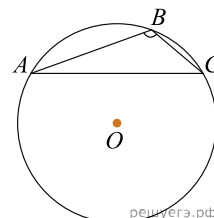


Вариант 52

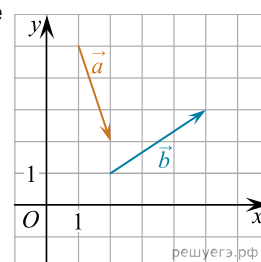
№ 1.

Найдите хорду, на которую опирается угол 120° , вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.



№ 2.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



№ 3.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке P . Объем пирамиды равен 1, $PS = 1$. Найдите площадь треугольника ABC .

№ 4.

На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

№ 5.

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

№ 6.

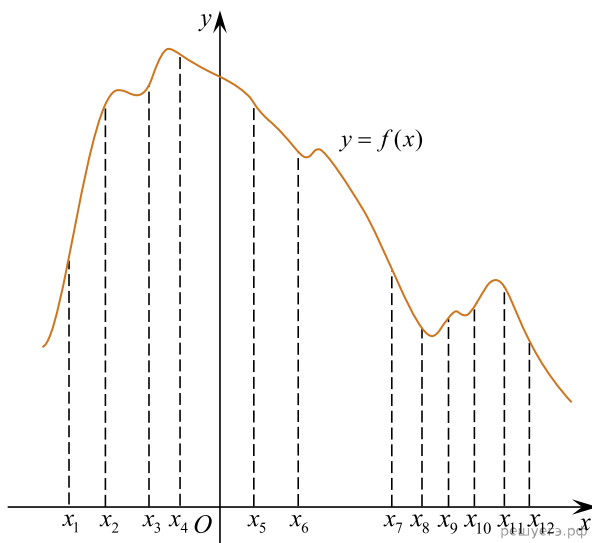
Найдите корень уравнения: $x^2 - 17x + 72 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

№ 7.

Найдите значение выражения $3^{-0,7} \cdot 3^{1,3} \cdot 9^{0,7}$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



№ 9.

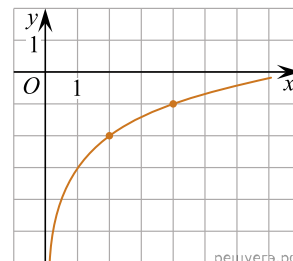
Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в c^{-1}), A_0 — постоянный параметр, $\omega_p = 360c^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 12,5%. Ответ выразите в c^{-1} .

№ 10.

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f(32)$.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке $[-3; 3]$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $\frac{4 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) (\cos x - 1) + 3}{\sqrt{\sin x}} = 0$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 4\pi]$.

№ 14.

В цилиндре на окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а AC_1 пересекает его ось цилиндра.

- а) Докажите, что угол $C_1BA = 90^\circ$.
- б) Найдите площадь боковой поверхности, если $AB = 16$, $BB_1 = 5$, $B_1C_1 = 12$.

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{x}{(x-2)^3 + (x-3)^3 - 1} \geq 0$.

№ 16.

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером 4 миллиона рублей на срок 48 месяцев. Условия возврата кредита таковы:

- 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- с 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2030 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A , если общая сумма платежей в 2030 году составит 6390 тысяч рублей?

№ 17.

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

- а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
- б) Найдите BC , если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{3|x+a| - a + x - 10}{\sqrt{x^2 - 18x - 88}} = 0$$

имеет ровно два корня.

№ 19.

Восемь экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку— целое число баллов от 0 до 12 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма— это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое шести оставшихся оценок.

- а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{20}$?
- б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{24}$?
- в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	676844	54
2	649915	-0,96
3	245336	8
4	510381	0,25
5	320173	0,02
6	77370	-4
7	26746	2
8	525699	1
9	27975	10
10	99584	30
11	642407	4
12	77493	0,5

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

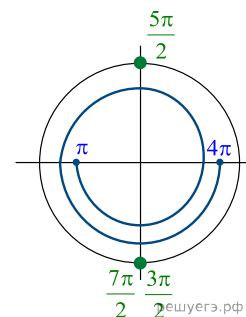
Решение. а) Положим, $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\cos x}$, получаем:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -3. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни при помощи единичной окружности (см. рис.). Получим: $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ и $\frac{7\pi}{2}$.



Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ и $\frac{7\pi}{2}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Так как боковые грани параллелепипеда попарно параллельны, сторона сечения PD параллельна стороне B_1N , а сторона сечения PB_1 параллельна стороне ND , следовательно, сечение — параллелограмм. Проведём прямую RN параллельно диагонали основания AC . Прямые PB_1 и ND параллельны, поэтому прямоугольные треугольники PA_1B_1 и NCD равны. Далее имеем:

$$A_1P = NC = AR = \frac{3}{7}AA_1 = 6,$$

$$PR = 2,$$

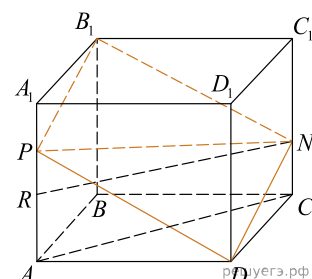
$$AC = RN = \frac{PR}{\operatorname{tg} \angle PNR} = 10,$$

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 8,$$

а тогда $DN = \sqrt{CD^2 + NC^2} = 10$ и $B_1N = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1N^2} = 10$. Таким образом, DPB_1N — ромб.

б) Найдём диагонали ромба:

$$PN = \sqrt{RN^2 + PR^2} = 2\sqrt{26},$$



$$B_1D = \sqrt{BD^2 + BB_1^2} = 2\sqrt{74}.$$

Теперь найдём площадь ромба:

$$S_{DPB_1N} = \frac{1}{2}PN \cdot B_1D = 4\sqrt{481}.$$

Ответ: $4\sqrt{481}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Обозначая $t = 7^{\log_x 5}$, во второй скобке получим $t^2 - t - 2 = (t - 2)(t + 1)$, откуда

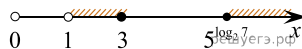
$$\begin{aligned} (3-x) \cdot (49^{\log_x 5} - 7^{\log_x 5} - 2) \geq 0 &\Leftrightarrow (3-x) (7^{\log_x 5} - 2) (7^{\log_x 5} + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (3-x) (7^{\log_x 5} - 2) \geq 0. \quad (3-x) \cdot (49^{\log_x 5} - 7^{\log_x 5} - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3-x) (7^{\log_x 5} - 2) (7^{\log_x 5} + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (3-x) (7^{\log_x 5} - 2) \geq 0. \quad (3-x) \cdot (49^{\log_x 5} - 7^{\log_x 5} - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3-x) (7^{\log_x 5} - 2) (7^{\log_x 5} + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3-x) (7^{\log_x 5} - 2) \geq 0. \end{aligned}$$

Решим это неравенство методом интервалов.

ОДЗ неравенства: $x > 0$, $x \neq 1$. Найдём нули левой части:

$$\begin{aligned} (3-x) (7^{\log_x 5} - 2) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=0, \\ 7^{\log_x 5} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ \log_2 7 \log_x 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ \log_2 7 = \frac{1}{\log_x 5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ \log_2 7 = \log_5 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ x=5^{\log_2 7}. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим на числовой прямой ОДЗ и корни на оси, выберем пробные точки:



— при $x = 125$ получаем $(3 - 125) (7^{\log_{125} 5} - 2) \geq 0$ — верно;

— при $x = 5$ получаем $(3 - 5) (7^{\log_5 5} - 2) \geq 0$ — неверно;

— при $x = 2$ получаем $(3 - 2) (7^{\log_2 5} - 2) \geq 0$ — верно;

— при $x = \frac{1}{5}$ получаем $\left(3 - \frac{1}{5}\right) \left(7^{\log_{\frac{1}{5}} 5} - 2\right) \geq 0$ — неверно.

Получаем, что $1 < x \leq 3$ или $x \geq 5^{\log_2 7}$.

Ответ: $(1; 3] \cup [5^{\log_2 7}; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть число джинсов, рубашек и сумок, которые предприниматель купил в один из дней, равны соответственно a , b и c . Тогда справедлива система

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} a+b+c=200, \\ 1000a+800b+400c=158\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a+5b+5c=1000, \\ 5a+4b+2c=790 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=200, \\ b+3c=210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=200, \\ c=70-\frac{b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=200, \\ 1000a+800b+400c=158\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 5a+5b+5c=1000, \\ 5a+4b+2c=790 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=200, \\ b+3c=210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=200, \\ c=70-\frac{b}{3} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что a , b и c — целые неотрицательные числа, получаем:

$$c = 70 - \frac{b}{3} \leq 70.$$

Наибольшее значение $c = 70$ достигается при $b = 0$ и $a = 130$. Таким образом, максимальное число сумок, которое могло быть куплено предпринимателем в один из таких дней, равно 70.

Ответ: 70.

Приведём решение Александра Порецкого.

Если закупить только сумки (200 штук), то будет потрачено 80 тыс. руб., необходимо потратить еще 78 тыс. руб.

Каждая замена сумки на рубашку увеличивает расходы на 200 руб., а замена рубашки на джинсы увеличивает расходы на 600 руб. Таким образом, чтобы дополнительно потратить 78 тыс. руб. надо осуществить не меньше, чем $\frac{78000}{600} = 130$ замен сумок на другие товары.

Значит, число сумок, которое останется после замен будет не больше $200 - 130 = 70$. Это значение достигается, если будут куплены 130 джинсов и 70 сумок.

№ 17.

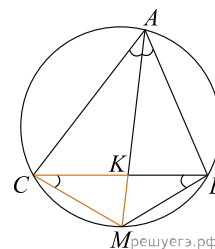
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Из условия $\angle MAC = \angle MAB$. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, поэтому $\angle MAC = \angle MBC$ и $\angle MAB = \angle MCB$. Следовательно, в треугольнике BMC углы при основании равны, поэтому он равнобедренный по признаку.

б) Отрезки, на которые биссектриса делит противоположную сторону, пропорциональны прилежащим сторонам:

$$\frac{BK}{KC} = \frac{BA}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$



Отсюда $BK = 4$, $KC = 3$. По теореме косинусов в треугольнике BAC :

$$\cos \angle ABC = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC} = \frac{64 + 49 - 36}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{77}{102} = \frac{11}{16}.$$

Значит,

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \sqrt{\frac{135}{256}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 15}{16^2}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}. \quad \sin \angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \sqrt{\frac{135}{256}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 15}{16^2}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

Вписанные углы, опирающиеся на дугу AC , равны, поэтому $\angle AMC = \angle ABC$. По теореме синусов для треугольника KMC получаем:

$$R = \frac{KC}{2 \sin \angle KMC} = \frac{3}{2 \sin \angle ABC} = \frac{3 \cdot 16}{2 \cdot 3\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}}{15}.$$

Ответ: б) $\frac{8\sqrt{15}}{15}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a = 1,5$ и/или $a = 2$.	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающиеся от искомого только исключением $a = 0$, а также, может быть, включением/исключением точек $a = 1,5$ и/или $a = 2$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения.	2
Верно найдены все три граничные точки множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Найдем производную функции и определим, в каких точках производная обращается в нуль:

$$f'(x) = 12ax^3 - 24x^2 + 6x,$$

$$12ax^3 - 24x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 6x(2ax^2 - 4x + 1) = 0.$$

При $a=0$ полученное уравнение имеет два корня: $x=0$ и $x=\frac{1}{4}$. Точка 0 является точкой минимума, точка $\frac{1}{4}$ является точкой максимума.

При $a \in (0; 2)$ уравнение $2ax^2 - 4x + 1 = 0$ имеет два различных корня, каждый из которых отличен от нуля, а потому производная обращается в нуль в трех различных точках:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{4 - 2a}}{2a} \quad \text{и} \quad x_3 = \frac{2 + \sqrt{4 - 2a}}{2a},$$

где точка x_2 является точкой максимума, а точки x_1 и x_3 — точки минимума. Точка x_3 не лежит на отрезке $[-1; 1]$, если либо $\frac{2 + \sqrt{4 - 2a}}{2a} < -1$, что невозможно для положительных a , либо $\frac{2 + \sqrt{4 - 2a}}{2a} > 1$, откуда $2 + \sqrt{4 - 2a} > 2a$. Левая часть неравенства убывает на интервале $(0; 2)$, правая — возрастает, число $\frac{3}{2}$ обращает неравенство в верное числовое равенство, поэтому неравенство верно при $0 < a < \frac{3}{2}$.

При $a=2$ уравнение $2ax^2 - 4x + 1 = 0$ имеет один корень $\frac{1}{2}$ кратности 2, в этой точке производная не меняет знак, а потому это не точка экстремума. Кроме того, производная обращается в нуль при $x = 0$, это точка минимума.

При $a > 2$ уравнение $2ax^2 - 4x + 1 = 0$ не имеет корней, поэтому производная обращается в нуль только при $x=0$, это точка минимума.

Таким образом, функция $f(x) = 3ax^4 - 8x^3 + 3x^2 - 7$ на отрезке $[-1; 1]$ имеет одну точку минимума при $a \in [0; 1,5)$ или при $a \geq 2$.

Ответ: $a \in [0; 1,5) \cup [2; +\infty)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. а; — обоснованное решение в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть $a = 11$, $b = 30$, $c = 16$ и $d = 39$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{27}{69} = \frac{9}{23}$.

б) Предположим, что $11 \cdot \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Тогда

$$11 \cdot (a+c)bd = (b+d)(ad+bc),$$

$$11abd + 11bcd = abd + bcd + ad^2 + b^2c,$$

$$10abd - ad^2 = b^2c - 10bcd,$$

$$ad(10b-d) = bc(b-10d).$$

С другой стороны, имеем

$$10b - d \geq 10 \cdot 10 - 99 > 0 > 99 - 10 \cdot 10 \geq b - 10d.$$

Следовательно, числа $ad(10b - d)$ и $bc(b - 10d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99 \geq a \geq 5b + 1$ и $c \geq 8d + 1$. Значит, $b \leq \frac{98}{5} < 20$. Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b \leq 19$.

Используя неравенства

$$a \geq 5b + 1, \quad c \geq 8d + 1, \quad b \leq 19, \quad d \geq 10,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{b+d} &\geq \frac{5b+8d+2}{b+d} = 5 + \frac{3d+2}{b+d} \geq 5 + \frac{3d+2}{d+19} = 8 - \frac{55}{d+19} \geq 8 - \frac{55}{29} = \frac{177}{29} \cdot \frac{a+c}{b+d} \geq \frac{5b+8d+2}{b+d} = 5 + \frac{3d+2}{b+d} \geq 5 + \frac{3d+2}{d+19} = \\ &= 8 - \frac{55}{d+19} \geq 8 - \frac{55}{29} = \frac{177}{29}. \end{aligned}$$

Пусть $a=96$, $b=19$, $c=81$ и $d=10$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{177}{29}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{177}{29}$.

Ответ: а) да, например, если $a = 11$, $b = 30$, $c = 16$ и $d = 39$; б) нет; в) $\frac{177}{29}$.
