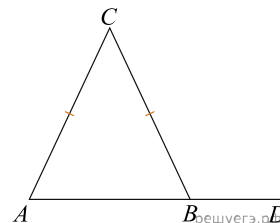


Вариант 65

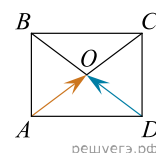
№ 1.

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB внешний угол при вершине B равен 124° . Найдите величину угла A треугольника ABC . Ответ дайте в градусах.



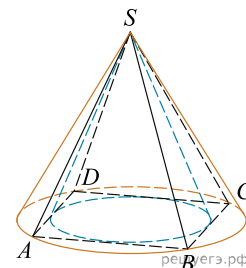
№ 2.

Две стороны изображенного на рисунке прямоугольника $ABCD$ равны 8. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите длину суммы векторов $\vec{AO}$ и $\vec{DO}$.



№ 3.

Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?



№ 4.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.

№ 5.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 2 очка. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

№ 6.

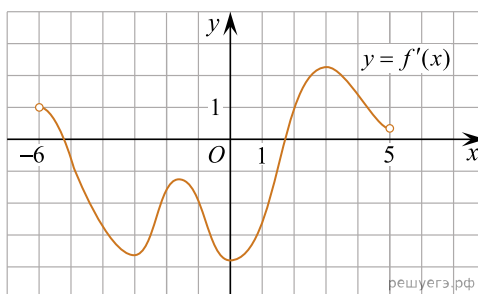
Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x+3} = 5$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{1,23 \cdot 45,7}{12,3 \cdot 0,457}$.

№ 8.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-6; 5]$. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



№ 9.

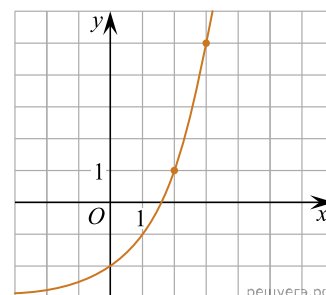
Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 8$ кг и радиуса $R = 10$ см, и двух боковых с массами $M = 1$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, дается формулой $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $625 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.

№ 10.

Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 29$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 6x + 12)$ на отрезке $[-19; -1]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $6 \sin^2 x + 15 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 12 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

№ 14.

Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $BC = 2AB$. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Отрезок SO является высотой пирамиды $SABCD$. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что $BP : PQ = 1 : 3$.
- Найдите двугранный угол пирамиды при ребре SB , если $SB = BC$.

№ 15.

Решите неравенство $2\log_{(x^2-8x+17)^2}(3x^2+5) \leq \log_{x^2-8x+17}(2x^2+7x+5)$.

№ 16.

31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7007000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

№ 17.

Биссектриса AM острого угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ делит боковую сторону CD ($M \in CD$) пополам. Отрезок DN перпендикулярен отрезку AM и делит сторону AB в отношении $AN : NB = 5 : 1$.

- Докажите, что прямые BM и DN параллельны.
- Найдите длину отрезка MN , если площадь трапеции $ABCD$ равна $12\sqrt{2}$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = 2x + a, \\ |y| = x^2 - 2x. \end{cases}$$

имеет два решения.

№ 19.

Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

- пять;
- четыре;
- три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	676342	56

2	27711	6
3	27124	2
4	283467	0,375
5	508890	0,1
6	504427	-0,4
7	77392	10
8	551737	8
9	27966	5
10	26597	10
11	509095	5
12	502312	-1

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) На ОДЗ справедлива равносильность

$$\log_x y = \log_z y \Leftrightarrow_{\text{ОДЗ}} \begin{cases} y = 1, \\ x = z. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$\begin{cases} x - 2 = 1, \\ 8x - 12 - x^2 = 18 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x^2 - 11x + 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 5, \\ x = 6. \end{cases}$$

ОДЗ принадлежат корни 3 и 5.

б) В силу неравенств:

$$\sqrt{\log_{0,2} 0,3} < \sqrt{\log_{0,2} 0,2} = 1,$$

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{30} = \log_2 30 > \log_2 8 = 3,$$

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{30} = \log_2 30 < \log_2 32 = 5$$

справедлива оценка

$$\sqrt{\log_{0,2} 0,3} < 1 < 3 < \log_{\sqrt{2}} \sqrt{30} < 5.$$

Следовательно, отрезку $[\sqrt{\log_{0,2} 0,3}; \log_{\sqrt{2}} \sqrt{30}]$ принадлежит корень $x = 3$.

Ответ: а) {3;5}; б) 3.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Вычислим $\cos \angle SBA = \frac{AB}{2SB} = \frac{PB}{AB}$, следовательно, $PB = \frac{AB^2}{2SB}$. Теперь вычислим

$$\cos \angle SBC = \frac{BC}{2SB} = \frac{AB}{SB} = \frac{QB}{CB} = \frac{QB}{2AB},$$

откуда $QB = \frac{2AB^2}{SB}$, следовательно, $QB = 4PB$ и $BP : PQ = 1 : 3$.

б) Проведем из точки P отрезок PT параллельно CQ , T лежит на ребре BC . Тогда $\angle APT$ — линейный угол двугранного угла при ребре SP , то есть искомый. Пусть $AB = a$, $BC = SB = 2a$. Тогда

$$CQ = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \text{ и } \frac{PT}{CQ} = \frac{BP}{BQ} = \frac{1}{4},$$

следовательно, $PT = \frac{1}{4}CQ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Вычислим:

$$BP = \frac{1}{4}BQ = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}SB = \frac{a}{4}, \quad AP = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4}, \quad \frac{TB}{BC} = \frac{BP}{BQ} = \frac{1}{4},$$

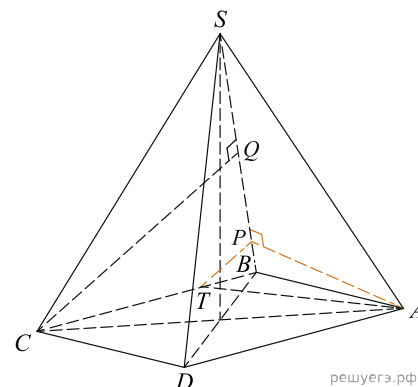
следовательно, $TB = \frac{a}{2}$, $AT = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Найдем угол $\angle APT$ из теоремы косинусов для треугольника APT :

$$\frac{5a^2}{4} = \frac{15a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cos \angle APT,$$

откуда $\cos \angle APT = -\frac{\sqrt{5}}{15}$. Таким образом, $\angle APT = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{15}\right)$.

Ответ: б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{15}\right)$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеет- ся верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Основание логарифма равно 1 при $x = 4$, и больше 1 при прочих значениях переменной. Поэтому

$$\log_{(x-4)^2+1}(3x^2+5) \leq \log_{(x-4)^2+1}(2x^2+7x+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4, \\ 0 < 3x^2+5 \leq 2x^2+7x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4, \\ x(x-7) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 4, \\ 4 < x \leq 7. \end{cases}$$

Ответ: $[0;4) \cup (4;7]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть сумма кредита равна S , а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1 + b)X.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1 + b + b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X.$$

По условию тремя выплатами Тимофей погасил кредит полностью, поэтому

$$Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X = 0,$$

откуда $X = \frac{Sb^3(b-1)}{(b^3-1)}.$

Рассуждая аналогично, находим, что если бы Тимофей гасил долг двумя равными выплатами, то каждый год он должен был бы выплачивать $Y = \frac{Sb^2}{b+1}$ рублей. Значит, он отдал банку на $3X - 2Y$ больше.

При $S = 7007000$ и $a = 20$ получаем $b = 1,2$ и

$$X = \frac{7007000 \cdot 1,228 \cdot 0,2}{0,728} = 3326400 \text{ (рублей);}$$

$$Y = \frac{7007000 \cdot 1,44}{2,2} = 4586400 \text{ (рублей)}.$$

Значит, $3X - 2Y = 806400$.

Ответ: 806 400.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть прямая BM пересекает основание AD в точке E , тогда треугольники BCM и EDM равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $BM = ME$ как соответственные элементы равных фигур. В треугольнике ABE отрезок AM — медиана и биссектриса, а значит, и высота, то есть отрезок AM перпендикулярен прямой BE . По условию отрезок AM перпендикулярен также прямой DN , поэтому прямая DN параллельна прямой BE по признаку параллельных прямых.

б) Из равенств $AN = AD$ и $AB = AE$ получаем, что $BN = DE = BC$. Пусть $BC = x$, тогда $AB = 6x$, $AD = 5x$. По теореме Пифагора найдем высоту BH трапеции:

$$BH = \sqrt{(6x)^2 - \left(\frac{5x-x}{2}\right)^2} = 4\sqrt{2}x.$$

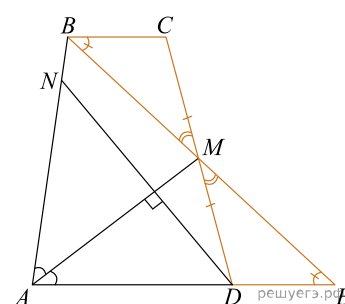
Выразим площадь трапеции: $S_{ABCD} = 12\sqrt{2}$, откуда

$$\frac{x+5x}{2} \cdot 4\sqrt{2}x = 12\sqrt{2} \Leftrightarrow 12\sqrt{2}x^2 = 12\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1,$$

а потому

$$MN = MD = \frac{1}{2} \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 6x = 3.$$

Ответ: б) 3.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4

С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. График функции $y = 2x + a$ представляет собой график функции $y = 2x$, сдвинутый на $\left|\frac{a}{2}\right|$ единиц вдоль оси Ox . Преобразуем второе уравнение системы:

$$|y| = x^2 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ y = x^2 - 2x, \\ y < 0, \\ y = -x^2 + 2x. \end{cases}$$

Графиком второго уравнения является объединение частей парабол, изображенных на рисунке оранжевым цветом.

Проверим, что прямая $y = 2x$ является касательной к параболе $y = -x^2 + 2x$, а прямая $y = 2x - 4$ — касательной к параболе $y = x^2 - 2x$. Действительно, дискриминанты соответствующих уравнений

$$2x = -x^2 + 2x$$

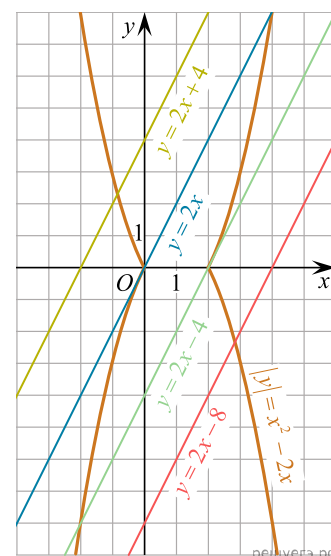
и

$$2x - 4 = -x^2 - 2x$$

равны нулю, а решениями этих уравнений являются точки с абсциссами 0 и 2 соответственно.

Таким образом, при всех значениях параметра a графики функций имеют ровно две точки пересечения. Следовательно, система имеет два решения при всех параметрах a .

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.



№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно выполнены: а), б), в)	4
Верно выполнены б) и один пункт из двух: а), в)	3
Верно выполнено б) или а) и в)	2
Верно выполнен один пункт из двух: а), в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Случай а). Пусть числа $\frac{b}{q^2}, \frac{b}{q}, b, bq, bq^2$, где по условию b — натуральное число, $q > 0, b \geq 2, q \neq 1$ — искомые члены прогрессии. Их произведение равно b^5 но уравнение $b^5 = 1512$ не имеет натуральных решений. Итак, необходимой прогрессии из 5 чисел не существует.

Случай б). Пусть прогрессия состоит из четырех членов $\frac{b}{q}, b, bq, bq^2$, а пятое натуральное число равно k . Поскольку $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$, имеем: $b^4 q^2 k = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$, что невозможно для натуральных b^4, q^2 и k поскольку разложение числа 1512 не содержит четвертых степеней простых сомножителей отличных от 1. Заметим, однако, что знаменатель прогрессии q может не быть натуральным числом и исследуем этот случай. Пусть $q = \frac{m}{n}$ несократимая дробь, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда $bq^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow b : n^2 \Rightarrow b^4 : n^8 \Rightarrow b^4 q^2 k : n^6$, что невозможно, поскольку разложение числа 1512 не содержит шестых степеней простых сомножителей отличных от 1.

Случай в). Пусть прогрессия состоит из трех членов $\frac{b}{q}, b, bq$, а четвертое и пятое натуральные числа равны k и l . Тогда $b^3 kl = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$. Положим в этом равенстве $b = 6, k = 7, l = 1$. Далее, полагая $q = 2$, получим один из требуемых наборов чисел: 3, 6, 12, 7, 1.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.
