

Вариант 68

№1.

Один острый угол прямоугольного треугольника на 32° больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

№2.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину суммы векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$.

№3.

Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшится в 1,5 раза, а образующая останется прежней?

№4.

Закруглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

№5.

В одном ресторане в Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в «Цеш-беш»: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплемент от ресторана: чашку кофе и десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплемент? Результат округлите до сотых.

№6.

Найдите корни уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

№7.

Найдите значение выражения

№8.

На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции f отрицательна. Ответ укажите количеством найденных точек.

№9.

При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 5$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^8$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова долж-

набьтй минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала более 4 м? Ответ выразите в м/с.

"

№10.

Смешали равные массы двух растворов кислоты, концентрации которых относятся как 2 : 5, и получили новый раствор, содержащий 49% кислоты. Найдите разность концентраций второго и первого растворов. Ответ дайте в процентах.

"

№11.

Нарисуйте и изображён график функции Найдите

"

№12.

Найдите точку минимума функции

"

№13.

а) Решите уравнение

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

"

№14.

В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и $A_1 B_1$ соответственно. Известно, что $AM = 3MA_1$, $A_1 K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно плоскости $ABB_1 A_1$.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1 .

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости α , если все ребра призмы равны 16.

"

№15.

Решите неравенство:

"

№16.

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возвратаковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 300 тыс. руб.;

— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платеж в 2029 году будет равен 417,6 тыс. руб. Какую сумму (в тыс. руб.) планируется взять в кредит?

"

№17.

В треугольнике ABC продолжения высоты CC_1 и биссектрисы BB_1 пересекают описанную окружность в точках N и M соответственно, и

а) Докажите, что $BM = CN$.

б) Прямые BC и MN пересекаются в точке D . Найдите площадь треугольника BDN , если его высота BN равна 6.

N018

№19.

а) Могла ли выручка каждого аттракциона составить ровно 60 рублей?

б) Каково наименьшее количество детей могло быть, если известно, что все аттракционы получили одинаковую выручку?

в) Пустьлюбыедвааттракционаимеютразнуювыручку(возможно,нулевую). Каковонаибольшеевозможноеколичествопосетившихпаркдетей?

1

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27742	61
2	27708	10
3	27137	1,5
4	325904	0,25
5	508791	0,11
6	26667	8
7	26782	1
8	500248	3
9	27983	180000
10	676853	42
11	508911	31
12	77444	3

№ 13.

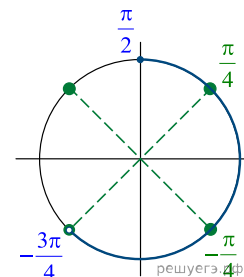
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Для квадратов синуса и косинуса применим в левой части формулу суммы кубов:

$$\begin{aligned}\cos^6 x + \sin^6 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = \\ &= 1 \cdot ((\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 3\cos^2 x \sin^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \sin^2 2x &\Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \\ 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \sin^2 2x &\Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 2x = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \quad 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \sin^2 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$



б) Отберём корни при помощи единичной окружности. Подходят $\pm \frac{\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\pm \frac{\pi}{4}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Отрезок KC_1 является медианой правильного треугольника $A_1B_1C_1$, а потому является и высотой этого треугольника. Призма $ABCA_1B_1C_1$ — прямая, поэтому ее боковые ребра являются высотами призмы. Следовательно, отрезок KC_1 перпендикулярен ребру AA_1 . Таким образом, плоскость MKC_1 перпендикулярна плоскости ABB_1A_1 .

б) Пусть искомое расстояние равно ρ . Из условия следует, что $MA_1 = 4$, $AM = 12$, $A_1K = KB_1 = 8$. Запишем объем пирамиды C_1A_1KM двумя способами и выразим ρ :

$$V_{C_1A_1KM} = \frac{1}{3} \cdot C_1K \cdot S_{A_1MK},$$

$$V_{C_1A_1KM} = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot S_{C_1MK},$$

$$\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot S_{C_1MK} = \frac{1}{3} \cdot C_1K \cdot S_{A_1MK} \Leftrightarrow \rho = \frac{C_1K \cdot S_{A_1MK}}{S_{C_1MK}}.$$

Прямая C_1K перпендикулярна плоскости грани ABB_1 , поэтому она перпендикулярна лежащей в ней прямой KM , то есть треугольник C_1MK — прямоугольный. Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольников C_1A_1K и A_1MK соответственно:

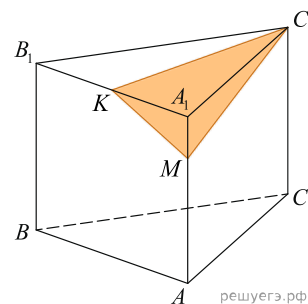
$$C_1K = \sqrt{A_1C_1^2 - A_1K^2} = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3},$$

$$KM = \sqrt{A_1K^2 + A_1M^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Таким образом,

$$\rho = \frac{C_1K \cdot S_{A_1MK}}{S_{C_1MK}} = \frac{8\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4}{\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Заметим, что выражение, стоящее под знаком логарифма, не меньше 1:

$$x^2 - 12|x| + 37 = (|x| - 6)^2 + 1 \geq 1.$$

Кроме того, при ненулевых значениях переменной справедливы неравенства $1 - \frac{x^2}{37} < 1$ и $1 + \frac{x^2}{37} > 1$, а значит,

$$\log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) \leq 0, \text{ и } \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) \geq 0.$$

Таким образом, неравенство выполнено в том и только в том случае, когда оба логарифма равны нулю. Имеем:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) = 0, \\ \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 12|x| + 37 = 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (|x| - 6)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow |x| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ x = -6. \end{cases} \begin{cases} \log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) = 0, \\ \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow x^2 - 12|x| + 37 = 1 \Leftrightarrow (|x| - 6)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow |x| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ x = -6. \end{cases} \end{aligned}$$

Проверка подтверждает, что при найденных значениях x исходное неравенство выполняется.
Таким образом, ответом являются два значения: $x = 6$ или $x = -6$.

Ответ: $\{-6; 6\}$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть планируется взять в кредит S тыс. руб. Заполним таблицу:

Год	Долг в январе, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг в июле, тыс. руб.
2026			S
2027	$1,2S$	300	$1,2S - 300$
2028	$1,2^2S - 1,2 \cdot 300$	300	$1,2^2S - 1,2 \cdot 300 - 300$
2029	$1,2^3S - 1,2^2 \cdot 300 - 1,2 \cdot 300$	417,6	$1,2^3S - 1,2^2 \cdot 300 - 1,2 \cdot 300 - 417,6$

Долг в июле 2029 года будет выплачен полностью, получаем уравнение:

$$\begin{aligned}
 1,2^3S - 1,2^2 \cdot 300 - 1,2 \cdot 300 - 417,6 &= 0 \Leftrightarrow 1,2^3S - 300(1,44 + 1,2) = 417,6 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1,2^3S &= 792 + 417,6 \Leftrightarrow 1,728S = 1209,6 \Leftrightarrow S = 700. \quad 1,2^3S - 1,2^2 \cdot 300 - 1,2 \cdot 300 - 417,6 = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1,2^3S - 300(1,44 + 1,2) &= 417,6 \Leftrightarrow 1,2^3S = 792 + 417,6 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1,728S &= 1209,6 \Leftrightarrow S = 700. \quad 1,2^3S - 1,2^2 \cdot 300 - 1,2 \cdot 300 - 417,6 = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1,2^3S - 300(1,44 + 1,2) &= 417,6 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1,2^3S &= 792 + 417,6 \Leftrightarrow 1,728S = 1209,6 \Leftrightarrow S = 700. \quad 1,2^3S - 1,2^2 \cdot 300 - 1,2 \cdot 300 - 417,6 = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1,2^3S - 300(1,44 + 1,2) &= 417,6 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1,2^3S &= 792 + 417,6 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 1,728S &= 1209,6 \Leftrightarrow S = 700.
 \end{aligned}$$

Ответ: 700.

Приведем решение Игоря Эльмана (Москва).

Пусть планируется взять в кредит S тыс.руб. Выданный под проценты кредит можно рассматривать как размещение банком депозита на счете заемщика. При отсутствии операций величина этого депозита за три года достигнет $1,2^3S$ тыс.руб. Выплаты банку, в свою очередь, можно рассматривать как открытие заемщиком в банке депозитного счета. За три года с учетом пополнений на этом счете накопится $1,2^2 \cdot 300 + 1,2 \cdot 300 + 417,6$ тыс. руб. Поскольку долг был выплачен полностью, получаем уравнение:

$$1,2^3S = 1,2^2 \cdot 300 + 1,2 \cdot 300 + 417,6,$$

откуда $S = 700$.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что

$$\angle BAC = 180^\circ - 40^\circ - 85^\circ = 55^\circ$$

и

$$\angle ACC_1 = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

Тогда $\sphericalangle AN = 70^\circ$, следовательно, $\sphericalangle CAN = 2 \cdot 40^\circ + 70^\circ = 150^\circ$. Значит,

$$\sphericalangle BCM = \sphericalangle BC + \sphericalangle CM = 2 \cdot 55^\circ + 2 \cdot \frac{40^\circ}{2} = 150^\circ,$$

откуда следует, что $CN = BM$ как хорды, стягивающие равные дуги.

б) Найдем углы BND и DBN :

$$\angle BND = \angle BNC + \angle CNM = \angle BAC + \angle CBM = 55^\circ + 20^\circ = 75^\circ,$$

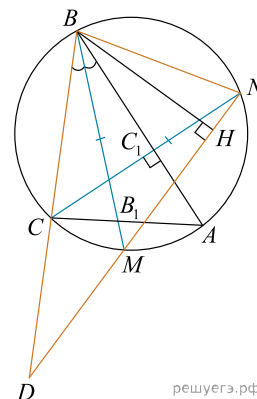
$$\angle DBN = \angle CBA + \angle ABN = \angle CBA + \angle ACN = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ.$$

Тогда $\angle BDN = 30^\circ$, а значит,

$$BD = ND = \frac{BH}{\sin 30^\circ} = 12.$$

Тогда для площади треугольника BDN имеем: $S_{BDN} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 36$.

Ответ: б) 36.



решуегэ.рф

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений параметра, отличающееся от искомого только включением точек $a = 1$, и / или $a = \frac{4}{9}$	3
В решении верно найдены все граничные точки множества значений a ($a = 1$, $a = \frac{4}{9}$, $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$), но неверно определены промежутки значений a или Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом выполнены все шаги решения	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и получены два промежутка $(-\infty; \frac{4}{9})$ и $(1; +\infty)$, возможно, с включением граничных точек или задача верно сведена к исследованию взаимного расположения гипербол и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. При $a < 0$ второе уравнение системы, а значит, и вся система не имеют решений.

Если $a = 0$, то получаем систему $\begin{cases} y - x = 0, \\ xy = 0 \end{cases}$, которая имеет единственное решение $(0; 0)$.

Рассмотрим случай $a > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a(y-x)+2)(y-x+3a)=0, \\ |xy|=a. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a(y-x)+2=0, \\ y-x+3a=0, \\ xy=a, \\ xy=-a. \end{cases} \\ \begin{cases} y=x-\frac{2}{a}, \\ y=x-3a, \\ y=\frac{a}{x}, \\ y=-\frac{a}{x}. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a(y-x)+2=0, \\ y-x+3a=0, \\ xy=a, \\ xy=-a. \end{cases} \\ \begin{cases} y=x-\frac{2}{a}, \\ y=x-3a, \\ y=\frac{a}{x}, \\ y=-\frac{a}{x}. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Графиком первого уравнения системы являются две параллельные прямые (на рисунке изображены красным цветом), совпадающие при $\frac{2}{a} = 3a \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Заметим, что при любых положительных значениях a эти две прямые лежат ниже прямой $y = x$. Графиком второго уравнения системы являются две гиперболы $y = \frac{a}{x}$ или $y = -\frac{a}{x}$ (на рисунке изображены синим цветом). Если две прямые совпадают, то у системы не может быть больше четырёх решений. Поэтому $\frac{2}{a} \neq 3a \Leftrightarrow a \neq \sqrt{\frac{2}{3}}$.

При этом условии гипербола $y = \frac{a}{x}$ пересекает каждую из прямых в двух различных точках. Это дает четыре различных решения данной системы (на рисунке — синие точки).

Еще два решения должны получаться при пересечении прямых гиперболой $y = -\frac{a}{x}$ в двух различных точках в четвертой координатной четверти. Для этого нужно, чтобы гипербола дважды пересекала одну из прямых (на рисунке — красные точки), и не имела общих точек с другой прямой. (Ситуация, при которой каждая из прямых имеет одну общую точку с гиперболой и эти точки различны, невозможна.) Для этого нужно, чтобы из двух квадратных уравнений

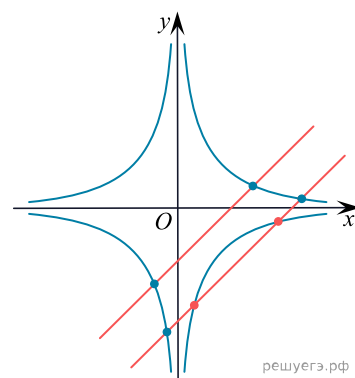
$$x^2 - \frac{2}{a}x + a = 0 \text{ и } x^2 - 3ax + a = 0$$

одно имело ровно два различных корня, а другое не имело корней. Дискриминанты этих уравнений должны быть противоположных знаков. Получаем:

$$\left(\frac{4}{a^2} - 4a\right)(9a^2 - 4a) < 0 \Leftrightarrow \frac{4(a^3 - 1)a(9a - 4)}{a^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < \frac{4}{9}, \\ a > 1. \end{cases}$$

Учитывая, что $\frac{4}{9} < \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$, приходим к ответу.

Ответ: $\left(0; \frac{4}{9}\right) \cup (1; +\infty)$.



№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да. Пусть было 13 детей и 13 аттракционов, 10 детей потратили по 30 рублей, а 3 ребенка потратили по 160 рублей. Очевидно, что потраченные 780 рублей можно распределить так, чтобы каждый из 13 аттракционов заработал ровно 60 рублей.

б) Пусть было n детей и n аттракционов, каждый аттракцион заработал $10b$ рублей, а детей истратили по 30 рублей и $n-a$ детей истратили по 160 рублей. Тогда $30a + 160(n-a) = 10bn$, а значит, $(16-b)n = 13a$. Следовательно, n делится на 13 (поскольку если $16-b = 13$, то $n=a$, а если $16-b=0$, то $a=0$, что невозможно по условию), поэтому $n = 13$; 13 аттракционов могло быть, пример приведен в предыдущем пункте.

в) Пусть было n детей и n аттракционов, а детей истратили по 30 рублей и $n-a$ детей истратили по 160 рублей. Тогда дети истратили $30a + 160(n-a)$ руб. С другой стороны, аттракционы выручили не меньше чем

$$0 + 10 + \dots + 10(n-1) = \frac{10n(n-1)}{2} \text{ руб.}$$

Суммарная выручка аттракционов равна сумме денег, потраченных детьми, поэтому получаем, что

$$30a + 160(n-a) \geq \frac{10n(n-1)}{2} \Leftrightarrow 16n > \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n < 33.$$

Значение $n=32$ подходит. В самом деле, из неравенства $3a + 16(n-a) \geq \frac{n(n-1)}{2}$ при $n=32$ получаем, что $512 - 13a \geq 496$. Следовательно, $13a \leq 16$, тогда $a=1$, а потому $n-a=31$, то есть потраченная сумма денег равна $1 \cdot 30 + 31 \cdot 160 = 4990$ руб. Это число может быть получено, например, как

$$4990 = 0 + 10 + \dots + 290 + 300 + 340.$$

Есть и другие варианты.

Ответ: а) да; б) 13; в) 32.
