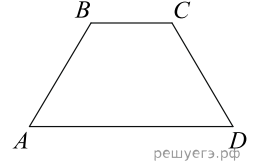


Вариант 62

№ 1.

Основания равнобедренной трапеции равны 15 и 9, один из углов равен 45° . Найдите высоту трапеции.

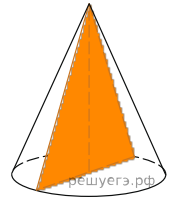


№ 2.

Длина вектора $\vec{a}$ равна $2\sqrt{2}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45° , а скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно 12. Найдите длину вектора $\vec{b}$.

№ 3.

Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей — 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



№ 4.

В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 10 черных, 2 желтых и 8 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.

№ 5.

Игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось ровно два броска? Ответ округлите до тысячных.

№ 6.

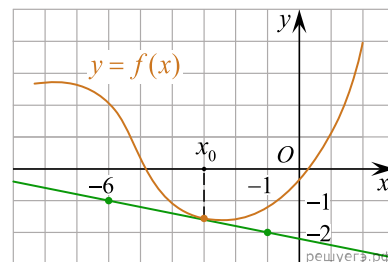
Решите уравнение $\log_5(x^2 + 2x) = \log_5(x^2 + 10)$.

№ 7.

Найдите значение выражения $(9ax - (-6xy)) : (3yx)$.

№ 8.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0 = -3$. Найдите значение производной функции $g(x) = x^3 + f(x)$ в точке x_0 .



№ 9.

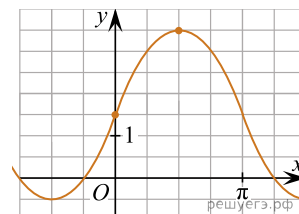
При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 1,25 \cdot 10^8 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$, где p — давление газа (в Па), V — объём газа (в м^3), $k = \frac{4}{3}$. Найдите, какой объём V (в м^3) будет занимать газ при давлении p , равном $2 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

№ 10.

Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6,5x^2 + 14x - 14$ на отрезке $[-4; 3]$.

№ 13.

- Решите уравнение $(6 \sin^2 x + 5 \sin x - 4) \cdot \sqrt{-7 \cos x} = 0$.
- Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$.

№ 14.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Докажите, что прямые AS и BD перпендикулярны.
- Найдите расстояние от точки C до прямой SA .

№ 15.

Решите неравенство $\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}}$.

№ 16.

15 января планируется взять кредит в банке на сумму 3,6 миллионов рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько тыс. рублей увеличится сумма всех выплат, если взять кредит с такими же условиями на 72 месяца?

№ 17.

Окружность вписана в треугольник ABC , P — точка касания окружности со стороной AB , точка M — середина AB .

- а) Докажите, что $MP = \frac{|AC - CB|}{2}$.
- б) Найдите углы треугольника, если $MC = MA$, $AC > BC$, $MP = \frac{r}{2}$.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$(4|x| - a - 3)(x^2 - 2x - 2 - a) \leq 0$$

имеет хотя бы одно решение из промежутка $[-4; 4]$.

№ 19.

Каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9 по одному записывают на 8 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) Может ли в результате получиться 1?
- в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27837	3
2	649918	6
3	324456	48
4	1011	0,4
5	508797	0,417
6	77380	5

7	512352	5
8	525700	26,8
9	526010	125
10	99568	27
11	509287	2
12	126637	-3,5

№ 13.

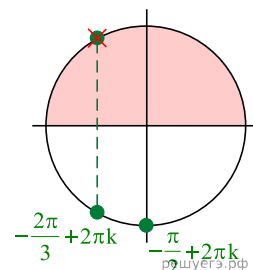
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение.

а) Решим уравнение:

$$(2\cos x + 1)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin x \geq 0, \\ 2\cos x + 1 = 0, \\ \sqrt{-\sin x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0, \\ 2\cos x = -1, \\ -\sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

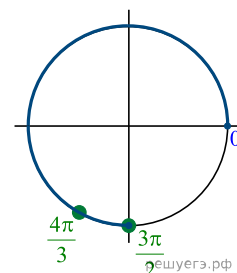
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sin x \geq 0, \\ 2\cos x + 1 = 0, \\ \sqrt{-\sin x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0, \\ 2\cos x = -1, \\ -\sin x = 1 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $[0; \frac{3\pi}{2}]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$.



№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

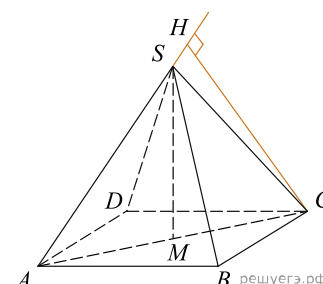
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Проекция прямой AS на плоскость основания пирамиды — прямая AC .
 $AC \perp BD$ как диагонали квадрата. Поэтому по теореме о трех перпендикулярах $AS \perp BD$.

б) Рассмотрим треугольник ASC и его высоты CH и SM . Составим равенство

$$CH \cdot AS = SM \cdot AC, \quad AC = \sqrt{2}; \quad AM = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{поэтому } SM = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Тогда } CH = \frac{SM \cdot AC}{AS} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Имеем:

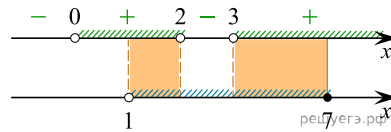
$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3-6x^2+14x-7}, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3-6x^2+14x-7}, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3-6x^2+14x-7} > \sqrt{(7-x)(x-1)}, \\ x-1 \geq 0, \\ 7-x \geq 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-6x^2+14x-7 > (x-1)(7-x), \\ 1 < x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3-6x^2+14x-7} > \sqrt{(7-x)(x-1)}, \\ x-1 \geq 0, \\ 7-x \geq 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 14x - 7 > (x-1)(7-x), \\ 1 < x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0, \\ 1 < x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3) > 0, \\ 1 < x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ 3 < x \leq 7. \end{cases}$$



Ответ: $(1; 2) \cup (3; 7]$.

Примечание.

Напомним, что $\sqrt{x} > \sqrt{y} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ x > y. \end{cases}$ При этом условие $x \geq 0$ избыточно, поскольку величина, большая неотрицательной, заведомо положительна. Существенным моментом решения является хорошее понимание этого обстоятельства. Именно поэтому, решая неравенство $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7} > \sqrt{(7-x)(x-1)}$, нет необходимости дополнительно решать неравенство $x^3 - 6x^2 + 14x - 7 \geq 0$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. В первом случае долг ежемесячно должен уменьшаться на $3600 : 36 = 100$ тыс. руб., а во втором случае— на $3600 : 72 = 50$ тыс. руб. Суммы начисленных процентов будут представлять собой арифметическую прогрессию. Найдём сумму выплат в первом случае:

$$B_{36} = 3600 + \frac{3600 \cdot 0,01 + 100 \cdot 0,01}{2} \cdot 36 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Найдём сумму выплат во втором случае:

$$B_{72} = 3600 + \frac{3600 \cdot 0,01 + 50 \cdot 0,01}{2} \cdot 72 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Найдём разность сумм:

$$\begin{aligned} B_{72} - B_{36} &= \frac{3600 \cdot 0,01 + 50 \cdot 0,01}{2} \cdot 72 - \frac{3600 \cdot 0,01 + 100 \cdot 0,01}{2} \cdot 36 = \\ &= 0,36 \cdot \left(3650 - \frac{3700}{2} \right) = 0,36 \cdot 1800 = 648 \text{ тыс. руб.} \end{aligned}$$

Ответ: 648.

№ 17.

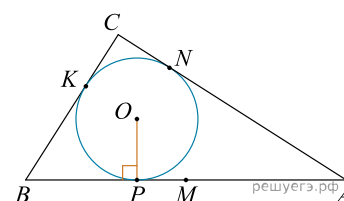
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Без ограничения общности можно считать, что $AC \geq BC$. Пусть N и K — точки касания окружности со сторонами AC и BC . Тогда $CN = CK$, $BK = BP$, $AN = AP$. Заметим, что

$$AC - BC = AN - BK = AP - BP = AM + MP - (BM - MP) = 2MP,$$

откуда $MP = \frac{AC - BC}{2}$. В случае $AC < BC$ решение аналогично. Что и требовалось доказать.



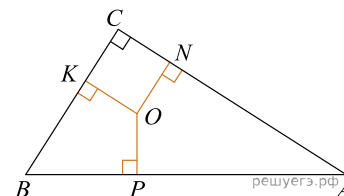
б) Если $AM = MC$, то по признаку прямоугольного треугольника угол C равен 90° . Пусть O — центр окружности. Тогда $CNOK$ — квадрат, поскольку все его углы прямые и соседние стороны равны. Пусть $CK = r$, $BK = x$. Тогда $BM = AM = x + \frac{r}{2}$. Отсюда

$$AP = AN = x + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = x + r.$$

Запишем теорему Пифагора для треугольника ABC :

$$\begin{aligned} (x+r)^2 + (x+2r)^2 &= (2x+r)^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2xr + 4r^2 \Leftrightarrow (x-2r)(x+r) = 0 \Leftrightarrow x = 2r. \\ (x+r)^2 + (x+2r)^2 &= (2x+r)^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2xr + 4r^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-2r)(x+r) = 0 \Leftrightarrow x = 2r. \end{aligned}$$

Тогда $BC : AC : AB = 3 : 4 : 5$, откуда $\angle A = \arccos \frac{4}{5}$, $\angle B = \arccos \frac{3}{5}$, $\angle C = 90^\circ$.



Ответ: б) $\angle A = \arccos \frac{4}{5}$, $\angle B = \arccos \frac{3}{5}$, $\angle C = 90^\circ$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2

В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Неравенство верно, если один из множителей обращается в нуль, либо если множители имеют разные знаки, то есть если при $-4 \leq x \leq 4$: или $a = 4|x| - 3$, или $a = x^2 - 2x - 2$, или

$$\begin{cases} 4|x| - a - 3 > 0, \\ x^2 - 2x - 2 - a < 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4|x| - a - 3 < 0, \\ x^2 - 2x - 2 - a > 0. \end{cases}$$

Выделим оранжевым (см. рис.) решение системы

$$\begin{cases} a < 4|x| - 3, \\ a > x^2 - 2x - 2, \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

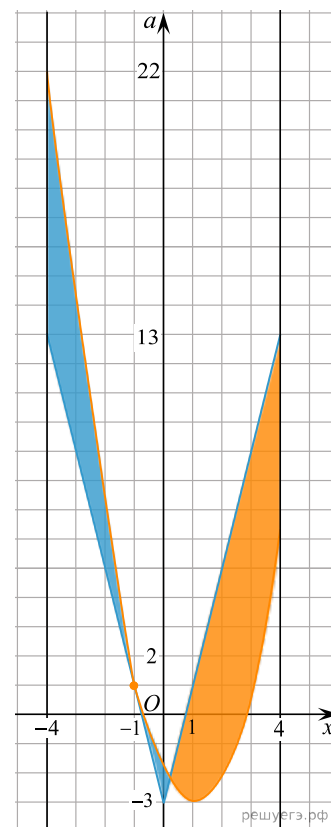
на отрезке $[-4; 4]$. Линии $a = 4x - 3$ и $a = x^2 - 2x - 2$ также соответствуют решениям. Найдем наибольшее из значений параметра при $x = 4$, получим: $a = 16 - 3 = 13$. Таким образом, в рассматриваемом случае решения есть при каждом значении $a \in [-3; 13]$.

Выделим синим синим цветом решения системы

$$\begin{cases} a > 4|x| - 3, \\ a < x^2 - 2x - 2, \\ -4 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Линии $a = -4x - 3$ и $a = x^2 - 2x - 2$ также соответствуют решениям. Найдем наибольшее из значений параметра при $x = -4$, получим: $a = 16 + 8 - 2 = 22$. Таким образом, в рассматриваемом случае решения есть при каждом значении $a \in [-3; 22]$.

Итак, уравнение имеет хотя бы одно решение при всех значениях параметра из отрезка $[-3; 22]$.



Ответ: $[-3; 22]$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно выполнены все пункты: а), б), в) (оценка), в) (пример) 4	4
Верно выполнены три пункта из четырех: а), б), в) (оценка), в) (пример)	3
Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), в) (оценка), в) (пример)	2
Верно выполнен один из пунктов: а), б), в) (оценка), в) (пример)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна

0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.

б) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1.

в) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4.

Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: $(1; -2)$; $(-2; 1)$; $(-3; 4)$; $(4; -3)$; $(-5; 7)$; $(7; -5)$; $(-8; 9)$; $(9; -8)$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.
