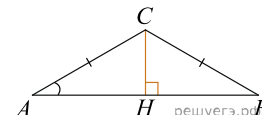


Вариант 58

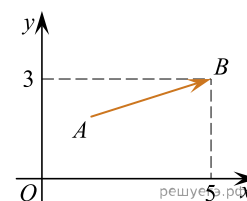
№ 1.

В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 8$, $\cos A = 0,5$. Найдите AC .



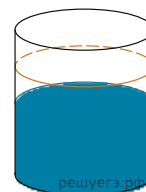
№ 2.

Вектор $\vec{AB}$ с концом в точке $B(5; 3)$ имеет координаты $(3; 1)$. Найдите ординату точки A .



№ 3.

В цилиндрический сосуд налили 2000см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3 .



№ 4.

Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию « A =сумма очков равна 5»?

№ 5.

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

№ 6.

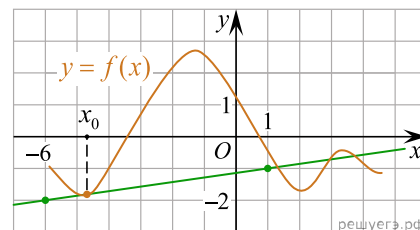
Найдите корень уравнения $3 \cdot 9^{x-1} = \frac{1}{27}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\log_4 8$.

№ 8.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Найдите значение производной функции $g(x) = 9f(x) - \frac{2}{7}x + 7$ в точке x_0 .



№ 9.

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землей, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км)— радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 4 километра? Ответ выразите в километрах.

№ 10.

Два промышленных фильтра, работая одновременно, очищают цистерну воды за 30 минут. Определите, за сколько минут второй фильтр очистит цистерну воды, работая отдельно, если известно, что он сделает это на 25 минут быстрее, чем первый.

№ 11.

На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(4)$.

□

№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6,5x^2 + 14x - 14$ на отрезке $[-4; 3]$.

№ 13.

- Решите уравнение $\sin x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0$.
- Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№ 14.

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 6. Боковое ребро наклонено к основанию под углом 60° . Через меньшую диагональ основания AC проведено сечение, которое пересекает высоту пирамиды в точке, удаленной от основания на расстояние $\sqrt{3}$.

- Докажите, что это сечение перпендикулярно противоположному к AC боковому ребру пирамиды SE .
- Найдите площадь сечения.

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{5^x + \log_5^2 x - 20}{\log_5 x - 5^x} \geq -1$.

№ 16.

31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2592000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4392000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

№ 17.

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

- Докажите, что прямые EH и AC параллельны.
- Найдите отношение $EH : AC$, если угол ABC равен 30° .

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{2xy+a} = x+y+5$ не имеет решений.

№ 19.

а) В классе была дана контрольная. Известно, что по крайней мере две трети задач этой контрольной оказались трудными: каждую такую задачу не решили по крайней мере две трети школьников. Известно также, что по крайней мере две трети школьников класса написали контрольную хорошо: каждый такой школьник решил по крайней мере две трети задач контрольной. Могло ли такое быть?

- Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в ее условии две трети на три четверти?
- Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в ее условии две трети на семь девятых?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27287	8
2	27728	2
3	27045	1500
4	320184	4
5	320173	0,02
6	672744	-1
7	26847	1,5
8	525699	1
9	263802	0,00125
10	509420	50
11	639480	0,0625
12	126637	-3,5

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$. Подставляя, получаем:

A unit circle diagram with angles in radians and their sine values. The angles are marked at the intersections of the circle with dashed lines from the center to the circumference. The sine values are written next to the angles.

Angle (radians)	Sine Value
0	0
$\frac{5\pi}{2}$	-1
$11\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$35\pi/12$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$37\pi/12$	$-\frac{1}{2}$
$13\pi/4$	$\frac{1}{2}$
$15\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$47\pi/12$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2π	0

лучим числа: $-\frac{47\pi}{12}, -\frac{15\pi}{4}, -\frac{13\pi}{4}, -\frac{37\pi}{12}, -\frac{35\pi}{12}, -\frac{11\pi}{4}.$

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \pm \frac{\pi}{12} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{47\pi}{12}, -\frac{15\pi}{4}, -\frac{13\pi}{4}, -\frac{37\pi}{12}, -\frac{35\pi}{12}, -\frac{11\pi}{4}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть искомое сечение пересекает высоту SO в точке P , а ребро SE — в точке M . Пусть точка M — середина AC . Рассмотрим равнобедренный треугольник BSE . Поскольку угол $SBE = 60^\circ$, то треугольник BSE равносторонний. Имеем:

$$BM = AB \cdot \sin 30^\circ = 3,$$

$$BE = 2BO = 2AB = 12,$$

$$SO = BO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 6\sqrt{3},$$

откуда $\frac{SP}{PO} = \frac{5}{1}$. По теореме Менелая для треугольника OSE и секущей MPH получим:

$$\frac{SH}{HE} \cdot \frac{EM}{MO} \cdot \frac{OP}{PS} = 1 \Leftrightarrow \frac{SH}{HE} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{SH}{HE} = \frac{5}{3}.$$

Выразим HE :

$$HE = \frac{3}{8} \cdot 12 = \frac{9}{2} = \frac{ME}{2},$$

откуда $HE = ME \cdot \cos 60^\circ$, значит, прямая MH перпендикулярна прямой HE . Тогда плоскость ACH перпендикулярна прямой SE , поскольку прямая AC тоже перпендикулярна прямой SE по теореме о трех перпендикулярах.

б) Пусть сечение проходит через точку R на прямой SF и через точку T на прямой SD . Заметим, что точка P лежит в плоскостях ACH и CSF , значит, точка P принадлежит прямой CR . Аналогично точка P принадлежит прямой AT . По теореме Менелая для треугольника SFO и секущей CR имеем:

$$\frac{OP}{PS} \cdot \frac{SR}{RF} \cdot \frac{FC}{CO} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot \frac{SR}{RF} \cdot \frac{2}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{SR}{RF} = \frac{5}{2}.$$

Аналогично $\frac{ST}{TD} = \frac{5}{2}$, откуда

$$KE = \frac{5}{7}FD = \frac{5}{7} \cdot FE \cdot \sqrt{3} = \frac{30\sqrt{3}}{7}.$$

Пусть прямая RT пересекает прямую MH в точке K . Имеем:

$$\frac{MP}{PK} = \frac{MC}{KR} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{30\sqrt{3}}{7}} = \frac{7}{5},$$

$$MH = ME \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2},$$

$$MP = \sqrt{MO^2 + OP^2} = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3},$$

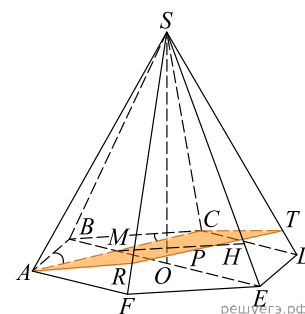
откуда находим:

$$PK = \frac{5}{12} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{6},$$

$$HK = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{17}{12} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Площадь сечения $ACTHR$ равна

$$S_{ACTHR} = S_{ACTR} + S_{HTR} = \frac{1}{2} \cdot MK \cdot (AC + RT) + \frac{1}{2} \cdot HK \cdot RT =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{17\sqrt{3}}{6} \cdot (6\sqrt{3} + \frac{30\sqrt{3}}{7}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{30\sqrt{3}}{7} = \frac{51}{2} + \frac{255}{14} + \frac{150}{14} = \frac{381}{7}. \quad S_{ACTHR} = S_{ACTR} + S_{HTR} = \frac{1}{2} \cdot MK \cdot (AC + RT) + \frac{1}{2} \cdot HK \cdot RT = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{17\sqrt{3}}{6} \cdot (6\sqrt{3} + \frac{30\sqrt{3}}{7}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{30\sqrt{3}}{7} = \\
&= \frac{51}{2} + \frac{255}{14} + \frac{150}{14} = \frac{381}{7}. \quad S_{ACTHR} = S_{ACTR} + S_{HTR} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot MK \cdot (AC + RT) + \frac{1}{2} \cdot HK \cdot RT = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{17\sqrt{3}}{6} \cdot (6\sqrt{3} + \frac{30\sqrt{3}}{7}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{30\sqrt{3}}{7} = \\
&= \frac{51}{2} + \frac{255}{14} + \frac{150}{14} = \frac{381}{7}.
\end{aligned}$$

Ответ: б) $\frac{381}{7}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Заметим, что неравенство определено при $x > 0$. При таких значениях x справедлива оценка $\log_5 x < x < 5^x$, а потому знаменатель принимает лишь отрицательные значения. Умножим обе части неравенства на знаменатель, изменив знак неравенства на противоположный:

$$\begin{aligned}
\frac{5^x + \log_5^2 x - 20}{\log_5 x - 5^x} \geq -1 &\Leftrightarrow 5^x + \log_5^2 x - 20 \leq -\log_5 x + 5^x \Leftrightarrow \log_5^2 x + \log_5 x - 20 \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\log_5 x - 4)(\log_5 x + 5) \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq \log_5 x \leq 4 \Leftrightarrow 5^{-5} \leq x \leq 5^4 \Leftrightarrow \frac{1}{3125} \leq x \leq 625.
\end{aligned}$$

Ответ: $\left[\frac{1}{3125}; 625 \right]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть S — сумма кредита. Обозначим ежегодные платежи A_1 и A_2 соответственно. Сумма долга каждый год увеличивается на $a\%$, то есть сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга станет равной $S_1 = Sb - A_1$, после второй выплаты: $S_2 = (Sb - A_1)b - A_1$, после третьей выплаты: $S_3 = ((Sb - A_1)b - A_1)b - A_1$, после четвёртой выплаты: $S_4 = (((Sb - A_1)b - A_1)b - A_1)b - A_1$. Причём долг будет погашен полностью, получаем, то есть $((Sb - A_1)b - A_1)b - A_1 = 0$. Аналогично получаем уравнение для случая, когда выплаты совершаются платежами размером A_2 : $S'_2 = (Sb - A_2)b - A_2$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} Sb^4 - A_1b^3 - A_1b^2 - A_1b - A_1 = 0, \\ Sb^2 - A_2b - A_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Sb^2 \cdot b^2 - A_1b^3 - A_1b^2 - A_1b - A_1 = 0, \\ Sb^2 = A_2b + A_2. \end{cases} \begin{cases} Sb^4 - A_1b^3 - A_1b^2 - A_1b - A_1 = 0, \\ Sb^2 - A_2b - A_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Sb^2 \cdot b^2 - A_1b^3 - A_1b^2 - A_1b - A_1 = 0, \\ Sb^2 = A_2b + A_2. \end{cases}$$

Подставим выражение для Sb^2 в первое уравнение: $(A_2 + A_2b) \cdot b^2 - A_1b^3 - A_1b^2 - A_1b - A_1 = 0$. Преобразуем это уравнение:

$$(A_2 - A_1)b^3 + (A_2 - A_1)b^2 - A_1b - A_1 = 0 \Leftrightarrow b^2(A_2 - A_1)(b + 1) - A_1(b + 1) = 0 \Leftrightarrow (A_2 - A_1)b^3 + (A_2 - A_1)b^2 - A_1b - A_1 = 0 \Leftrightarrow b^2(A_2 - A_1)(b + 1) - A_1(b + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b + 1)((A_2 - A_1)b^2 - A_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1, \\ b^2 = \frac{A_1}{A_2 - A_1}. \end{cases}$$

Подставляя числовые значения получаем:

$$\begin{cases} b = -1, \\ b = -1, 2, \\ b = 1, 2. \end{cases}$$

Отрицательные корни не подходят по условию задачи, значит, $b = 1, 2$, откуда $a = 20$, то есть Пётр взял деньги в банке под 20%.

Ответ: 20%.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

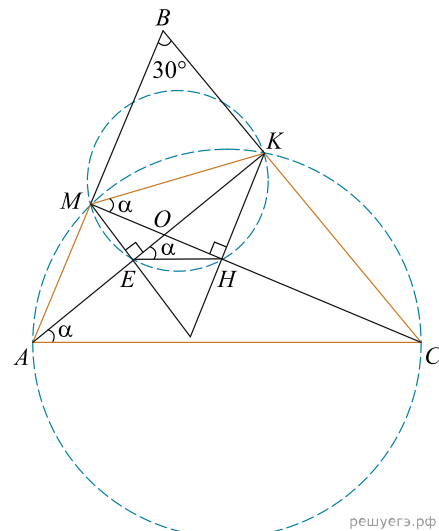
Решение. Заметим, что отрезок AC виден из точек K и M под углом 90° , поэтому точки M, K, C и A лежат на одной окружности, диаметром которой является отрезок AC . Аналогично точки M, K, H, E лежат на окружности, диаметром которой является MK .

Пусть $\angle KAC = \alpha$. Тогда $\angle KAC = \angle KMC = \alpha$, поскольку они опираются на одну дугу KC в окружности, описанной вокруг четырёхугольника $AMKC$. Кроме того, $\angle KMC = \angle KEH = \alpha$, поскольку они опираются на одну дугу KH в окружности, описанной вокруг четырёхугольника $MKHE$. $\angle OEH = \angle OAC$, поэтому прямые EH и AC параллельны, поскольку это соответственные углы при пересечении EH и AC секущей OA . Это и требовалось доказать.

б) Используем подобие треугольников. Треугольники MBK и CBA подобны с коэффициентом подобия $k = \cos \beta$. Треугольники OEH и OMK также подобны с тем же коэффициентом подобия. Кроме того, подобны треугольники OMK и AOC , поэтому подобны треугольники OEH и OAC , причем коэффициент подобия равен $k = \cos^2 \beta$. Тогда

$$EH = \cos^2 \beta AC = AC \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4} AC.$$

Тем самым искомое отношение длин сторон равно $3:4$.



Приведем другое решение пункта б).

Пусть $KC = 2x$, тогда из треугольника KHC находим $HC = x$, из $\triangle OKC$: $\angle KOC = 30^\circ$, тогда $OC = 4x$, откуда

$$OH = OC - HC = 4x - x = 3x.$$

В силу подобия $\triangle OEH$ и $\triangle OAC$ получаем:

$$\frac{EH}{AC} = \frac{OH}{OC} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}.$$

Приведем решение Александра Шевкина (Москва).

а) Построим вспомогательную окружность с диаметром MK . Она пройдет через точки E и H , так как $\angle MEK = \angle MHK = 90^\circ$.

Построим вспомогательную окружность с диаметром AC . Она пройдет через точки M и K , т. к. $\angle AMC = \angle AKC = 90^\circ$.

По свойству вписанных углов $\angle KAC = \angle KMC$, а $\angle KMC = \angle KEH$, значит, $\angle KAC = \angle KEH$. А это соответственные углы при прямых EH и AC и секущей AE . Из равенства этих углов следует параллельность прямых EH и AC , что и требовалось доказать.

б) Прямая MK , проходящая через основания высот треугольника ABC , отсекает треугольник KMB , подобный треугольнику ABC . Коэффициент подобия равен $\frac{MK}{AC} = \cos \angle ABC = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Рассмотрим треугольники $МОК$ и $ЕОН$. Они подобны по двум углам: $\angle КМО = \angle КЕН$ (свойство вписанных углов), $\angle МОК = \angle ЕОН$ (вертикальные). Коэффициент подобия равен $\frac{EH}{MK} = \frac{OH}{OK} = \cos \angle KOH = \cos \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Умножив полученные равенства

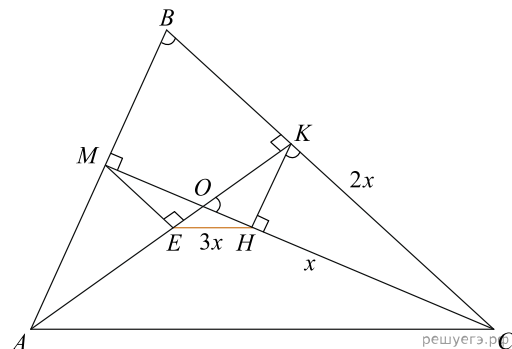
$$\frac{EH}{MK} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \frac{MK}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

найдем отношение $\frac{EH}{AC}$, оно равно $\frac{3}{4}$.

Ответ: $3:4$.

Приведем решение Софии Николенко (Москва).

а) Пусть высоты AK и CM пересекаются в точке O . Рассмотрим треугольник AMO . В нем ME является высотой, проведенной к гипотенузе, поэтому треугольники AME и OME подобны, а углы MAE и OME равны. Пусть эти углы равны α , тогда $\angle MOE = 90^\circ - \alpha$. Углы $\angle KOH$ и $\angle MOE$ равны $90^\circ - \alpha$, тогда угол $\angle OKH$ равен α . Углы $\angle EMO$ и $\angle OKH$ равны, поскольку опираются на одну дугу EH , таким образом, четырехугольник $EMKH$ можно вписать в окружность. Четырехугольник $AMKC$ также можно вписать в окружность с диаметром AC . Углы $\angle KAC$ и $\angle KMC$ равны, углы $\angle KEH$ и $\angle KMC$ тоже равны, поэтому угол $\angle KEH$ равен углу $\angle KAC$. Углы $\angle KEH$ и $\angle KAC$ являются соответственными при пересечении прямых EH и AC секу-



щей AO . Таким образом, прямые EH и AC параллельны.

б) Рассмотрим треугольник AMO , пусть $ME = x$, тогда

$$2ME = MO \Leftrightarrow MO = 2x.$$

Отсюда $OE = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$.

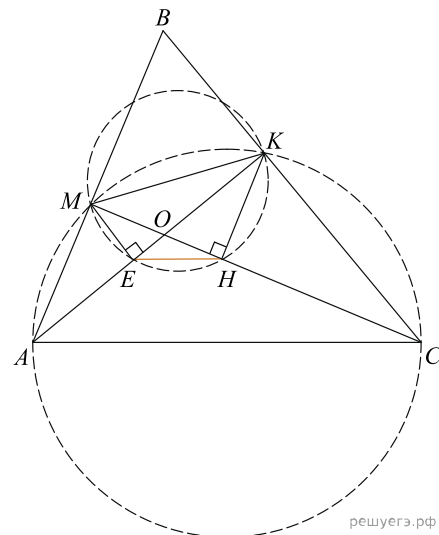
Рассмотрим треугольник AME , в нем: $AM = \frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$,

$$AE = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}x}{3}\right)^2 - x^2} = \frac{\sqrt{3}x}{3},$$

$$AO = x\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}x}{3} = \frac{4\sqrt{3}x}{3}.$$

Треугольники AOC и EOH подобны по двум углам. Значит, $\frac{EH}{AC} = \frac{EO}{AO}$, откуда

$$\frac{EO}{AO} = \frac{x\sqrt{3}}{\frac{4\sqrt{3}x}{3}} = \frac{3}{4}.$$



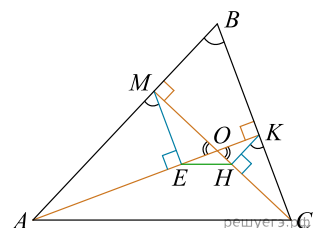
Приведем решение пункта а) Дениса Чернышева (Тюмень).

а) Докажем параллельность, используя теорему, обратную теореме о пропорциональных отрезках для сторон OA и OC в треугольнике AOC . Для этой цели установим подобие иных треугольников, имеющих с AOC общие стороны (части сторон).

По признаку параллельности, две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны друг другу. Значит, прямая MB параллельна прямой KN . При этих параллельных равны соответственные углы: $\angle CKH = \angle CBM = \angle B$. Аналогично прямая KB параллельна прямой EM , а потому $\angle EMA = \angle KBA = \angle B$. Следовательно, прямоугольные треугольники CKH и EMA подобны по двум углам, а значит, $\frac{CH}{AE} = \frac{HK}{EM}$.

Прямоугольные треугольники MOE и KOH также подобны, поскольку их острые углы MOE и KOH равны как вертикальные. В силу подобия стороны этих треугольников пропорциональны: $\frac{OH}{OE} = \frac{HK}{EM}$.

Из двух полученных равенств следует третье: $\frac{CH}{AE} = \frac{OH}{OE}$. Итак, в треугольнике AOC прямые AC и EH делят общий угол AOC , начиная от вершины, на пропорциональные отрезки. Следовательно, по теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках, эти прямые параллельны, что и требовалось доказать.

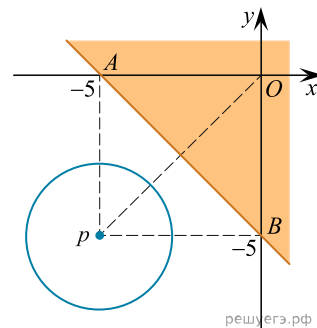


№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены искомые значения a , возможно неверные, из-за одной допущенной вычислительной ошибки (описки) или не рассмотрен случай $a \leq -25$	3
С помощью верного рассуждения получены искомые значения a , возможно неверные, из-за одной допущенной вычислительной ошибки (описки) и при этом не рассмотрен случай $a \leq -25$	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения графиков неравенства и уравнения (приведен правильный рисунок)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Возведем в квадрат:

$$\begin{aligned}\sqrt{2xy+a} = x+y+5 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5 \geq 0, \\ 2xy+a = x^2+y^2+25+2xy+10x+10y \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5 \geq 0, \\ (x+5)^2+(y+5)^2 = a+25. \end{cases} \sqrt{2xy+a} = x+y+5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5 \geq 0, \\ 2xy+a = x^2+y^2+25+2xy+10x+10y \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5 \geq 0, \\ (x+5)^2+(y+5)^2 = a+25. \end{cases}\end{aligned}$$



Неравенство $x+y+5 \geq 0$ задает на координатной плоскости «верхнюю» полуплоскость с границей $x+y+5=0$, а уравнение $(x+5)^2+(y+5)^2 = a+25$ при $a > -25$ — окружность с центром $P(-5; -5)$ и радиусом $R = \sqrt{a+25}$ (см. рис.).

Окружность и полуплоскость не имеют общих точек тогда и только тогда, когда радиус окружности меньше половины диагонали PO квадрата $APBO$, то есть, $\sqrt{a+25} < \frac{5\sqrt{2}}{2}$, откуда $-25 < a < -12,5$.

При $a < -25$ уравнение, а, следовательно, и вся система решений не имеют, а при $a = -25$ решением уравнения является пара $(-5; -5)$, которая не удовлетворяет неравенству $x+y+5 \geq 0$.

Ответ: $a < -12,5$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть ровно треть задач легкие, а остальные — трудные. Пусть треть школьников решит все легкие задачи и ровно половину трудных, а другая треть школьников решит все легкие задачи и другую половину трудных. Последняя треть школьников пусть не решит ничего. Тогда все условия выполнены.

Другой пример. Пусть на контрольной было три задачи, а в классе три школьника, причем первый решил первую и вторую задачи, второй решил вторую и третью задачи, а третий школьник ничего не решил. Все условия выполнены: первая и третья задачи — трудные, двое школьников справились с двумя из трех задач.

б) Пусть всего задач — $З$, решенных задач — $Р$, а школьников $Ш$ человек. Если три четверти школьников решили не меньше трех четвертей задач, то общее число решенных задач удовлетворяет неравенству

$$P \geq \frac{3}{4}З \cdot \frac{3}{4}Ш = \frac{9}{16}З \cdot Ш.$$

С другой стороны, каждую трудную задачу решило не более четверти учеников, и таких задач было не меньше трех четвертей от общего числа задач, поэтому число решенных трудных задач не превосходит $\frac{3}{16}З \cdot Ш$. Легких задач при этом было не более одной четверти, и даже если каждую легкую задачу решили все ученики, весь класс решил не более

$$P \leq \frac{3}{16} \cdot \mathcal{L} + \frac{1}{4} \cdot \mathcal{L} = \frac{7}{16} \cdot \mathcal{L}$$

задач. Между полученными неравенствами противоречие.

Другое решение пункта б). Пусть число трудных задач T , легких задач — $\mathcal{L}$, а другие обозначения такие же как ранее. Тогда

$$0,75(T + \mathcal{L}) \cdot 0,75\mathcal{L} \leq P,$$

$$P \leq \mathcal{L} \cdot \mathcal{L} + 0,25\mathcal{L} \cdot 0,75(T + \mathcal{L}),$$

поскольку

$$P \leq \mathcal{L}\mathcal{L} + 1/4 \mathcal{L}T,$$

причем

$$T \geq 3/4(T + \mathcal{L}).$$

Из полученных оценок следует неравенство:

$$0,75(T + \mathcal{L}) \cdot 0,75\mathcal{L} \leq \mathcal{L} \cdot \mathcal{L} + 0,25\mathcal{L} \cdot 0,75(T + \mathcal{L}).$$

Поделим все на $0,25\mathcal{L}$ и преобразуем неравенство:

$$2,25T + 2,25\mathcal{L} \leq 4\mathcal{L} + 0,75T + 0,75\mathcal{L},$$

но тогда $3T \leq 5\mathcal{L}$, а по условию должно выполняться неравенство $T \geq 3\mathcal{L}$. Противоречие.

в) Аналогично получаем неравенства:

$$\frac{7}{9}(T + \mathcal{L}) \cdot \frac{7}{9}\mathcal{L} \leq P,$$

$$P \leq \mathcal{L} \cdot \frac{7}{9}\mathcal{L} + \frac{2}{9}\mathcal{L} \cdot \frac{7}{9}(T + \mathcal{L}).$$

После преобразований получаем, что, с одной стороны, $T \leq 0,8\mathcal{L}$, а с другой, по условию, $T \geq 3,5\mathcal{L}$. Противоречие.

Ответ: а) да; б) да, изменится; в) да, изменится.

Приведем решение задачи в общем виде.

Пусть: M — количество писавших работу школьников, N — количество задач в работе, a — минимальная доля трудных задач, равная по условию минимальной доле школьников, успешно написавших контрольную работу, то есть решивших не менее, чем aN задач. Пусть также P — общее количество решенных задач. Тогда

$$P \geq aN \cdot aM = a^2 NM.$$

С другой стороны, aN задач (трудных) решили не более чем $(1 - a)M$ школьников, и если даже остальные задачи решат все школьники, то

$$P \leq aN \cdot (1 - a)M + (1 - a)N \cdot M = (1 - a^2)NM.$$

Чтобы двойное неравенство $a^2 NM \leq P \leq (1 - a^2)NM$ выполнялось, должно быть $a^2 \leq 1 - a^2$, то есть $a^2 \leq \frac{1}{2}$.

Для пункта а) это условие выполняется: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$, следовательно, такая ситуация возможна. Для пунктов б) и в) это условие не выполняется, и такая ситуация невозможна.