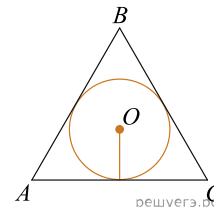


Вариант 66

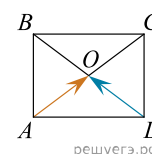
№ 1.

Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.



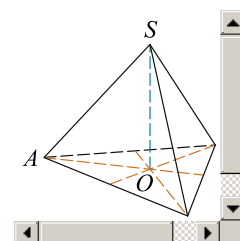
№ 2.

Две стороны изображенного на рисунке прямоугольника $ABCD$ равны 8. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите длину разности векторов $\vec{AO}$ и $\vec{DO}$.



№ 3.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 2, объем пирамиды равен 4. Найдите длину отрезка OS .



№ 4.

За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки не будут сидеть рядом.

№ 5.

Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало 3 очка.

№ 6.

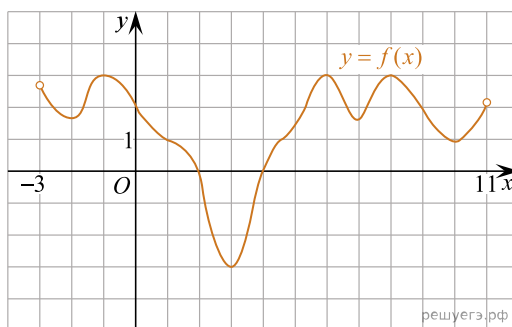
Найдите корень уравнения $6^{12,5x+2} = \frac{1}{216}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0,2$.

№ 8.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 11)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[4; 9]$.



No 9.

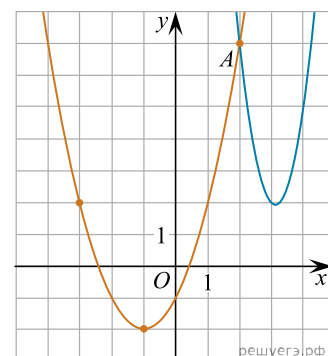
Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полета мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 20$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 4 м на расстоянии 1 м?

№ 10.

Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = \frac{16}{x} + x + 3$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\sqrt{3}(\cos 4x + 1) = 2\cos 2x(2 - \cos 4x)$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

№ 14.

Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Докажите, что плоскости $A_1 B D$ и $B_1 C D_1$ параллельны.

б) Пусть дополнительно известно, что параллелепипед прямоугольный, кроме того $AB=4$, $BC=6$, $CC_1=4$. Найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1 .

№ 15.

Решите неравенство $9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0$.

№ 16.

В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1кг алюминия или 0,3кг никеля. Во второй области рабочие объединены в две бригады, одна из которых добывает алюминий, а другая— никель, причем для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую суммарную массу металлов можно добыть в двух областях за сутки?

№ 17.

На сторонах AC , AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вне треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольные треугольники AKC , ALB и BMC с прямыми углами K , L и M соответственно.

а) Докажите, что LC — высота треугольника KLM .

б) Найдите площадь треугольника KLM , если $LC = 4$.

№ 18.

Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции $y = 3|x+a| + |x^2 - x - 2|$ меньше 2.

№ 19.

На доске написаны все пятизначные числа, в десятичной записи которых по одному разу встречаются цифры 3, 4, 5, 6 и 7 (34567, 34576 и т. д.).

а) Есть ли среди них число, которое делится на 55?

б) Есть ли среди них число, которое делится на 505?

в) Найдите наибольшее из этих чисел, делящееся на 11.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27907	2
2	27712	8
3	904	6

4	325913	0,75
5	508754	0,2
6	510936	-0,4
7	26859	0
8	672746	3
9	28003	30
10	99604	38,4
11	509253	7
12	77471	-4

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем числитель, используя формулы двойных и тройного аргумента:

$$\begin{aligned}
 \sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x &= \sin^3 x (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + \cos^3 x (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = \\
 &= \sin x \cos x (4 \sin^2 x \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 4 \cos^2 x \sin^2 x) = \\
 &= \sin x \cos x (3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x) = 3 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{2} \sin 2x \cos 2x. \quad \sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x = \\
 &= \sin^3 x (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + \cos^3 x (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = \\
 &= \sin x \cos x (4 \sin^2 x \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 4 \cos^2 x \sin^2 x) = \\
 &= \sin x \cos x (3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x) = 3 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{2} \sin 2x \cos 2x. \quad \sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x = \\
 &= \sin^3 x (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + \cos^3 x (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = \\
 &= \sin x \cos x (4 \sin^2 x \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 4 \cos^2 x \sin^2 x) = \\
 &= \sin x \cos x (3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x) = \\
 &= 3 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{2} \sin 2x \cos 2x.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x}{|\sin 2x|} &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{2} \sin 2x \cos 2x}{|\sin 2x|} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{|\sin 2x|} \cos 2x = \frac{1}{2}. \quad \frac{\sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x}{|\sin 2x|} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{\frac{3}{2} \sin 2x \cos 2x}{|\sin 2x|} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{|\sin 2x|} \cos 2x = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Дробь в левой части уравнения принимает значения 1 или -1. Рассмотрим оба случая.

Если $\sin 2x > 0$, то получаем, что $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Обои́м этим условиям одновременно удовлетворяют лишь числа $2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin 2x < 0$, то получаем, что $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Этим условиям одновременно удовлетворяют числа $2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, а значит, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 4\pi]$, отберем при помощи двойных неравенств:

$$2\pi \leq \frac{\pi}{6} + \pi k \leq 4\pi \Leftrightarrow \frac{11}{6} \leq k \leq \frac{23}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2, \\ k = 3; \end{cases}$$

$$2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + \pi n \leq 4\pi \Leftrightarrow \frac{7}{3} \leq n \leq \frac{13}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} n=3, \\ n=4. \end{cases}$$

Найденным значениям параметров соответствуют числа $\frac{13\pi}{6}, \frac{8\pi}{3}, \frac{19\pi}{6}, \frac{11\pi}{3}$.

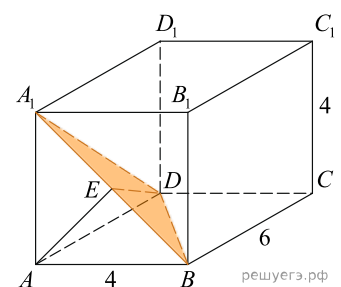
Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{6} + \pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{13\pi}{6}, \frac{8\pi}{3}, \frac{19\pi}{6}, \frac{11\pi}{3}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что прямые BD и B_1D_1 параллельны, поскольку они лежат в одной плоскости BB_1D и не пересекаются (так как лежат еще и в параллельных плоскостях, содержащих грани параллелепипеда). Аналогично $A_1B \parallel CD_1$. Значит, по признаку параллельности плоскостей, $A_1BD \parallel B_1CD_1$.

б) Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1 . Пусть E — середина BA_1 . Поскольку $DE \perp BA_1$ и $AE \perp BA_1$, значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим $\operatorname{tg} \angle DEA = \frac{AD}{AE} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.



Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Пусть $t = 3^{4x-x^2-1}$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 36t + 243 \geq 0 \Leftrightarrow (t-9)(t-27) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 9, \\ t \geq 27. \end{cases}$$

При $t \leq 9$ получим:

$$3^{4x-x^2-1} \leq 9 \Leftrightarrow 4x-x^2-1 \leq 2 \Leftrightarrow x^2-4x+3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

При $t \geq 27$ получим:

$$3^{4x-x^2-1} \geq 27 \Leftrightarrow 4x-x^2-1 \geq 3 \Leftrightarrow x^2-4x+4 \leq 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Решение исходного неравенства: $x \leq 1$; $x = 2$; $x \geq 3$.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, необходимо, чтобы в каждой области независимо от другой было добыто наибольшее количество металла. Поэтому все рабочие первой области должны быть направлены на добычу никеля, который они добывают втрое более эффективно, чем алюминий. За сутки ими будет добыто $160 \cdot 5 \cdot 0,3 = 240$ кг никеля.

Пусть во второй области алюминий добывают u рабочих, а никель — $160 - u$ рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5u}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160-u)}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции

$$f(y) = \sqrt{5y} + \sqrt{800-5y}$$

для неотрицательных целых y , не больших 160. Имеем:

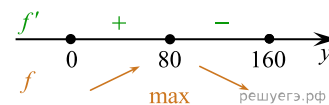
$$f'(y) = \frac{5}{2\sqrt{5y}} - \frac{5}{2\sqrt{800-5y}} = \frac{5}{2} \frac{\sqrt{800-5y} - \sqrt{5y}}{\sqrt{5y} \cdot \sqrt{800-5y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{800-5y} = \sqrt{5y} \Leftrightarrow_{y \geq 0} 800-5y = 5y \Leftrightarrow y = 80.$$

При y меньших 80 производная положительна, а при y больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{\max} = 40$, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

Таким образом, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 — на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 280 кг металла.



Ответ: 280 кг.

сы $AP:PB = AC:CB = b:a$, $AP + PB = AB = c$. Отсюда

$$AP = \frac{bc}{a+b} \text{ и } PB = \frac{ac}{a+b}.$$

Поскольку углы ACL и LCB равны 45° , получаем, что треугольники ACL и PAL подобны по двум углам, тогда:

$$\frac{AC}{PA} = \frac{CL}{AL},$$

$$b : \frac{bc}{a+b} = d : \frac{c}{\sqrt{2}},$$

$$d = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Площадь треугольника KLM равна половине произведения его высоты LC , обозначенной буквой d , на сторону, являющейся основанием треугольника и равным

$$KM = KC + CM = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = d.$$

Следовательно, искомая площадь равна $\frac{d^2}{2}$, то есть 8.

Ответ: 8.

Приведем решение пункта б) Luigi Cussigh.

Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Четырехугольник $ALBC$ — вписанный, тогда по теореме Птолемея

$$AL \cdot BC + AC \cdot BL = AB \cdot CL.$$

Прямоугольный треугольник ALB — равнобедренный, тогда $AL = LB = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, следовательно,

$$\frac{ac\sqrt{2}}{2} + \frac{bc\sqrt{2}}{2} = 4c \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{b\sqrt{2}}{2} = 4.$$

Прямоугольный треугольник AKC — равнобедренный, тогда $AK = KC = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, аналогично $CM = MB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Площадь треугольника KLM равна половине произведения его высоты LC на сторону, являющуюся основанием треугольника и равную

$$KM = KC + CM = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = 4.$$

Следовательно, искомая площадь равна

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

Приведем решение Ирины Шраго.

Обозначим отрезки буквами для удобства: BC — a , AC — b , AB — c и CL — d . По доказанному в пункте а) углы ACL и LCB равны 45° .

По теореме косинусов для треугольника ACL $b^2 + d^2 - 2bd \cos 45^\circ$.

По теореме косинусов для треугольника BCL $a^2 + d^2 - 2ad \cos 45^\circ$.

По условию $AL = LB$, тогда

$$\begin{aligned} b^2 + d^2 - 2bd \cos 45^\circ &= a^2 + d^2 - 2ad \cos 45^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b^2 - a^2 - d\sqrt{2}(b-a) &= 0 \Leftrightarrow (b-a)(b+a-d\sqrt{2}) = 0. \quad b^2 + d^2 - 2bd \cos 45^\circ = a^2 + d^2 - 2ad \cos 45^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b^2 - a^2 - d\sqrt{2}(b-a) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (b-a)(b+a-d\sqrt{2}) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, либо $d = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$, либо $a = b$, тогда треугольник ABC равнобедренный, и $d = c = a\sqrt{2} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$.

Площадь треугольника KLM равна половине произведения его высоты LC на сторону, являющуюся основанием треугольника и равную

$$KM = KC + CM = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} = d,$$

тогда искомая площадь равна

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Обосновано получен ответ, отличающийся от верного только исключением и/или включением граничных точек. ИЛИ Ответ неверен вследствие одной вычислительной ошибки (описки), не повлиявшей на ход решения и не упростившей задачу.	3
С помощью верного рассуждения получены искомые промежутки значений a , неверные из-за неверной оценки концов промежутков.	2
(При аналитическом решении) Описано «поведение» функции $y = 3 x+a + x^2 - x - 2 $, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют. ИЛИ (при аналитическом решении) Описано поведение функции $y = 3 x+a + x^2 - x - 2 $, но указаны не все точки, в которых функция может принимать наименьшее значение. ИЛИ (при графическом решении) Задача сведена к исследованию взаимного расположения графиков функций $f(x) = x^2 - x - 2 $ и $g(x) = 2 - 3 x+a $.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Данная функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел и точки $x = -a$, $x = -1$, $x = 2$ разбивают действительную ось на промежутки, в каждом из которых графиком данной функции является часть некоторой параболы. Заметим, что при $|x| \rightarrow \infty$ значения данной функции неограниченно возрастают. Следовательно, свое наименьшее значение данная функция принимает в одной из точек (или в нескольких этих точках) $x = -a$, $x = -1$, $x = 2$, $x = x_1$, $x = x_2$ где x_1 ; x_2 — абсциссы вершин тех парабол, ветви которых направлены вверх.

Эти параболы $y = x^2 - x - 2 + 3(x+a)$ и $y = x^2 - x - 2 - 3(x+a)$ или $y = x^2 + 2x - 2 + 3a$ и $y = x^2 - 4x - 2 - 3a$. Абсциссы их вершин соответственно $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Таким образом, наименьшее значение функции $y = 3|x+a| + |x^2 - x - 2|$ меньше 2 тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из неравенств: $y(-1) < 2$, $y(2) < 2$, $y(-a) < 2$.

$y(-1) = 3|a-1|$, $y(2) = 3|a+2|$, $y(-a) = |a^2 + a - 2|$, поэтому получаем совокупность неравенств:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3|a-1| < 2, \\ 3|a+2| < 2, \\ |a^2 + a - 2| < 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} < a-1 < \frac{2}{3}, \\ -\frac{2}{3} < a+2 < \frac{2}{3}, \\ \begin{cases} a^2 + a - 4 < 0, \\ a^2 + a > 0 \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < a < \frac{5}{3}, \\ -\frac{8}{3} < a < -\frac{4}{3}, \\ \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < a < -1, \\ 0 < a < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}. \end{cases} & (*) \quad \begin{cases} 3|a-1| < 2, \\ 3|a+2| < 2, \\ |a^2 + a - 2| < 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} < a-1 < \frac{2}{3}, \\ -\frac{2}{3} < a+2 < \frac{2}{3}, \\ \begin{cases} a^2 + a - 4 < 0, \\ a^2 + a > 0 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < a < \frac{5}{3}, \\ -\frac{8}{3} < a < -\frac{4}{3}, \\ \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < a < -1, \\ 0 < a < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}. \end{cases} & (*) \end{aligned}$$

Учитывая, что $17 < 4,2^2 = 17,64$, получаем $\frac{-1+\sqrt{17}}{2} < \frac{3,2}{2} = 1,6 < \frac{5}{3} = 1,66\dots$

Аналогично $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} > -\frac{5,2}{2} = -2,6 > -\frac{8}{3} = -2,66\dots$

Таким образом, окончательно получаем (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{8}{3} < a < -1, \\ 0 < a < \frac{5}{3}. \end{cases}$

Ответ: $\left(-\frac{8}{3}; -1\right) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а, б и в.	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а и б, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах а и в.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте в, пункты а и б не решены.	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да. Например, число $63\,745 = 55 \cdot 1159$.

б) Предположим, что такое число есть и его десятичная запись имеет вид $\overline{abcde}$, где a, b, c, d и e — это различные, расставленные в некотором (возможно, ином) порядке цифры 3, 4, 5, 6 и 7. Поскольку число $\overline{abcde}$ делится на $505 = 101 \cdot 5$, получаем, что оно делится на 101 и 5. Значит, $e = 5$. Имеем

$$\overline{abcde} = \overline{abcd5} = 100 \cdot \overline{abc} + \overline{d5} = 101 \cdot \overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{d5}).$$

Следовательно, разность $\overline{abc} - \overline{d5}$ делится на 101 и найдётся такое натуральное число $k \leq 9$, что $\overline{abc} - \overline{d5} = 101 \cdot k$. Так как k может принимать значения 3, 4, 6 или 7, откуда получаем, что k может принимать значения 8, 9, 1 или 2 соответственно. Если $k \geq 8$, то $a \geq 8$. Если $k \leq 2$, то $a \leq 2$. Пришли к противоречию.

в) Пусть $\overline{abcde}$ — это десятичная запись какого-либо числа с доски. Имеем

$$\begin{aligned} \overline{abcde} &= a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e = (a - b + c - d + e) + 11 \cdot (a \cdot 909 + b \cdot 91 + c \cdot 9 + d). \\ \overline{abcde} &= a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e = \\ &= (a - b + c - d + e) + 11 \cdot (a \cdot 909 + b \cdot 91 + c \cdot 9 + d). \end{aligned}$$

Число $\overline{abcde}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда число $a - b + c - d + e$ делится на 11. Сумма цифр каждого из чисел с доски равна

$$a + b + c + d + e = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25.$$

Значит, $a - b + c - d + e = 25 - 2(b + d)$. Поскольку $b + d$ может принимать значения от 7 до 13, получаем, что число $\overline{abcde}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда $b + d = 7$, то есть когда b и d — это различные, расставленные в некотором (возможно, ином) порядке цифры 3 и 4. Среди чисел указанного вида наибольшим числом на доске является 74 635.

Ответ: а) да; б) нет; в) 74635.