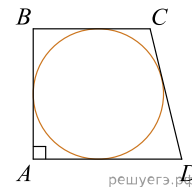


# Вариант 57

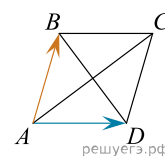
№ 1.

Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.



№ 2.

Диагонали изображенного на рисунке ромба  $ABCD$  равны 12 и 16. Найдите длину вектора  $\vec{AB} + \vec{AD}$ .



№ 3.

В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

№ 4.

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.

№ 5.

Агрофирма закупает куриные яйца только в двух домашних хозяйствах. Известно, что 5% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 30% яиц высшей категории. В этой агрофирме 15% яиц высшей категории. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

№ 6.

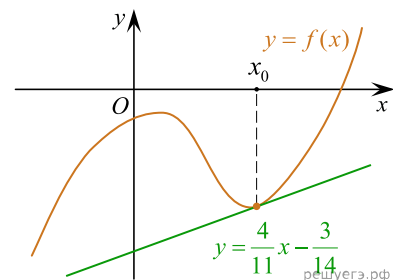
Найдите корень уравнения  $\log_8 2^{8x-4} = 4$ .

№ 7.

Найдите значение выражения  $\log_5 0,2 + \log_{0,5} 4$ .

№ 8.

На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведённая в точке  $x_0$ . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции  $g(x) = -5f(x) - \frac{2}{11}x + \ln 3$  в точке  $x_0$ .



№ 9.

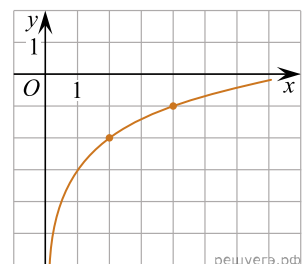
Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной  $l$  км с постоянным ускорением  $a$  км/ч<sup>2</sup>, вычисляется по формуле  $v = \sqrt{2la}$ . Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч<sup>2</sup>.

№ 10.

Смешали равные массы двух растворов кислоты, концентрации которых относятся как 2:5, и получили новый раствор, содержащий 49% кислоты. Найдите разность концентраций второго и первого растворов. Ответ дайте в процентах.

№ 11.

На рисунке изображён график функции  $f(x) = b + \log_a x$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = 1$ .



№ 12.

Найдите точку максимума функции  $y = \sqrt{-6 + 12x - x^2}$ .

№ 13.

- Решите уравнение  $\cos 3x - \sin\left(7x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 5x$ .
- Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку  $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$ .

№ 14.

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

- Докажите, что плоскости  $AB_1 D_1$  и  $A_1 BC$  перпендикулярны.
- Найдите угол между плоскостями  $AB_1 D_1$  и  $ACD_1$ .

№ 15.

Решите неравенство  $\frac{\log_x(2x^{-1}) \cdot \log_x(2x^2)}{\log_{(2x)}x \cdot \log_{(2x^{-2})}x} < 40$ .

№ 16.

Уважаемый предприниматель Арсен открыл на трассе М-4 два премиальных заведения: элитную шашлычную «Золотой шампур» и VIP-автомойку «Чистый Лев». На летние каникулы из родного аула к Арсену приехали 60 племянников, которых нужно пристроить к делу. Каждый день Арсен должен распределить всех 60 племянников между двумя бизнесами.

— Если на шашлычную отправлено  $x$  племянников, то из-за того, что они начинают спорить, чей маринад лучше, и постоянно отвлекаются на произнесение тостов за здоровье клиентов, ежедневная выручка (в тысячах рублей) вычисляется по формуле:  $R_1(x) = 15x - 0,1x^2$ .

— Если на автомойке работает  $y$  племянников, то из-за того, что они устраивают соревнования по лезгинке с активной пеной и бесплатно моют заниженные Приоры всех знакомых, выручка (в тысячах рублей) составляет:  $R_2(y) = 21y - 0,2y^2$ .

Как Арсен должен распределить племянников между шашлычной и автомойкой, чтобы суммарная ежедневная выручка была наибольшей и он быстрее накопил на новый «Гелендваген»? Какова будет эта максимальная выручка (в тысячах рублей)?

№ 17.

В треугольнике  $KLM$  на продолжении стороны  $KL$  за точку  $L$  взята точка  $D$ , точка  $N$  лежит на пересечении биссектрисы угла  $MLD$  и прямой  $KM$ . Отрезки  $KC$  и  $NP$  — биссектрисы треугольника  $KLN$ ,  $\angle PMC = 90^\circ$ .

а) Докажите, что  $\angle KLM = 60^\circ$ .

б) Найдите площадь треугольника  $LMC$ , если  $KL = 10$  и  $ML = 5$ .

№ 18.

Найдите наименьшее целое значение параметра  $a$ , при котором уравнение  $\left| \frac{7 - |x|}{|x| - 2} \right| = a$  имеет ровно четыре корня.

№ 19.

Для чисел  $A$  и  $B$ , состоящих из одинакового количества цифр, вычислили  $S$  — сумму произведений соответствующих цифр. Например, для числа  $A = 123$  и  $B = 579$  получается сумма  $S = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 46$ .

а) Существуют ли трёхзначные числа  $A$  и  $B$ , для которых  $S = 100$ ?

б) Существуют ли пятизначные числа  $A$  и  $B$ , для которых  $S = 400$ ?

В) Верно ли, что любое натуральное число от 1 до 260 является суммой для некоторых четырёхзначных чисел  $A$  и  $B$ ?

## Ответы

| Номер | Задание                | Ответ |
|-------|------------------------|-------|
| 1     | <a href="#">27938</a>  | 2     |
| 2     | <a href="#">27714</a>  | 16    |
| 3     | <a href="#">505099</a> | 0,25  |
| 4     | <a href="#">285928</a> | 0,36. |

|    |                        |      |
|----|------------------------|------|
| 5  | <a href="#">320751</a> | 0,6  |
| 6  | <a href="#">315120</a> | 2    |
| 7  | <a href="#">26849</a>  | -3   |
| 8  | <a href="#">525702</a> | -2   |
| 9  | <a href="#">510982</a> | 5000 |
| 10 | <a href="#">676853</a> | 42   |
| 11 | <a href="#">509026</a> | 16   |
| 12 | <a href="#">510390</a> | 6    |

№ 13.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                | Баллы    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.                                                                                                                                                   | 2        |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а),<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б). | 1        |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                                  | 0        |
| <b>Максимальный балл</b>                                                                                                                                                                              | <b>2</b> |

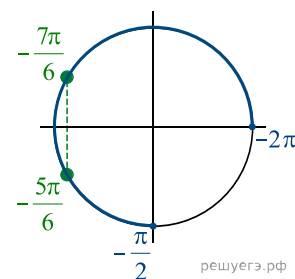
**Решение.** а) Сгруппируем слагаемые и разложим левую часть уравнения на множители:

$$2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos^2 x + 1) + \sqrt{3}(\cos^2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x + \sqrt{3})(\cos^2 x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x + 1)(2\cos x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$ . Получим числа  $-\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ .



Ответ: а)  $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ .

№ 14.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                        | Баллы |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                           | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2     |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а),<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br><br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                      | 0 |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                      | 3 |

**Решение.** а) В квадрате  $ABB_1A_1$  диагонали перпендикулярны, поэтому  $AB_1 \perp A_1B$ . Кроме того,  $AB_1 \perp BC$ , так как  $BC$  перпендикулярна плоскости  $ABB_1$ . Отсюда получаем, что прямая  $AB_1$  перпендикулярна плоскости  $A_1BC$ . А тогда, по признаку перпендикулярности плоскостей, получаем требуемое (ведь плоскость  $AB_1D_1$  содержит прямую, перпендикулярную плоскости  $A_1BC$ ).

б) Пусть точка  $M$  — середина отрезка  $AD_1$ . Примем длины ребер куба за  $a$ . Из прямоугольного треугольника  $ABB_1$  по теореме Пифагора найдём  $AB_1$ :

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = a\sqrt{2}.$$

Аналогично,  $B_1D_1 = CD_1 = AD_1 = AC = B_1C = a\sqrt{2}$ . Опустим перпендикуляры  $B_1H$  и  $CK$  на сторону  $AD_1$  треугольников  $AB_1D_1$  и  $ACD_1$  равносторонние, поэтому перпендикуляры  $B_1H$  и  $CK$  также являются биссектрисами и медианами, поэтому точки  $H, K$  и  $M$  совпадают. Угол  $B_1MC$  — искомый. Из прямоугольного треугольника  $AB_1M$ :

$$B_1M = \sqrt{AB_1^2 - AM^2} = \sqrt{AB_1^2 - \left(\frac{AD_1}{2}\right)^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

По теореме косинусов из треугольника  $B_1MC$ :

$$\cos \angle B_1MC = \frac{B_1M^2 + MC^2 - B_1C^2}{2B_1M \cdot MC} = \frac{\frac{3a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} - 2a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}.$$

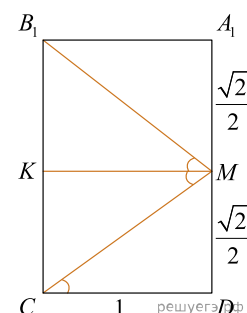
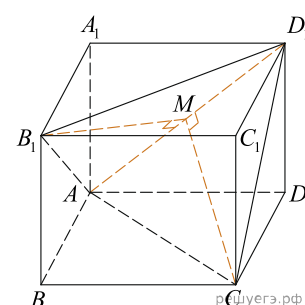
Следовательно, угол между плоскостями равен  $\arccos \frac{1}{3}$ .

Ответ:  $\arccos \frac{1}{3}$ .

#### Примечание.

Укажем другой путь нахождения угла  $B_1MC$ . В прямоугольнике  $CDA_1B_1$  проведём через точку  $M$  — середину боковой стороны  $DA_1$  — отрезок  $MK$ , параллельный стороне  $CD$  (см.рис.). Тогда:

$$\widehat{B_1MC} = 2\widehat{KMC} = 2\widehat{MCD} = 2 \arctg \frac{MD}{DC} = 2 \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



№ 15.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|----------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ       | 2     |

|                                                                                                                                                                                                   |   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                              | 0 |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                 | 2 |

**Решение.** Неравенство определено при  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ,  $2x \neq 1$ ,  $\frac{2}{x^2} \neq 1$ , то есть при положительных  $x$ , отличных от  $1$ ,  $\frac{1}{2}$  и от  $\sqrt{2}$ . На области определения можно использовать формулу  $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ , что позволяет избавиться от знаменателей и записать неравенство в виде

$$\log_x(2x^{-1}) \cdot \log_x(2x^2) \cdot \log_x(2x) \cdot \log_x(2x^{-2}) < 40.$$

Далее применим формулу  $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ : если в этой формуле один из множителей  $b$  или  $c$  — положительное число, применение формулы допустимо на ОДЗ (если  $b$  и  $c$  зависят от переменной, применение формулы может привести к потере корней). Получаем:

$$(\log_x 2 - 1)(\log_x 2 + 2)(\log_x 2 + 1)(\log_x 2 - 2) < 40 \Leftrightarrow (\log_x^2 2 - 1)(\log_x^2 2 - 4) < 40. \quad (\log_x 2 - 1)(\log_x 2 + 2)(\log_x 2 + 1)(\log_x 2 - 2) < 40 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\log_x^2 2 - 1)(\log_x^2 2 - 4) < 40.$$

Пусть  $\log_x^2 2 = t$ , тогда

$$(t - 1)(t - 4) < 40 \Leftrightarrow t^2 - 5t - 36 < 0 \Leftrightarrow -4 < t < 9.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{aligned} -4 < \log_x^2 2 < 9 &\Leftrightarrow \log_x^2 2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < \log_x 2 < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 < \frac{1}{\log_2 x} < 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < -\frac{1}{3}, \\ \log_2 x > \frac{1}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ x > \sqrt[3]{2}. \end{cases} \quad -4 < \log_x^2 2 < 9 \Leftrightarrow \log_x^2 2 - 9 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3 < \log_x 2 < 3 \Leftrightarrow -3 < \frac{1}{\log_2 x} < 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < -\frac{1}{3}, \\ \log_2 x > \frac{1}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ x > \sqrt[3]{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Осталось определить, какие из найденных решений лежат в ОДЗ. Заметим, что  $\frac{1}{2} < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$  и  $\sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$ , тогда

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ x > \sqrt[3]{2}, \\ x \neq \frac{1}{2}, \\ x \neq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ \sqrt[3]{2} < x < \sqrt{2}, \\ x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ:  $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup (\sqrt[3]{2}; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ .

№ 16.

| Критерии оценивания выполнения задания                              | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                    | 2     |
| Верно построена математическая модель                               | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0     |
| Максимальный балл                                                   | 2     |

**Решение.** Пусть в шашлычную отправлено  $x$  племянников, тогда на автомойке будут работать  $60 - x$  племянников. Выручка шашлычной (в тыс. руб.) составит  $15x - 0,1x^2$ , а выручка автомойки составит

$$\begin{aligned} 21(60-x) - 0,2(60-x)^2 &= 1260 - 21x - 0,2(3600 - 120x + x^2) = -0,2x^2 + 3x + 540, \\ 21(60-x) - 0,2(60-x)^2 &= 1260 - 21x - 0,2(3600 - 120x + x^2) = -0,2x^2 + 3x + 540, \\ 21(60-x) - 0,2(60-x)^2 &= 1260 - 21x - 0,2(3600 - 120x + x^2) = \\ &= -0,2x^2 + 3x + 540, \end{aligned}$$

тогда суммарная выручка двух предприятий равна

$$15x - 0,1x^2 + (-0,2x^2 + 3x + 540) = -0,3x^2 + 18x + 540.$$

Квадратичная функция  $f(x) = -0,3x^2 + 18x + 540$  достигает наибольшего значения в точке  $x_b = -\frac{b}{2a} = 30$ . Поэтому чтобы суммарная выручка двух предприятий была наибольшей, необходимо отправить 30 племянников в шашлычную и 30 племянников на автомойку. Выручка составит

$$-0,3 \cdot 30^2 + 18 \cdot 30 + 540 = 810 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: по 30 племянников на каждое предприятие, 810 тыс. руб.

№ 17.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                             | Баллы |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                                                                                                                | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                      | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а),<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                  | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                  | 3     |

**Решение.** а) Точка  $C$  лежит на биссектрисе угла  $LKM$ , а потому равноудалена от прямых  $KM$  и  $KL$ . Кроме того, она равноудалена от прямых  $KL$  и  $LM$ . Значит, она равноудалена от прямых  $KM$  и  $LM$ , то есть  $MC$  — биссектриса угла  $LMN$ . По условию  $\angle CMP = 90^\circ$ , поэтому

$$\angle KMP = 90^\circ - \angle NMC = 90^\circ - \angle LMC = \angle PML.$$

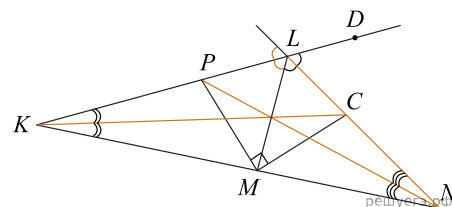
Значит,  $MP$  — биссектриса угла  $LMK$ . Тогда точка  $P$  равноудалена от прямых  $NM$ ,  $ML$  и  $LN$ . Таким образом, углы  $PLM$ ,  $MLC$  и  $CLD$  равны. В сумме эти три угла дают развернутый угол, поэтому  $\angle KLM = 60^\circ$ . Что и требовалось доказать.

б) По теореме косинусов

$$KM^2 = 100 + 25 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 75.$$

Заметим, что  $KM^2 + ML^2 = KL^2$ , тогда  $\angle KML = 90^\circ$  и  $\angle LKM = 30^\circ$ . Следовательно, треугольник  $KLN$  равнобедренный, а отрезок  $LM$  — его высота и биссектриса. По доказанному ранее отрезок  $MC$  — биссектриса треугольника  $LMN$ , поэтому

$$CL : CN = ML : MN = 1 : \sqrt{3}.$$



$$CL = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} \cdot 10.$$

Тогда площадь треугольника  $CML$  равна

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{10}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + 1)}.$$

Ответ: б)  $\frac{25\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + 1)}.$

№ 18.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                   | Баллы |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен правильный ответ                                                                                     | 4     |
| С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано | 3     |
| С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной          | 2     |
| Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки                                 | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                      | 0     |

**Решение.** Построим график функции  $f(x) = \left| \frac{7 - |x|}{|x| - 2} \right|$  преобразованиями графиков функций  $g(x) = \frac{7 - x}{x - 2}$  и  $t(x) = \frac{7 - |x|}{|x| - 2}$ . Заметим, что

$$\frac{7 - x}{x - 2} = \frac{5 + 2 - x}{x - 2} = \frac{5}{x - 2} - 1.$$

Значит, график функции  $g(x)$  — гипербола, асимптотами которой являются прямые  $x = 2$  и  $y = -1$ . Гипербола пересекает координатные оси в точках  $(7; 0)$  и  $(0; -3,5)$ . Она изображена на рисунке справа.

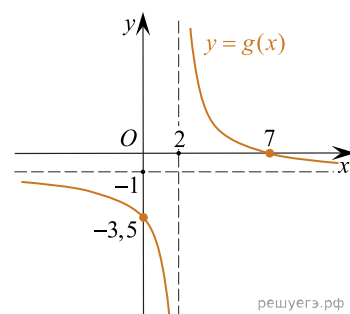
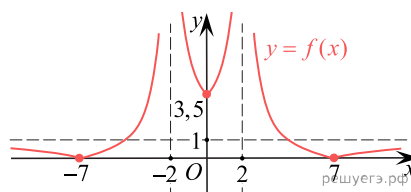
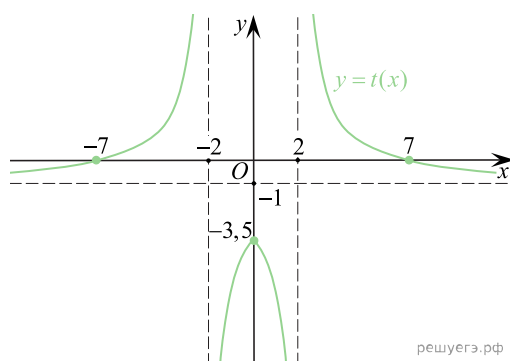


График функции  $t(x)$  симметричен относительно оси  $Oy$  и при  $x \geq 0$  совпадает с графиком функции  $g(x)$ , на рисунке ниже изображён зеленым. График функции  $f(x)$  получается из графика функции  $t(x)$  отражением нижней части графика относительно оси  $Ox$ , на рисунке ниже изображён красным.



Из построенного графика видно, что уравнение  $f(x) = a$  имеет ровно четыре корня при  $0 < a < 1$  или  $a > 3,5$ . Таким образом, наименьшее целое значение параметра  $a$ , при котором уравнение имеет ровно четыре корня, равно 4.

Ответ: 4.

№ 19.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                      | Баллы |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).                                                   | 4     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).         | 3     |
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б)<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте в) | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).                                                        | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                        | 0     |
| Максимальный балл                                                                                           | 4     |

**Решение.** а) Например 555 и 875.

б) Для чисел  $A = B = 99999$  сумма равна  $5 \cdot 9^2 = 405$ . Для любых других чисел одно из произведений будет не больше  $9 \cdot 8 = 72$  и сумма произведений будет не больше

$$72 + 4 \cdot 9^2 = 396 < 400.$$

в) Запишем число от 1 до 260 в виде  $1 + 9n + x$ , где  $x \in [0; 8]$ . Тогда  $n \leq 28$ .

Если  $n \leq 18$ , выберем две цифры  $s, t$  для которых  $s + t = n$ . Тогда числа  $\overline{1stx}$  и  $\overline{1991}$  дадут

$$1 + 9s + 9t + x = 1 + 9n + x.$$

Если  $n \in [19; 27]$ , выберем две цифры  $s, t$  для которых  $s + t = n - 9$ . Тогда числа  $\overline{9st(x+1)}$  и  $\overline{9991}$  дадут

$$81 + 9s + 9t + x + 1 = 1 + 9n + x.$$

Пусть, наконец,  $n = 28$ . Нам осталось записать в нужном виде числа от 253 до 260. Сделаем это:

9992, 9995  $\mapsto$  253;

9994, 9985  $\mapsto$  254;

9993, 9994  $\mapsto$  255;

9998, 9965  $\mapsto$  256;

9992, 9997  $\mapsto$  257;

9993, 9995  $\mapsto$  258;

9992, 9998  $\mapsto$  259;

9995, 9977  $\mapsto$  260.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.