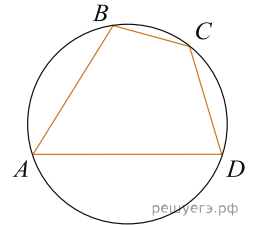


Вариант 50

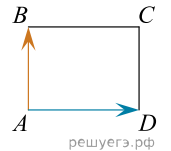
№ 1.

Угол A четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 58° . Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



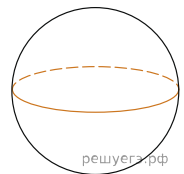
№ 2.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину разности векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.



№ 3.

Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?



№ 4.

У Дины в копилке лежит 7 рублёвых, 5 двухрублёвых, 6 пятирублёвых и 2 десятирублёвых монеты. Дина наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит менее 60 рублей.

№ 5.

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

№ 6.

Найдите корень уравнения $\sqrt{-32-x}=2$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{(4a)^{2,5}}{a^2\sqrt{a}}$ при $a > 0$.

№ 8.

Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a .

№ 9.

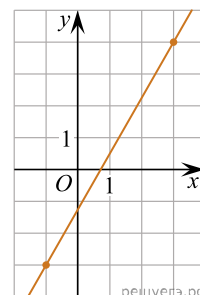
Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 4А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

№ 10.

Две трубы наполняют бассейн за 3 часа 36 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 6 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -13,5$.

**№ 12.**

Найдите наибольшее значение функции $y = \log_5(4 - 2x - x^2) + 3$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\operatorname{tg} x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A . На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 1 и 2.

а) Докажите, что точка M — середина ребра $A_1 B_1$.

б) Найдите высоту призмы, если ее объем равен 5 и известно, что точка K делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 K : KC_1 = 2 : 3$.

№ 15.

Решите неравенство $\frac{\sqrt{1-x^2+2x}+x-2}{\log_5(1,5-x)+\log_5 2} \leq 0$.

№ 16.

15-го января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 14-й долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 15-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Известно, что последний (пятнадцатый) платеж по кредиту составил 306 тысяч рублей. Найдите сумму, которую планируется взять в кредит, если общая сумма всех выплат после полного его погашения составит 1195 тысяч рублей. Ответ дайте в тыс. рублей.

№ 17.

Две окружности касаются внутренним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на большей и меньшей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает меньшую окружность в точке D . Прямая BC вторично пересекает большую окружность в точке E .

а) Докажите, что AE параллельно BD .

б) Найдите AC , если радиусы окружностей равны 8 и 15.

№ 18.

При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - a^2| + 8 = |x + a| + 8|x - a|$ имеет ровно три различных решения?

№ 19.

Пусть $\overline{abc}$ обозначает трехзначное число, равное $100a + 10b + c$, где a, b и c — десятичные цифры, $a \neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c , что $\overline{abc} + \overline{cba} = 1595$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые десятичные цифры a, b и c , что $3 \cdot \overline{abc} = 5 \cdot \overline{cba}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $\frac{\overline{abc}}{\overline{cba}}$, если среди попарно различных ненулевых десятичных цифр a, b и c есть цифра 6?

Ответы

1 [2774869](#) 2 [2773020](#) 3 [2721078](#) 4 [3201790,3](#) 5 [6727420,55](#) 6 [689090-94](#) 7 [267877](#) 8 [5260074](#) 9 [2800560](#) 10 [50229190](#) 11 [509280-9](#) 12 [774260](#)

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2

Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Сделаем замену переменной: $t = 2^{x^2-3}$, тогда $t^2 = (2^{x^2-3})^2 = 4^{x^2-3} = \frac{4^{x^2-1}}{4^2} = \frac{4^{x^2-1}}{16}$, и

$$16t^2 - 24t + 8 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} 2^{x^2-3} = 1, \\ 2^{x^2-3} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 0, \\ x^2 - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3}, \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

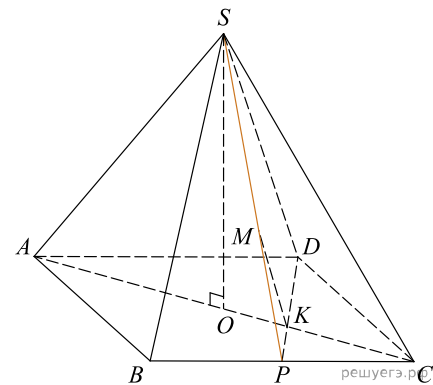
б) Заметим, что $\sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$, при этом $-\sqrt{3} < -\frac{5}{3} < -\sqrt{2}$. Поэтому в заданном отрезке лежат корни $\pm\sqrt{2}, \sqrt{3}$.

Ответ: а) $\{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$; б) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка M — точка пересечения медиан треугольника SBC , точка P — середина отрезка BC , точка K — точка пересечения отрезков AC и PD . Заметим, что треугольники AKD и CKP подобны по двум углам, тогда $\frac{PK}{KD} = \frac{PC}{AD} = \frac{1}{2}$. По свойству точки пересечения медиан $\frac{PM}{MS} = \frac{1}{2}$, а тогда $\frac{PK}{KD} = \frac{PM}{MS}$, откуда следует параллельность отрезков MK и DS . Плоскость α должна пересекать плоскость SDP по прямой, параллельной отрезку SD , ведь плоскость α параллельна отрезку SD по условию. Значит, плоскость α проходит через точку K , а тогда и через точку C , потому что точка C лежит на прямой AK .



б) Если боковые ребра пирамиды равны, то равны и их проекции. Вершина пирамиды проектируется в точку, равноудаленную от всех вершин основания, то есть в точку пересечения диагоналей основания $ABCD$ — точку O .

Введем систему координат с началом в точке B , ось Ox направим как луч BC , ось Oy — как луч BA , ось Oz направим вверх. Запишем теперь координаты точек: $A(0; \sqrt{3}x_0; 0)$, $C(x_0; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $S\left(\frac{x_0}{2}; \frac{\sqrt{3}x_0}{2}; \sqrt{3}x_0\right)$, $M\left(\frac{x_0}{2}; \frac{\sqrt{3}x_0}{6}; \frac{\sqrt{3}x_0}{3}\right)$. Здесь мы использовали, что

$$SO^2 = SB^2 - BO^2 = SB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = 4x_0^2 - \left(\frac{3x_0^2 + x_0^2}{4} = 3x_0^2\right)$$

и то, что точкой M отрезок SP делится в отношении 2:1, считая от вершины. Составим уравнение плоскости SBC , пусть оно таково: $Ax + By + Cz + D = 0$. Подставив координаты соответствующих точек, получим:

$$D = 0,$$

$$Ax_0 = 0,$$

$$\frac{Ax_0}{2} + \frac{B \cdot \sqrt{3}x_0}{2} + C \cdot \sqrt{3}x_0 = 0,$$

откуда $B = -2C$, $D = 0$, $A = 0$. Уравнение плоскости имеет вид $-2y + z = 0$.

Уравнение плоскости α имеет вид: $Ax + By + Cz + D = 0$. Подставим координаты точек A , M , C :

$$\begin{cases} B \cdot \sqrt{3}x_0 + D = 0, \\ Ax_0 + D = 0, \\ \frac{Ax_0}{2} + \frac{B \cdot \sqrt{3}x_0}{6} + \frac{C \cdot \sqrt{3}x_0}{3} + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -\sqrt{3}Bx_0, \\ A = \sqrt{3}B, \\ \frac{\sqrt{3}Bx_0}{2} + \frac{\sqrt{3}Bx_0}{6} + \frac{C \cdot \sqrt{3}x_0}{3} = \sqrt{3}Bx_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \cdot \sqrt{3}x_0 + D = 0, \\ Ax_0 + D = 0, \\ \frac{Ax_0}{2} + \frac{B \cdot \sqrt{3}x_0}{6} + \frac{C \cdot \sqrt{3}x_0}{3} + D = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = -\sqrt{3}Bx_0, \\ A = \sqrt{3}B, \\ \frac{\sqrt{3}Bx_0}{2} + \frac{\sqrt{3}Bx_0}{6} + \frac{C \cdot \sqrt{3}x_0}{3} = \sqrt{3}Bx_0, \end{cases}$$

откуда $C = \frac{\sqrt{3}B}{3} : \frac{\sqrt{3}}{3} = B$. Уравнение плоскости имеет вид $\sqrt{3}x + y + z - \sqrt{3}x_0 = 0$.

Плоскость SBC перпендикулярна вектору $\vec{n}_1 = (0; -2; 1)$. Плоскость α перпендикулярна вектору $\vec{n}_2 = (\sqrt{3}; 1; 1)$. Найдем косинус угла между плоскостями:

$$\cos(\widehat{SBC; \alpha}) = |\cos(\widehat{\vec{n}_1; \vec{n}_2})| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|-2 + 1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{5},$$

следовательно, $(\widehat{SBC; \alpha}) = \arccos \frac{1}{5}$.

Ответ: б) $\arccos \frac{1}{5}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Заметим, что $\log_3 \sqrt{2x+1} = \frac{1}{2} \log_3(2x+1) = \log_9(2x+1)$, и сделаем замену переменной $t = \log_3 \sqrt{2x+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \frac{|t|-2}{t+1} < -1 &\Leftrightarrow \frac{|t|+t-1}{t+1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ 2t-1 < 0, \\ t < 0, \\ t+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 < t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < t < \frac{1}{2}. \quad \frac{|t|-2}{t+1} < -1 \Leftrightarrow \frac{|t|+t-1}{t+1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ 2t-1 < 0, \\ t < 0, \\ t+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 < t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < t < \frac{1}{2}. \quad \frac{|t|-2}{t+1} < -1 \Leftrightarrow \frac{|t|+t-1}{t+1} < 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ 2t-1 < 0, \\ t < 0, \\ t+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 < t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < t < \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{aligned}
 -1 < \log_3 \sqrt{2x+1} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -1 < \frac{1}{2} \log_3(2x+1) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 < \log_3(2x+1) < 1 \Leftrightarrow -1 < \log_3 \sqrt{2x+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{2} \log_3(2x+1) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -2 < \log_3(2x+1) < 1 \Leftrightarrow -1 < \log_3 \sqrt{2x+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -1 < \frac{1}{2} \log_3(2x+1) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -2 < \log_3(2x+1) < 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 3^{-2} < 2x+1 < 3 \Leftrightarrow -\frac{8}{9} < 2x < 2 \Leftrightarrow -\frac{4}{9} < x < 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left(-\frac{4}{9}; 1\right)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть в проект будет вложено $\frac{5x^2}{144}$ млн руб., тогда на банковском счете будет размещено $50 - \frac{5x^2}{144}$ млн руб., а сумма, полученная инвестором по завершении проекта, будет равна $x + 1,2 \cdot \left(50 - \frac{5x^2}{144}\right)$ млн руб., где $0 \leq x \leq 12\sqrt{10}$.
Рассмотрим функцию

$$f(x) = x + 1,2 \cdot \left(50 - \frac{5x^2}{144}\right) = -\frac{x^2}{24} + x + 60.$$

Она квадратичная с отрицательным старшим коэффициентом и достигает своего наибольшего значения в точке

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{24}\right)} = 12,$$

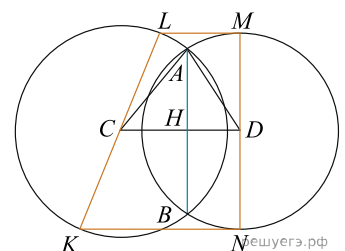
удовлетворяющей условию $0 \leq x \leq 12\sqrt{10}$. Значит, в проект будет вложено $\frac{5 \cdot 12^2}{144} = 5$ млн руб., а прибыль от проекта составит $12 - 5 = 7$ млн руб., что составляет $\frac{7}{5} \cdot 100\% = 140\%$.

Ответ: 140.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б и использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть C и D — центры окружностей с диаметрами KL и MN соответственно. Тогда C и D — середины боковых сторон трапеции, значит, CD — средняя линия трапеции. Линия центров CD пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам, следовательно, CD — серединный перпендикуляр к отрезку AB .



б) Пусть H — середина AB . Тогда AH — высота треугольника CAD со сторонами

$$CD = 15, AC = \frac{1}{2}KL = 14, AD = \frac{1}{2}MN = 13.$$

Пусть p — полупериметр треугольника CAD , S — площадь треугольника. Тогда

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21,$$

$$S = \sqrt{p(p-13)(p-14)(p-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

Значит,

$$AH = \frac{2S}{CD} = \frac{2 \cdot 84}{15} = \frac{2 \cdot 28}{5} = 11,2.$$

Следовательно, $AB = 2AH = 22,4$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б.	3
Получен обоснованный ответ в пункте б. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а. ИЛИ При обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте б и использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Решение. Заметим, что $9^{-x+1} \cdot 3^{x^2} = 3^{(x-1)^2+1}$. Из формулы $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$ находим:

$$\sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} (x-1) \right).$$

Тогда

$$3^{(x-1)^2+1} + \sqrt{2} + (a^3 + 5a^2 + a) = 3 + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} (x-1) \right).$$

Обе части уравнения симметричны относительно $x = 1$, а значит, если $x_1 = 1 + t$ корень уравнения, то и $x_2 = 1 - t$ — тоже корень. Чтобы уравнение имело единственный корень, оно должно иметь решением $x = 1$ и не иметь других решений. Подставим $x = 1$, получим:

$$\begin{aligned} a^3 + 5a^2 + a = 0 &\Leftrightarrow a(a^2 + 5a + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a^2 + 5a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}. \end{cases} \\ a^3 + 5a^2 + a = 0 &\Leftrightarrow a(a^2 + 5a + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a^2 + 5a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

В тоже время это условие является и достаточным, так как $3^{(x-1)^2+1} + \sqrt{2} \geq 3 + \sqrt{2}$ и равенство достигается при $x = 1$, а

$$3 + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} (x-1) \right) \leq 3 + \sqrt{2},$$

и равенство достигается при $x = 1 + 8k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $a \in \left\{ \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}; 0; \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \right\}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — в п. в приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Пусть, например, первый и четвертый ученики накормили первого кролика, а второй и третий — всех остальных. Тогда каждому досталось по 500 грамм корма.

б) Масса корма для одного кролика обязательно будет делиться на 100 и не превосходить 1000 грамм, что дает 11 вариантов — 0, 100, 200, ..., 1000 грамм.

в) Суммарно кролики получили

$$4 \cdot (100 + 200 + 300 + 400) = 4000$$

граммов корма. Упорядочим их по массе полученного корма. Если их было хотя бы 10, то масса корма составила не менее чем

$$0 + 100 + 200 + \dots + 900 = 4500 > 4000,$$

что невозможно.

Пример для 9 кроликов можно построить. Будем выдавать им 0, 100, 200, 300, 400, 100+200+300, 100+200+400, 100+300+400, 200+300+400 граммов корма. Тогда каждый ученик поучаствует в кормлении 4 раза.

Ответ: а) да; б) нет; в) 9.