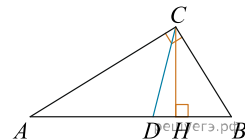


Вариант 51

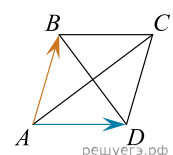
№ 1.

Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 61° . Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD , проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



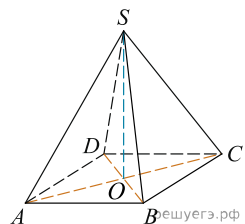
№ 2.

Диагонали изображенного на рисунке ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.



№ 3.

Диагональ AC основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 6. Высота пирамиды SO равна 4. Найдите длину бокового ребра SB .



№ 4.

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

№ 5.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.

№ 6.

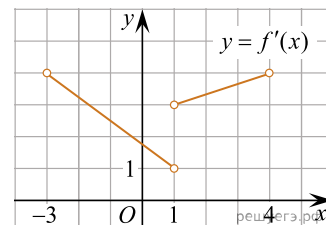
Найдите корень уравнения $\log_8 2^{8x-4} = 4$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{7\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} + \frac{5\sqrt{x}}{x} + 3x - 4$ при $x = 3$.

№ 8.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(-3; 4)$. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



№ 9.

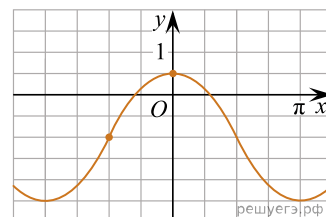
В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 4$ — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{100}$ м/мин² и $b = -\frac{2}{5}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

№ 10.

Заказ на 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 1 деталь больше?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите b .



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = 12 \cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $4^{\cos 2x} - \frac{1}{2} \cdot 16^{\sin^2 x} = 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

№ 14.

Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K , L , M и N лежат на ребрах AC , AD , DB и BC соответственно, так, что четырехугольник $KLMN$ — квадрат, и $AK:KC = 3:7$.

а) Докажите, что $AB:CD = 3:7$.

б) Найдите объем пирамиды $CKLMN$, если объем тетраэдра $ABCD$ равен 100.

№ 15.

Решите неравенство: $\log_{x+6} \left(\frac{x-4}{x} \right)^2 + \log_{x+6} \frac{x}{x-4} \leq 1$.

№ 16.

В июле 2023 года Иван Морозов планирует взять кредит на 8 лет в размере 800000 рублей. Условия возврата таковы:

- каждый январь с 2024 по 2027 год долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- каждый январь с 2028 по 2031 год долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Определите r , если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1444 тыс. рублей.

№ 17.

Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F . Точка D — основание высоты, опущенной из вершины C . Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD .

а) Докажите, что точки O_1 и O_2 лежат на отрезке EF .

б) Найдите расстояние от точки C до прямой O_1O_2 , если $AC = 15$ и $BC = 20$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (2 - 5a)x + 4a^2 - 2a \leq 0, \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

№ 19.

На столе лежит N монет по 2 рубля и $(1200 - N)$ монет по 5 рублей (N — натуральное число от 1 до 1199). Оказалось, что если взять любые 500 монет, то сумма денег, набранная этими монетами, будет не меньше четверти от общей суммы денег на столе.

а) Может ли N равняться 400?

б) Может ли N равняться 600?

в) Сколько различных значений может принимать число N ?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	500246	64
2	649891	-2
3	25561	76
4	1024	0,25
5	320180	0,52
6	26659	-4
7	563891	2
8	656609	7
9	27965	2
10	99584	30
11	509101	0,25
12	26729	-3

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем левую часть уравнения при помощи формулы разности косинусов:

$$\cos 9x - \cos 7x = \sqrt{2} \sin x \Leftrightarrow -2 \sin 8x \sin x = \sqrt{2} \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin 8x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ 8x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 8x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{32} + \frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = -\frac{3\pi}{32} + \frac{\pi k}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin 8x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ 8x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 8x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{32} + \frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = -\frac{3\pi}{32} + \frac{\pi k}{4}, \end{cases}$$

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$. Учитывая, что $k \in \mathbb{Z}$, решим неравенства:

$-\frac{3\pi}{2} \leq \pi k \leq -\pi,$ $-\frac{3}{2} \leq k \leq -1,$ $k = -1.$ Значит, $x = -\pi$.	$-\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{32} + \frac{\pi k}{4} \leq -\pi,$ $-\frac{3}{2} \leq \frac{-1+8k}{32} \leq -1,$ $-48 \leq -1+8k \leq -32,$ $-\frac{47}{8} \leq k \leq -\frac{31}{8},$ $k = -5 \text{ или } k = -4.$ Значит, $x = -\frac{33\pi}{32}$ или $x = -\frac{41\pi}{32}$.	$-\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{3\pi}{32} + \frac{\pi k}{4} \leq -\pi,$ $-\frac{3}{2} \leq \frac{-3+8k}{32} \leq -1,$ $-48 \leq -3+8k \leq -32,$ $-\frac{45}{8} \leq k \leq -\frac{29}{8},$ $k = -5 \text{ или } k = -4.$ Значит, $x = -\frac{35\pi}{32}$ или $x = -\frac{43\pi}{32}$.
--	---	--

На указанном промежутке лежат числа $-\frac{43\pi}{32}, -\frac{41\pi}{32}, -\frac{35\pi}{32}, -\frac{33\pi}{32}, -\pi$.

Ответ: а) $\left\{ \pi k, -\frac{\pi}{32} + \frac{\pi k}{4}, -\frac{3\pi}{32} + \frac{\pi k}{4} : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{43\pi}{32}, -\frac{41\pi}{32}, -\frac{35\pi}{32}, -\frac{33\pi}{32}, -\pi$.

№ 14.

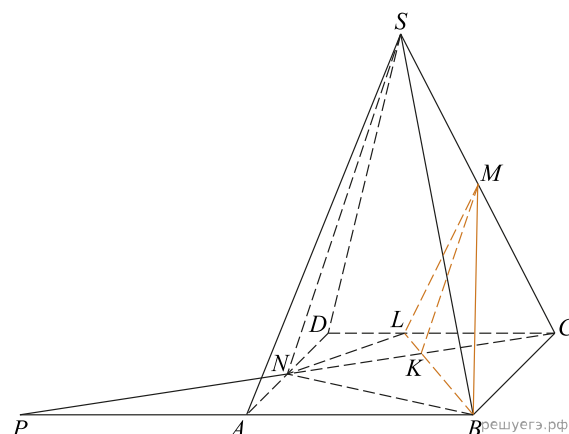
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) В треугольнике CSN через точку M проведем среднюю линию MK . Тогда K — середина CN , а прямая MK лежит в плоскости α . Пусть L — точка пересечения прямой BK (а вместе с ней — и плоскости α) с ребром CD . Тогда треугольник BLM — сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α .

Пусть P — точка пересечения прямых CN и AB . Прямоугольные треугольники CDN и PAN равны по катету и острому углу, следовательно, $CN = PN$ и $CD = PA$. Треугольники CLK и PBK подобны по двум углам, следовательно,

$$\frac{CL}{AB} = \frac{CL}{BP} = \frac{CK}{KP} = \frac{\frac{1}{2}CN}{KN+NP} = \frac{CN}{3CN} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{CL}{AB} = \frac{2}{3},$$



$$\frac{DL}{CL} = \frac{CD - CL}{CL} = \frac{CD - \frac{2}{3}CD}{\frac{2}{3}CD} = \frac{1}{2}.$$

б) Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости равно расстоянию от какой-либо точки этой прямой до этой плоскости. Найдем расстояние от точки N до плоскости α как длину высоты h_N пирамиды $MNLB$, проеденной из точки N на основание MLB . Находим:

$$S_{ABN} = \frac{1}{2}AN \cdot AB = \frac{1}{4}AB^2 = 9,$$

$$S_{DNL} = \frac{1}{2}DN \cdot DL = \frac{1}{12}AB^2 = 3,$$

$$S_{ABLD} = \frac{1}{2}(AB + LD) \cdot AD = \frac{2}{3}AB^2 = 24,$$

$$S_{NLB} = S_{ABLD} - S_{ABN} - S_{DNL} = 12.$$

Высота h_M пирамиды $MNLB$, опущенная из вершины M , равна половине высоты h_S пирамиды $SABCD$, опущенной из вершины S . Получаем:

$$DN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB = 3,$$

$$SN = \sqrt{SD^2 - DN^2} = 3\sqrt{15},$$

$$h_S = \sqrt{SN^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = 3\sqrt{14},$$

$$h_M = \frac{1}{2}h_S = \frac{3\sqrt{14}}{2},$$

$$V_{MNLB} = \frac{1}{3}S_{NLB} \cdot h_M = 6\sqrt{14}.$$

Вычислим площадь треугольника MLB . Пусть угол между боковым ребром пирамиды и прилежащей стороной основания равен β . Заметим, что:

$$\cos \beta = \frac{AB}{2SA} = \frac{1}{4},$$

$$CM = \frac{1}{2}SC = 6,$$

$$CL = \frac{2}{3}CD = 4.$$

Тогда

$$MB = \sqrt{BC^2 + CM^2 - 2BC \cdot CM \cos \beta} = 3\sqrt{6},$$

$$ML = \sqrt{CL^2 + CM^2 - 2CL \cdot CM \cos \beta} = 2\sqrt{10},$$

$$BL = \sqrt{BC^2 + CL^2} = 2\sqrt{13}.$$

Применим формулу Герона:

$$\begin{aligned} S_{MLB} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} + \sqrt{10} + \sqrt{13}\right) \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} + \sqrt{10} - \sqrt{13}\right) \left(\sqrt{13} + \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{10}\right)\right) \left(\sqrt{13} - \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{10}\right)\right)} = \\ &= \sqrt{\left(6\sqrt{15} + \frac{21}{2}\right) \left(6\sqrt{15} - \frac{21}{2}\right)} = \sqrt{36 \cdot 15 - \frac{441}{4}} = \frac{\sqrt{1719}}{2} = \frac{3\sqrt{191}}{2}. \quad S_{MLB} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} + \sqrt{10} + \sqrt{13}\right) \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} + \sqrt{10} - \sqrt{13}\right) \left(\sqrt{13} + \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{10}\right)\right) \left(\sqrt{13} - \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{10}\right)\right)} = \\ &= \sqrt{\left(6\sqrt{15} + \frac{21}{2}\right) \left(6\sqrt{15} - \frac{21}{2}\right)} = \\ &= \sqrt{36 \cdot 15 - \frac{441}{4}} = \frac{\sqrt{1719}}{2} = \frac{3\sqrt{191}}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$h_N = \frac{3V_{MNLB}}{S_{MLB}} = \frac{3 \cdot 6\sqrt{14} \cdot 2}{3\sqrt{191}} = \frac{12\sqrt{14}}{\sqrt{191}}.$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{14}}{\sqrt{191}}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Обозначим $t = 0,5^x$, получим неравенство рациональное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{t-8}{t-4} \leq t+1 &\Leftrightarrow \frac{t-8-(t+1)(t-4)}{t-4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t-8-(t^2-3t-4)}{t-4} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{t^2-4t+4}{t-4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-2)^2}{t-4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2, & \frac{t-8}{t-4} \leq t+1 \\ t>4, & \frac{t-8}{t-4} \leq t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{t-8-(t+1)(t-4)}{t-4} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{t-8-(t^2-3t-4)}{t-4} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{t^2-4t+4}{t-4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-2)^2}{t-4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2, \\ t>4. \end{cases} \end{aligned}$$

Вернемся к исходной переменной, получим уравнение $0,5^x = 2$, решением которого является число -1 , и неравенство $0,5^x > 4$, решениями которого являются числа, меньшие -2 .

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \{-1\}$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $S = 419\,375$ — сумма кредита, руб.—ежегодный платеж, $k = 1 + \frac{20}{100} = 1,2$. Тогда схема выплаты кредита выглядит так:

$$(((S \cdot k - x) \cdot k - x) \cdot k - x) \cdot k - x = 0 \Leftrightarrow Sk^4 - k^3x - k^2x - kx - x = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x = \frac{Sk^4}{k^3 + k^2 + k + 1} &\Leftrightarrow x = \frac{419\,375 \cdot (\frac{6}{5})^4}{\frac{216}{125} + \frac{36}{25} + \frac{6}{5} + 1} \Leftrightarrow x = \frac{419375 \cdot (\frac{6}{5})^4}{\frac{671}{125}} \Leftrightarrow x = 5^3 \cdot 6^4 = 162\,000. \quad x = \frac{Sk^4}{k^3 + k^2 + k + 1} \Leftrightarrow x = \frac{419\,375 \cdot (\frac{6}{5})^4}{\frac{216}{125} + \frac{36}{25} + \frac{6}{5} + 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{419375 \cdot (\frac{6}{5})^4}{\frac{671}{125}} \Leftrightarrow x = 5^3 \cdot 6^4 = 162\,000. \end{aligned}$$

Таким образом, общая сумма выплат банку равна $4 \cdot 162\,000 = 648\,000$ руб.

Ответ: 648 000.

№ 17.

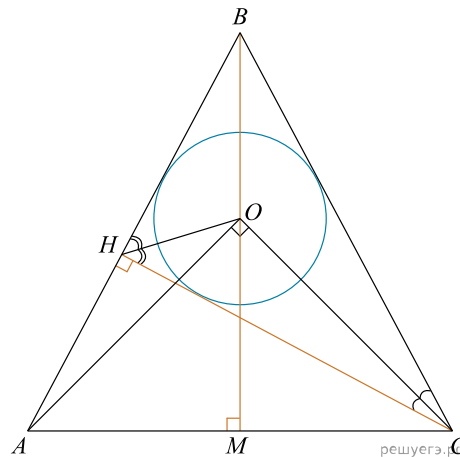
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Окружность вписана в треугольник HBC , поэтому её центр O является точкой пересечения биссектрис этого треугольника. Следовательно, лучи CO и HO — биссектрисы углов HCB и BHC соответственно. Треугольники ABO и CBO равны по двум сторонам и углу между ними: $AB = BC$, сторона BO — общая, $\angle ABO = \angle CBO$. Значит, $\angle HAO = \angle BAO = \angle BCO = \angle OCH$. Отрезок OH виден под одинаковыми углами из точек A и C , поэтому четырёхугольник $ASOH$ — вписанный. Его вписанные углы AHC и AOC опираются на сторону AC , а значит, они равны: $\angle AOC = \angle AHC = 90^\circ$.

б) Окружность вписана в угол ABC , поэтому её центр O лежит на биссектрисе BO угла ABC . Продлим биссектрису BO до пересечения со стороной AC в точке M . Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, также является высотой и медианой. Длина медианы прямоугольного треугольника, проведённой из вершины прямого угла, равна половине длины гипотенузы, а потому для треугольника AOC получаем: $MO = \frac{1}{2}AC = 8$. Таким образом, искомая площадь равна:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BM \cdot AC = \frac{1}{2}(BO + MO) \cdot 16 = 7,5 \cdot 16 = 120.$$

Ответ: б) 120.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3

С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Пусть $t = 5^x$, тогда исходное уравнение записывается в виде

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2.$$

Поскольку x — неотрицательная величина, полученное уравнение должно иметь два различных решения, каждое из которых не меньше 1. Построим график этого уравнения на плоскости tOa .

Прямые $t = a/2$ и $t = -2a$ разбивают плоскость на 4 области. Выражение $2t - a$ положительно в областях 1 и 4, отрицательно — в областях 2 и 3. Выражение $t + 2a$ положительно в областях 1 и 2, отрицательно в областях 3 и 4. Раскроем модули на данных областях.

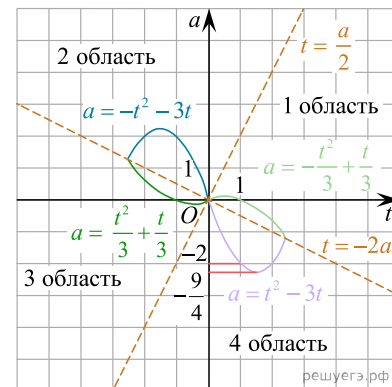
Область 1: $2t - a - t - 2a = t^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t$. График функции — парабола с вершиной в точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{12}\right)$, ветви которой направлены вниз.

Область 2: $-2t + a - t - 2a = t^2 \Leftrightarrow a = -t^2 - 3t$. График функции — парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$, ветви которой направлены вниз.

Область 3: $-2t + a + t + 2a = t^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t$. График функции — парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{12}\right)$, ветви которой направлены вверх.

Область 4: $2t - a + t + 2a = t^2 \Leftrightarrow a = t^2 - 3t$. График функции — парабола с вершиной в точке $\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, ветви которой направлены вверх.

Прямая, параллельная оси Ot , имеет при $t \geq 1$ ровно две точки пересечения с построенным графиком уравнения при $-\frac{9}{4} < a \leq -2$ (выделено красным).



Ответ: $-\frac{9}{4} < a \leq -2$.

Примечание.

Внимательный читатель заметит, что в силу неравенства $t = 5^x > 0$, строить график уравнения имеет смысл только в первой и четвертой координатных четвертях и исключенной точкой $O(0;0)$. Это наблюдение позволяет заметно сократить решение.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A , а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B .

а) Заметим, что $A = \frac{m}{7}, B = \frac{n}{5}$, где m и n — некоторые натуральные числа.

Значит, $A - B = \frac{m}{7} - \frac{n}{5} = \frac{5m - 7n}{35}$. Если $A - B = \frac{1}{30}$, то $5m - 7n = \frac{35}{30}$, что невозможно.

Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться $\frac{1}{30}$.

б) Например, для оценок экспертов 0, 1, 2, 4, 7, 8, 9 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна

$$\frac{0+1+2+4+7+8+9}{7} - \frac{1+2+4+7+8}{5} = \frac{31}{7} - \frac{22}{5} = \frac{1}{35}.$$

в) Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных пяти оценок. Тогда

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{x+y+z}{7} - \frac{y}{5} = \frac{5x-2y+5z}{35} \leq \frac{5x+5z-2((x+1)+(x+2)+\dots+(x+5))}{35} = A - B = \frac{x+y+z}{7} - \frac{y}{5} = \\ &= \frac{5x-2y+5z}{35} \leq \frac{5x+5z-2((x+1)+(x+2)+\dots+(x+5))}{35} = \\ &= \frac{5z-5x-30}{35} \leq \frac{5 \cdot 10 - 5 \cdot 0 - 30}{35} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10 разность $A - B$ равна $\frac{4}{7}$. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно $\frac{4}{7}$.

Ответ: а) нет; б) да; в) $\frac{4}{7}$.