 3\sqrt{5},$$

$$\text{откуда } \alpha = \arcsin \frac{3\sqrt{5}}{\frac{9}{2} \cdot 3} = \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{9}.$$

Замечание..

В последнем решении можно было бы обойтись только векторами, не вводя систему координат. Покажем, как это сделать.

Нормаль к плоскости есть $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{c}$, причем в силу перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ имеем:

$$|\vec{n}| = |\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{a}||\vec{c}| = 9 \cdot 3 = 27.$$

Далее,

$$\overrightarrow{KM} \cdot \vec{n} = \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \frac{1}{4}\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \frac{1}{4}(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c},$$

причем в силу параллельности вектора $\vec{b} \times \vec{a}$ вектору $\vec{c}$ имеем:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{KM} \cdot \vec{n}| &= \frac{1}{4}|(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{4}|\vec{b} \times \vec{a}| \cdot |\vec{c}| = \frac{3}{4}|\vec{b} \times \vec{a}| = \frac{3}{4}|\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle ABC = \frac{243}{4} \sin \angle ABC. \quad |\overrightarrow{KM} \cdot \vec{n}| = \frac{1}{4}|(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{4}|\vec{b} \times \vec{a}| \cdot |\vec{c}| = \\ &= \frac{3}{4}|\vec{b} \times \vec{a}| = \frac{3}{4}|\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle ABC = \frac{243}{4} \sin \angle ABC. \end{aligned}$$

По теореме косинусов для треугольника ABC получаем:

$$\cos \angle ABC = \frac{9^2 + 9^2 - 12^2}{2 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{1}{9},$$

откуда

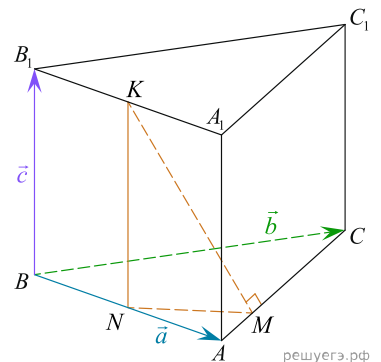
$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \frac{1}{81}} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

Следовательно, $|\overrightarrow{KM} \cdot \vec{n}| = 27\sqrt{5}$.

Найдем квадрат длины вектора $\overrightarrow{KM}$:

$$|\overrightarrow{KM}|^2 = \left|\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c}\right|^2 = \frac{1}{16}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{16}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \frac{1}{8}\vec{a} \cdot \vec{b},$$

где



$2\vec{a}\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{b} - \vec{a})^2.$

Учитывая, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 9, \quad |\vec{b} - \vec{a}| = 12,$ получаем:

$2\vec{a}\vec{b} = 81 + 81 - 144 = 18,$

$|\overrightarrow{KM}|^2 = \frac{81}{16} + \frac{81}{16} + 9 + \frac{9}{8} = \frac{81}{4},$

$|\overrightarrow{KM}| = \frac{9}{2}.$

Таким образом,

$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{KM} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{KM}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{27\sqrt{5}}{\frac{9}{2} \cdot 27} = \frac{2\sqrt{5}}{9},$$

следовательно, $\alpha = \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{9}.$

16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $t = 2^x$, тогда

$$\frac{1}{t^2 - 2t + 1} \leq \frac{4t^2}{t^5 - 2t^4 + t^3} \Leftrightarrow \frac{1}{(t - 1)^2} \leq \frac{4}{t(t - 1)^2} \Leftrightarrow \frac{t - 4}{t(t - 1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1, \\ 1 < t \leq 4. \end{cases} \frac{1}{t^2 - 2t + 1} \leq \frac{4t^2}{t^5 - 2t^4 + t^3} \Leftrightarrow \frac{1}{(t - 1)^2} \leq \frac{4}{t(t - 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t - 4}{t(t - 1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1, \\ 1 < t \leq 4. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} 0 < 2^x < 1, \\ 1 < 2^x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 2].$

17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Скорость сближения Алексея и Жучки (разность скоростей) $\Delta u = 9 \text{ км/ч}$. Первоначальная разность расстояний между хозяином и собакой составляет $\Delta S = 6 \text{ км}$. Найдем разностное отношение $t = \Delta S / \Delta v = 2/3$ часа. Это и есть время, которое потребовалось Жучке, чтобы догнать Алексея.

С того времени, как Жучка бежала за хозяином, Алексей прошел расстояние, равное $\frac{2}{3}v$ км. В соответствии с условием задачи Алексей прошел еще 6 км пока Жучка была дома. Значит, в направлении от дома Алексей, будучи на прогулке, прошел $6 + \frac{2}{3}v$ км. Такой же путь Алексей прошел после того, как Жучка догнала его, но в обратном направлении. На преодоление этого пути (со скоростью 4 км/ч) потребовалось $\frac{6 + \frac{2}{3}v}{4} = \frac{3}{2} + \frac{v}{6}$ часа. Итак, вся прогулка Алексея продлилась

$$\left(\frac{6}{v} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{v}{6}\right) = \left(\frac{6}{v} + \frac{v}{6}\right) + \frac{13}{6} \text{ часа.}$$

Эта сумма будет наименьшей, когда сумма двух взаимно обратных положительных выражений $\frac{6}{v}$ и $\frac{v}{6}$ примет наименьшее значение. И эта наименьшая сумма заведомо известна, она равна 2 (классическое неравенство $\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 2$ — наименьшее значение достигается при $a=1$). Следовательно, в нашем случае должно выполняться равенство $\frac{6}{v} = \frac{v}{6} = 1$, то есть $v = 6 \text{ км/ч}$. Время всей прогулки Алексея составляет $2 + \frac{13}{6} = \frac{25}{6}$ часа.

Ответ: 6 км/ч, $\frac{25}{6}$ часа.

Приведем решение Андрея Анатольевича.

Пусть v — скорость Алексея, и S — расстояние, на котором он находился в тот момент, когда его догнала Жучка. Время движения Алексея до того момента, когда из дому выбежала Жучка, равно $\frac{6}{v}$, время движения от этого момента до встречи с Жучкой равно $\frac{S-6}{v}$, время движения до возвращения домой $\frac{S}{4}$, тогда общее время составит

$$t(v) = \frac{6}{v} + \frac{S-6}{v} + \frac{S}{4} = \frac{S(v+4)}{4v}.$$

С другой стороны, время движения Жучки до встречи с Алексеем составит $\frac{S}{v+9}$. Тогда

$$\frac{S-6}{v} = \frac{S}{v+9} \Leftrightarrow S = \frac{6(v+9)}{9}.$$

Подставив данное выражение для S в первое уравнение, получим

$$t(v) = \frac{6(v+9)(v+4)}{9 \cdot 4v} = \frac{v^2 + 13v + 36}{6v}.$$

Для нахождения минимального времени исследуем функцию $f(v)$ на максимум и минимум с помощью производной:

$$f'(v) = \left(\frac{v^2}{6v}\right)' + \left(\frac{13v}{6v}\right)' + \left(\frac{36}{6v}\right)' = \frac{1}{6} - \frac{6}{v^2}.$$

Учитывая, что $v > 0$, найдем, что производная обращается в 0 при $v = 6$.

При $v = 6 \text{ км/ч}$ функция $f(v)$ принимает наименьшее значение, равное $\frac{25}{6}$ часа, или 4 часа 10 минут.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Углы A_1BC и A_1AC равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно,

$$\angle A_1BB_1 = \angle A_1AC + \angle CBB_1 = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 45^\circ.$$

б) Вычислим угол B :

$$\angle B = 90^\circ - \angle A = 30^\circ.$$

Вычислим угол B_1A_1A :

$$\angle B_1A_1A = \angle B_1BA = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ.$$

Вычислим угол AA_1C_1 :

$$\angle AA_1C_1 = \angle ACC_1 = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ,$$

таким образом, $\angle B_1A_1C_1 = 60^\circ$.

По теореме синусов имеем:

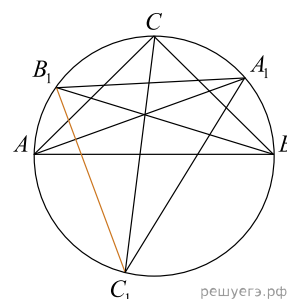
$$B_1C_1 = 2R \sin \angle B_1A_1C_1,$$

где R — это радиус описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ окружности и $2R = AB$.

Таким образом,

$$B_1C_1 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Ответ: б) 3.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

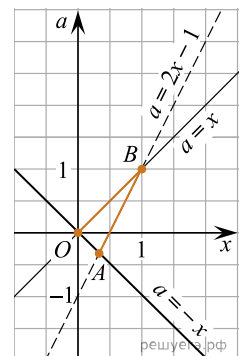
Решение. Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{3x^2 - (3a+1)x + a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - a^2 = 3x^2 - (3a+1)x + a, \\ x^2 - a^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - (3a+1)x + a(a+1) = 0, \\ (x+a)(x-a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = a, \\ x = \frac{a+1}{2}, \end{cases} & \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{3x^2 - (3a+1)x + a} \\ (x+a)(x-a) \geq 0. \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - a^2 = 3x^2 - (3a+1)x + a, \\ x^2 - a^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - (3a+1)x + a(a+1) = 0, \\ (x+a)(x-a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = a, \\ x = \frac{a+1}{2}, \end{cases} & \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{3x^2 - (3a+1)x + a} \\ (x+a)(x-a) \geq 0. \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - a^2 = 3x^2 - (3a+1)x + a, \\ x^2 - a^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - (3a+1)x + a(a+1) = 0, \\ (x+a)(x-a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = a, \\ x = \frac{a+1}{2}, \end{cases} & (x+a)(x-a) \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

В системе координат xOa графиками уравнений являются прямые $a = x$ и $a = 2x - 1$. При отрицательных значениях x неравенству $(x+a)(x-a) \geq 0$ удовлетворяют точки, лежащие одновременно не ниже прямой $a = -x$ и не выше прямой $a = x$. Решение полученной системы на отрезке $[0; 1]$ выделено оранжевым цветом. Абсциссы точек пересечения прямых найдём из уравнений:

$$-x = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, \quad x = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Значит, $A\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $B(1; 1)$.



Анализируя график, получаем, что исходное уравнение на отрезке $[0; 1]$

- при $a < -\frac{1}{3}$ не имеет корней;
- при $-\frac{1}{3} \leq a < 0$ имеет **один корень**;
- при $0 \leq a < 1$ имеет два корня;
- при $a = 1$ имеет **один корень**;
- при $a > 1$ не имеет корней.

Таким образом, исходное уравнение на отрезке $[0; 1]$ имеет один корень при $-\frac{1}{3} \leq a < 0$ или при $a = 1$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \{1\}$.

20.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть плюсы расставлены так, что суммируется семь чисел 11 и 45 единиц. Тогда сумма равна $7 \cdot 11 + 45 \cdot 1 = 122$.
б) Пусть в полученной сумме в разряде единиц в слагаемых стоит a_1 единиц, в разряде десятков — a_2 единиц, в разряде сотен — a_3 единиц и так далее. Тогда полученная сумма равна

$$\begin{aligned} a_1 + 10a_2 + 100a_3 + \dots &= 3(3a_2 + 33a_3 + \dots) + (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) = 3A + 59. \quad a_1 + 10a_2 + 100a_3 + \dots = \\ &= 3(3a_2 + 33a_3 + \dots) + (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) = 3A + 59. \quad a_1 + 10a_2 + 100a_3 + \dots = \\ &= 3(3a_2 + 33a_3 + \dots) + (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) = \\ &= 3A + 59. \end{aligned}$$

Таким образом, полученная сумма не делится на 3, а 123 делится на 3. Значит, невозможно получить сумму 123 при $n = 59$.

в) Если среди слагаемых в сумме присутствуют числа, большие 1111, то сумма будет больше 10000. Значит, каждое из слагаемых равно 1, 11, 111 или 1111. Пусть таких слагаемых a , b , c и d соответственно. Тогда $n = a + 2b + 3c + 4d = 59$, а сумма равна $a + 11b + 111c + 1111d$.

При $d \geq 9$ сумма больше 10000. Найдём наибольшую возможную сумму при $d \leq 8$. Заметим, что при замене четвёрки чисел $(a; b; c; d)$ на четвёрку $(a-2; b+1; c; d)$, $(a+1; b-2; c+1; d)$ или $(a; b+1; c-2; d+1)$ количество единиц останется неизменным, а сумма увеличится. Значит, если бы наибольшая сумма достигалась при $d \leq 7$, то выполнялись бы неравенства $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq 1$. Следовательно, $n = a + 2b + 3c + 4d \leq 34$, что противоречит условию.

Таким образом, наибольшая сумма достигается при $d = 8$. При этом $0 \leq a \leq 1$ и $0 \leq b \leq 1$. Поскольку

$$c = \frac{59 - 4d - 2b - a}{3} = \frac{27 - 2b - a}{3},$$

получаем $8 \leq c \leq 9$, то есть либо $c=8$, откуда $a+2b=3$ и $a=b=1$; либо $c=9$, откуда $a+2b=0$ и $a=b=0$. В первом случае $a+11b+111c=900$, а во втором $a+11b+111c=999$. Следовательно, наибольшая сумма достигается при $a=b=0$, $c=9$ и $d=8$ и равна $0+0 \cdot 11+9 \cdot 111+8 \cdot 1111=9887$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 9887.